UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 21-29
ISSN: 1815-0640

Modelo para resolver un trinomio elevado a la n

David Gómez Sánchez; Adoración Gómez Sánchez; Ramón Recio Reyes

Resumen

Se presenta una técnica para resolver un trinomio de la forma $(a+b+c)^n$, donde n es un entero mayor o igual cero, tomando como referencia el triángulo de Pascal. Esta técnica propone la construcción de una pirámide regular triangular donde cada cara es un triángulo de Pascal. Esta pirámide tiene (n+1) secciones transversales en la pirámide, lo que permite resolver el trinomio $(a+b+c)^n$ con cada una de esas secciones. La base de la pirámide es un triángulo equilátero, cuya longitud de las aristas es directamente proporcional a n, proponemos una solución para cada valor de n, la determinación de la cardinalidad de los monomios del resultado final, la identificación de cada asignación de los exponentes correspondiente y obteniendo así una resultado con la misma lógica que se resuelve un binomio de la forma $(a+b)^n$ con el triángulo de Pascal.

Abstract

We present a technique to solve a trinomial of the form $(a+b+c)^n$, where n is a integer greater or equal 0, taking as basis the Pascal's triangle. This technique proposes the construction of a regular triangular pyramid where every face is a Pascal’s triangle. This regular pyramid we construct has (n+1) transversal sections into the pyramid, which allows to solve the trinomial $(a+b+c)^n$ which every of those sections. The basis of the pyramid is an equilateral triangle whose side length is directly proportional to n; we propose a solution for every value of n, determining the cardinality of the monomials of the final result, identifying each and assigning the corresponding exponents and thus obtaining a result with the same logic as a binomial of the form $(a+b)^n$ with the Pascal’s triangle.

Resumo

Apresenta-se uma técnica para resolver um trinomio da forma $(a+b+c)^n$, onde n é um inteiro maior ou igual zero, tomando como referência o triángulo de Pascal. Esta técnica propõe a construção de uma pirámide regular triangular onde a cada cara é um triángulo de Pascal. Esta pirámide tem (n+1) secções transversales na pirámide, o que permite resolver o trinomio $(a+b+c)^n$ com a cada uma dessas secções. A base da pirámide é um triángulo equilátero, cuja longitude das aristas é directamente proporcional a n, propomos uma solução para a cada valor de n, a determinação da cardinalidad dos monomios do resultado final, a identificação da cada asignación dos exponentes correspondente e obtendo assim uma resultado com a mesma lógica que se resolve um binómio da forma $(a+b)^n$ com o triángulo de Pascal.

Introducción

En el estudio del Álgebra observamos que las operaciones realizadas cuando se multiplican polinomios requieren de mucho tiempo, además de ser un proceso tedioso y en el cual se puede incurrir en errores, lo que dificulta los cálculos y minimiza el grado de precisión en los resultados que se obtienen (Gómez D., Romo J. M. y Gómez A., 2010). Específicamente hablando del trinomio elevado a la n potencia, se observa que a medida que n crece, los productos de los polinomios se complican, teniendo que hacer (n-1) multiplicaciones entre polinomios.

El triángulo de Pascal es una técnica para resolver un binomio elevado a la n, de la forma $(a + b)^n$ que debe cumplir la siguiente condición para el exponente que los valores que tome sean enteros y positivos. El triángulo de Pascal está formado por los coeficientes binomiales de cada uno de los términos del resultado (Baldor, 2007), como se muestra en la figura 1:

n = 0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1
n = 6	1 6 15 20 15 6 1
n = 7	1 7 21 35 35 21 7 1
n = 8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Figura 1: Triángulo de Pascal

Así cuando n se incrementa, la base del triángulo crece, formándose los nuevos términos por la sucesión de los anteriores; para el caso de n = 8, el primer coeficiente es 1 el segundo es 8, formado por los dos términos que están por encima de él (1 + 7), mientras que el 28 se formó por (7 +21), y así respectivamente hasta terminar dicha sucesión con el valor final 1 formado al sumar (1 + 0). Nótese que cada fila que compone el triángulo de Pascal es una sucesión finita de términos, que al sumarlos predice el resultado de dicha serie, siendo éste 2^n; lo anterior se puede comprobar en la figura 2. El procedimiento mostrado es el mismo que se aplica para la suma de los términos del resultado del trinomio elevado a la n y comprobar que son correctos.

			2^n
n = 0	S_0 =	1	= 1
n = 1	S_1 =	1 + 1	= 2
n = 2	S_2 =	1 + 2 + 1	= 4
n = 3	S_3 =	1 + 3 + 3 + 1	= 8
n = 4	S_4 =	1 + 4 + 6 + 4 + 1	= 16
n = 5	S_5 =	1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1	= 32
n = 6	S_6 =	1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1	= 64
n = 7	S_7 =	1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1	= 128
n = 8	S_8 =	1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1	= 256

Figura 2: Series del triángulo de Pascal 2n

Hasta ahora se han desarrollado otras formas para resolver un trinomio elevado a la n potencia, Zeither (2002, pp. 256-266) presenta una técnica basados en la Fórmula Trinomial y la Pirámide de Pascal-Sierpinski; por su parte, Chapell (1999, pp.141-142) lo resuelve basado en lo que llama el Triángulo Trinomial. En la el Kalamazoo College, (http://max.cs.kzoo.edu/~jmaker/thoughts/trinomial.html) se encuentra una referencia para resolver un trinomio elevado a la segunda y tercera potencia.

Propuesta del modelo de solución de un trinomio elevado a la n

La propuesta de la solución del trinomio $(a + b + c)^n$ se basa en una pirámide regular de base triangular (figura 3) que llamaremos pirámide trinomial, en donde cada cara de la pirámide está formada por un triángulo de Pascal, y cada arista que une a las caras representa el crecimiento del exponente de a, b y c.

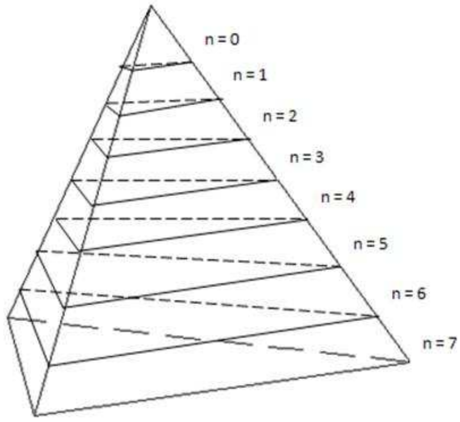

Figura 3 Pirámide Trinomial.

La pregunta entonces es, ¿qué hay dentro de la pirámide? Si se sabe que en cada cara de la pirámide están los coeficientes formados por el Triángulo de Pascal, ahora debemos pensar que dentro de la pirámide están los coeficientes faltantes de los términos del resultado que complementan los términos generados por los triángulos de Pascal. Estos coeficientes que aún no se obtienen estarán en función de los términos a, b y c con sus respectivos exponentes. Se presenta la pirámide resuelta para algunos niveles, sin perder de vista que se extiende indefinidamente hacia abajo. Los niveles están definidos por n que comienza de cero. La pirámide se corta de tal manera que los niveles determinados por cada una de las potencias representen secciones transversales aisladas, lo que permite percibir fácilmente como se forma el interior de la pirámide (figuras 4, 5).

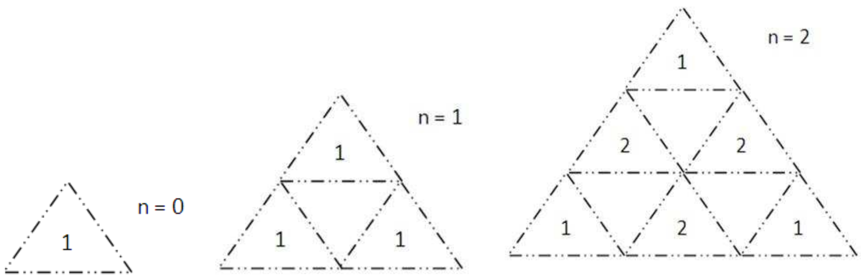

Figura 4 Secciones transversales n es igual 0, 1, 2.

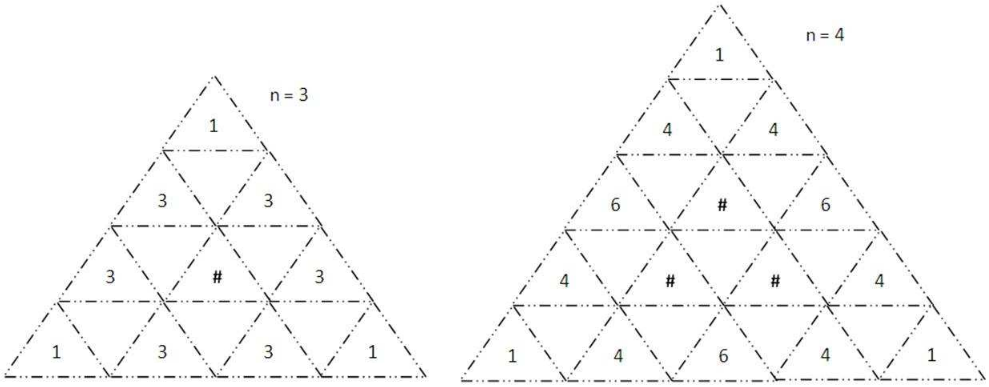

Figura 5 Secciones transversales n es igual 3 y 4 con coeficientes faltantes.

Analizando cada uno de los triángulos que se forman en cada sección transversal triangular (figuras 4, 5) en donde n = 0 y hasta n = 4, se observan las siguientes características específicas:

1. Que los términos de los lados de los triángulos formados por la sección se comportan como si se estuvieran resolviendo binomios elevados a la n.
2. Para cualquier valor de n, la forma de cada sección transversal triangular es un triángulo equilátero.
3. Cada vez que n aumenta en uno, la arista de la base de la pirámide crece de manera lineal en uno.
4. Cada vértice de las secciones transversales triangulares representa un término a, b ó c.

Lo anterior permite establecer cuántos son los términos que están dentro de cada sección transversal triangular; veamos ahora cuales son y cómo se obtienen.

Partiendo de la lógica con que se forma el triángulo de Pascal, se construye la Pirámide Trinomial comenzando de arriba hacia abajo. Considere que cualquier término elevado a la cero potencia tiene como resultado uno y elevado a la potencia uno, el resultado es el mismo término, por lo tanto no hay problema para resolver el trinomio cuando se eleva a éstas potencias. Con la técnica propuesta se determina el resultado cuando la potencia n es mayor o igual a dos. Para encontrar los términos que están en el interior de la pirámide se considera que el término o coeficiente en un nivel inferior de la pirámide está formado por los tres que se encuentran exactamente por encima de él. Por analogía con el triángulo de Pascal se infiere que en cada sección transversal triangular la suma de los términos que la forman es 3^n, lo que nos permite comprobar que los términos que componen la sección son correctos. A continuación, para determinar los términos faltantes, se sobreponen secciones transversales triangulares determinadas por n=2 y n=3 (Figura 6) y las establecidas por n=3 y n=4 (Figura 7).

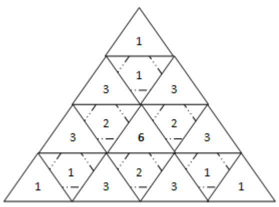

Figura 6 Determinación de los coeficientes interiores para la sección n = 3

Como se observa en la figura 6 el número seis que se encuentra remarcado en negrita, se obtiene sumando los términos que se encuentran sobre de él $(2+2+2)$, los términos restantes en el mismo nivel se obtienen de la misma manera, sin embargo éstos resultan conocidos porque están formados por el triángulo de Pascal que se encuentra en cada cara de la pirámide.

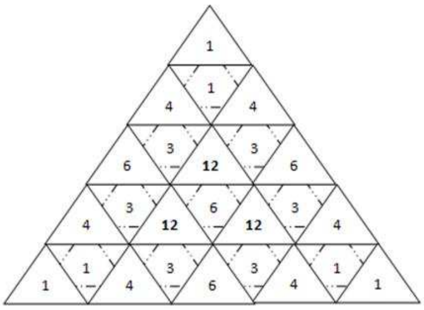

Figura 7 Determinación de los coeficientes interiores para la sección n = 4

De la misma manera, como se observa en la figura 7, el coeficiente 12 se obtiene de sumar los términos que se encuentran en el nivel inmediato superior de la pirámide $(3+3+6)$. De la misma forma, con la superposición de secciones transversales triangulares se van obteniendo los coeficientes faltantes para los niveles inferiores. En las figuras 8 y 9 se muestran los coeficientes interiores de cada sección transversal triangular que corresponden a un trinomio elevado a la cinco, seis y siete potencia respectivamente.

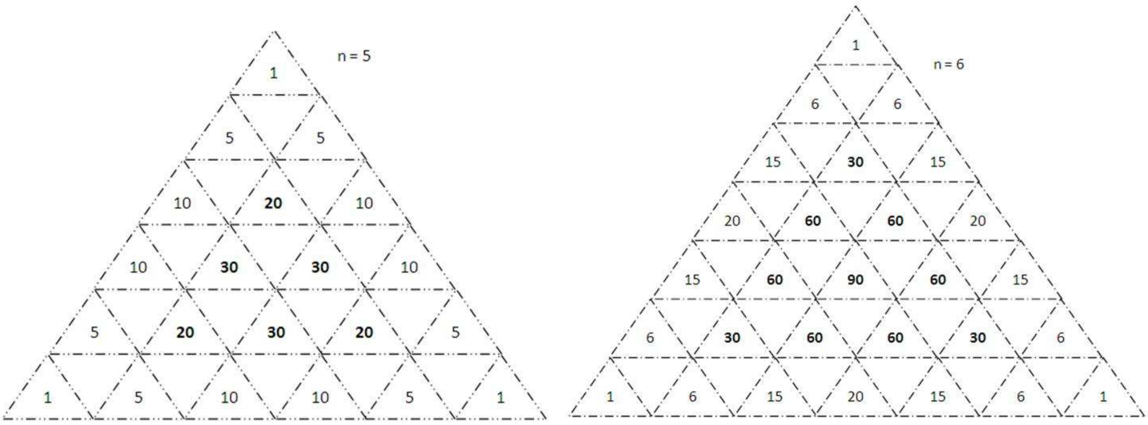

Figura 8 Coeficientes interiores para las secciones n = 5 y n = 6

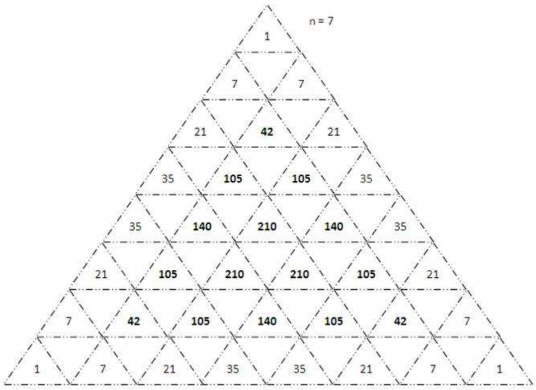

Figura 9 Coeficientes interiores para la sección n = 7

Una vez resueltas las preguntas cuántos términos hay en cada nivel y como se forman, viene otra pregunta ¿cuál es el orden que deben tomar los exponentes? Para responder está pregunta, se considera que todos los términos del polinomio resultante están formados por el producto de los coeficientes (nivel correspondiente de la pirámide) por abc con su respectivo exponente.

Para determinar los exponentes en cada uno de los términos a, b y c debemos considerar que su suma es igual a n, y que crecen desde cero hasta n en la expresión final del polinomio. La forma en que crecen o decrecen los exponentes es convencional y el manejo de las secciones transversales triangulares ayuda a determinar el respectivo exponente de a, b y c en cada término del polinomio. Como se observa en la figura 10 la dirección del crecimiento de los exponentes en cada término puede determinarse siguiendo el sentido de las manecillas del reloj o el contrario, conservando para cada término la misma dirección. Primero se determina la dirección para que crezcan los exponentes de a yendo de un vértice a otro en la sección, y en donde termina su crecimiento es el comienzo del segundo (b) siguiendo el mismo principio para determinar los exponentes de b y c, terminando este último donde comenzó el primero (a). Se debe considerar siempre que los exponentes crecen de la base o lado al vértice opuesto, según se marcó la dirección del crecimiento, tomando el exponente en cada uno de los términos formados por los coeficientes de la base valores de n=0, y en el vértice opuesto el valor de n para cada término alternadamente.

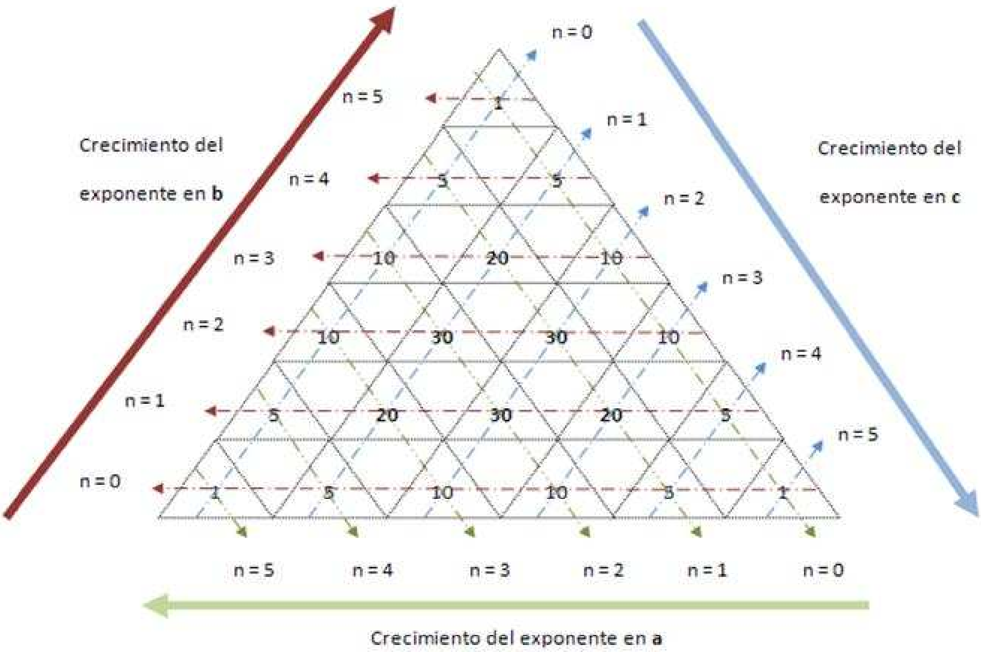

Figura 10 Asignación de exponentes para los términos del trinomio

Haciendo uso de la figura 10, a continuación se presenta la solución de un trinomio de la forma $(a + b + c)^5$. Se comienza por identificar los coeficientes que están en la base, de izquierda a derecha, y se asciende línea a línea hasta llegar al término que está en la cima del triángulo; este orden sólo será para no olvidar algún término, aunque no influya en el resultado final. A continuación se colocan los términos abc en todos los coeficientes de la sección triangular, como se muestra:

$$abc + 5abc + 10abc + 10abc + 5abc + abc + 5abc + 20abc + 30abc + 20abc + 5abc + 10abc + 30abc + 30abc + 10abc + 10abc + 20abc + 10abc + 5abc + 5abc + abc$$

Para determinar los exponentes en cada uno de los términos, se debe considerar que la suma de ellos es igual a n, en este caso particular $n = 5$; los exponentes de cada término se determinan siguiendo las flechas punteadas como se ve en la figura 10, donde cada coeficiente que está en la sección transversal triangular tiene una intersección de tres flechas y cada una de ellas indica con su dirección el exponente (valores de n) de ese término. A continuación se asignan los exponentes para cada uno de los términos. En el caso del primer término, el exponente de a es 5, el de b es 0 y el de c es 0 también, para el segundo término el exponente de a es 4, b es 0 y c es1 y así sucesivamente como se muestra en la siguiente ecuación:

$$1a^5b^0c^0 + 5a^4b^0c^1 + 10a^3b^0c^2 + 10a^2b^0c^3 + 5a^1b^0c^4 + 1a^0b^0c^5 + 5a^4b^1c^0 + 20a^3b^1c^1 + 30a^2b^1c^2 + 20a^1b^1c^3 + 5a^0b^1c^4 + 10a^3b^2c^0 + 30a^2b^2c^1 + 30a^1b^2c^2 + 10a^0b^2c^3 + 10a^2b^3c^0 + 20a^1b^3c^1 + 10a^0b^3c^2 + 5a^1b^4c^0 + 5a^0b^4c^1 + 1a^0b^5c^0$$

Simplificando se obtiene el siguiente resultado:

$$a^5 + 5a^4c + 10a^3c^2 + 10a^2c^3 + 5ac^4 + c^5 + 5a^4b + 20a^3bc + 30a^2bc^2 + 20abc^3 + 5bc^4 + 10a^3b^2 + 30a^2b^2c + 30ab^2c^2 + 10b^2c^3 + 10a^2b^3 + 20ab^3c + 10b^3c^2 + 5ab^4 + 5b^4c + b^5$$

Para comprobar que los coeficientes de la sección son correctos, se calcula el valor 3^n y el resultado es la suma de estos, como se presenta a continuación:

$$3^n = \sum Coeficientes\ de\ la\ sección\ transversal\ triangular$$
$$3^5 = 243$$

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 + 5 + 20 + 30 + 20 + 5 + 10 + 30 + 30 + 10 + 10 + 20 + 10 + 5 + 5 + 1 = 243$$

La técnica propuesta es útil cuando el trinomio está formado por variables, constantes o ambos, independientemente del signo de cada término.

Una manera de simplificar la técnica, es considerar que los coeficientes que se encuentran en las aristas de la sección transversal triangular son los mismos coeficientes del triángulo de Pascal, y que los exponentes en cada una de las aristas es cero para cada término a, b, c alternadamente. Utilizando el mismo ejemplo del trinomio de la forma $(a + b + c)^5$, al comenzar con los coeficientes de las aristas se obtiene:

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 + 5b^4c + 10b^3c^2 + 10b^2c^3 + 5bc^4 + c^5 + 5ac^4 + 10a^2c^3 + 10a^3c^2 + 5a^4c$$

Con este planteamiento se disminuye el número de coeficientes al que hay que asignar exponentes, por lo tanto hay que verificar solamente los exponentes en los seis coeficientes interiores que están formados por el producto de los términos a, b y c, sin olvidar que la suma de los exponentes tiene que ser igual a n, en este caso en particular, $n = 5$.

Finalmente, en todas las secciones transversales triangulares se observa igualdad en algunos coeficientes del centro a cada uno de los vértices por lo que no hay que saber a qué vértice pertenecen, por lo que la siguiente parte del procedimiento es:

$$20abc + 20abc + 20abc + 30abc + 30abc + 30abc$$

a la que solo falta colocar correctamente los exponentes. El razonamiento lógico es el siguiente: si los coeficientes 20 son los vértices del triángulo interior y pertenecen a la segunda línea, el exponente será uno en dos términos y el complemento de n corresponde al tercero alternadamente. Los coeficientes 30 están en la intersección de los exponentes dos para dos términos, por lo que el tercer término será el complemento para tomar el valor de n alternadamente, como se muestra a continuación:

$$20a^3bc + 20ab^3c + 20abc^3 + 30a^2b^2c + 30a^2bc^2 + 30ab^2c^2.$$

Teniendo en consideración todo lo anterior, el resultado final del trinomio es:

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 5ab^4 + b^5 + 5b^4c + 10b^3c^2 + 10b^2c^3 + 5bc^4 + c^5 + 5ac^4 + 10a^2c^3 + 10a^3c^2 \\ + 5a^4c + 20a^3bc + 20ab^3c + 20abc^3 + 30a^2b^2c + 30a^2bc^2 + 30ab^2c^2$$

Que ordenando

$$a^5 + 5a^4c + 10a^3c^2 + 10a^2c^3 + 5ac^4 + c^5 + 5a^4b + 20a^3bc + 30a^2bc^2 + 20abc^3 + 5bc^4 + 10a^3b^2 \\ + 30a^2b^2c + 30ab^2c^2 + 10b^2c^3 + 10a^2b^3 + 20ab^3c + 10b^3c^2 + 5ab^4 + 5b^4c + b^5$$

Se observa que los resultados son los mismos en ambos casos.

Otros trinomios que se podrían resolver son $(2x\text{-}y+9)^4$, $(y^2+5y\text{-}4)^3$ o $(8\text{-}4+2)^5$, este último en realidad es 6^5 sabiendo de antemano que el resultado es 7776, pero en este caso se resuelve como trinomio para demostrar que se obtiene el mismo resultado:

$$(8 - 4 + 2)^5 = (a + b + c)^5$$

Donde: $a = 8, b = -4\ y\ c = 2$

El resultado es:

$$a^5 + 5a^4 + 10a^3c^2 + 10a^2c^3 + 5ac^4 + c^5 + 5a^4b + 20a^3bc + 30a^2bc^2 + 20abc^3 + 5bc^4 + 10a^3b^2 \\ + 30a^2b^2c + 30ab^2c^2 + 10b^2c^3 + 10a^2b^3 + 20ab^3c + 10b^3c^2 + 5ab^4 + 5b^4c + b^5$$

$$(8)^5 + 5(8)^4(2) + 10(8)^3(2)^2 + 10(8)^2(2)^3 + 5(8)(2)^4 + (2)^5 + 5(8)^4(-4) + 20(8)^3(-4)(2) \\ + 30(8)^2(-4)(2)^2 + 20(8)(-4)(2)^3 + 5(-4)(2)^4 + 10(8)^3(-4)^2 + 30(8)^2(-4)^2(2) \\ + 30(8)(-4)^2(2)^2 + 10(-4)^2(2)^3 + 10(8)^2(-4)^3 + 20(8)(-4)^3(2) + 10(-4)^3(2)^2 \\ + 10(8)^2(-4)^3 + 20(8)(-4)^3(2) + 10(-4)^3(2)^2 + 5(8)(-4)^4 + 5(-4)^4(2) + (-4)^5$$

$$32768 + 40960 + 20480 + 5120 + 640 + 32 - 81920 - 81920 - 30720 - 5120 - 320 + 81920 + 61440 \\ + 15360 + 1280 - 40960 - 20480 - 2560 + 10240 + 2560 - 1024 = 7776$$

Conclusiones

La inclusión del modelo propuesto para resolver un trinomio elevado a la n en el estudio del algebra es factible, ya que facilita la obtención del resultado debido a que se cuenta con el número exacto de términos en la solución final mismos que se encuentran en cada sección de la pirámide trinomial.

El modelo propuesto es más fácil de utilizar para aquellos que ya utilizamos el triángulo de Pascal en la solución de un binomio elevado a la n, lo que proporciona una mejor comprensión, aplicación, enseñanza del mismo.

Este trabajo se realizó pensando en aquellos estudiantes que se desarrollan en el área socio administrativa y que manifiestan cierto temor al estudio del Algebra, siendo un modelo geométrico, que demanda lógica y creatividad en la persona que lo aplica es una alternativa en las estrategias de enseñanza.

Bibliografía

Baldor, A. (2007). *Algebra*. Segunda edición, ed. Grupo editorial patria, 376-388.

Chapell, J., Osler, T. (1999): The Trinomial triangle. *The College Mathematics Journal*. Vol. 30, N°. 2, 141-142.

Gómez Sánchez, D.; Romo Orozco, J.; Gómez Sánchez, A. (2010): Patrones de solución de polinomios y reglas de conteo: Aplicación a un polinomio elevado a la cuarta. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* UNION, Número 21, 31-36.

Huang, Y. (1995): *The Trinomial Theorem*. Recuperado el 22 de febrero de 2009, de: http://staff.washington.edu/znuwu/tritheo/theorem.htm

Kalamazoo College, (2009): Trinomial Shape. Recuperado el 22 de febrero de 2009 de: http://max.cs.kzoo.edu/~jmaker/thoughts/trinomial.html.

Zeitler, H. (2002): Trinomial formula, Pascal-and Sierpinski-pyramid. *International Journal of Matehematical Education Science & Technology*, Vol. 33, Tomo 2, 256-266.

David Gómez Sánchez. Nació en Cd. Fernández, San Luis Potosí, México en 1980, egresado de la carrera de Ingeniero Mecánico Electricista, de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP), y estudió la Maestría en Administración en la misma Universidad. Actualmente es Profesor Investigador de Tiempo Completo en la Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media de la UASLP. **david.gomez@uaslp.mx**

Adoración Gómez Sánchez. Nació en Cd. Fernández, San Luis Potosí, México en 1978, es Ingeniera Civil por la UASLP y Doctora Ingeniera de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad Politécnica de Madrid. Actualmente es docente en la carrera de Ingeniero Civil de la Unidad Académica Multidisciplinaria de la Unidad Zona Media, UASLP. **adoracion@uaslp.mx**

Ramón Gerardo Recio Reyes. Nació en Saltillo Coah., México el 19 de septiembre de 1952, egresado de la carrera de Ingeniero Geólogo, de la UASLP, estudió la Maestría y el Doctorado en Administración en la misma Universidad. Actualmente es Profesor Investigador de Tiempo Completo en la Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media de la UASLP. **reciog@uaslp.mx**