UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 127-139
ISSN: 1815-0640

La resolución de problemas para construir conocimiento matemático curricular

Romà Pujol Pujol; Lourdes Figueiras Ocaña; Jordi Deulofeu Piquet

Resumen

Destacamos algunas posibilidades que la resolución de problemas tiene en la enseñanza de la matemática en la etapa secundaria. A partir de un problema profundizamos en la construcción de conocimiento matemático curricular.

Abstract

We emphasize some possibilities that problem-solving has in mathematics teaching at secondary school. From a problem we deepen the construction of curricular mathematical knowledge.

Resumo

Destacamos algumas possibilidades que a resolução de problemas tem no ensino da matemática na etapa secundária. A partir de um problema aprofundamos na construção de conhecimento matemático curricular.

1. Introducción

Niños, adolescentes y adultos tropezamos en nuestro día a día con acontecimientos que, en ocasiones, percibimos como situaciones de difícil salida. Para afrontarlos, una vez vislumbrada la demanda, no disponemos de algoritmo, fórmula, proceso o rutina alguna que brinde una vía directa a su resolución; nos referimos a dichos episodios con el término problema.

Es razonable esperar a lo largo de la vida topar con aprietos que requieren la toma de decisiones bajo determinadas condiciones. Afrontar dificultades, aventurar actuaciones, convivir con errores y corregir las posiciones adoptadas es apremiante si aceptamos que la educación debe incidir en el desarrollo creativo y afectivo de todo ciudadano. Por otra parte, un justo dechado de contenidos curriculares es necesario para la formación del discente que pretende proseguir sus estudios.

Experimentar y observar para favorecer el descubrimiento de patrones, regularidades e invariantes facilita el descubrimiento de resultados plausibles que se basan en nuestra experiencia e intuición. Provocar el descubrimiento de resultados que toman su fuerza en el sentido común, llamados conjeturales, una parte de los cuales puedan, posteriormente, ser refutados, fuerza al estudiante a convivir con el error y, además, reclama la consolidación, prueba o demostración de aquéllos que no permiten, con facilidad, atinar con un contraejemplo que los invalide. Desde este punto de vista la enseñanza de la matemática puede facilitar entornos de aprendizaje útiles para todo discente. Además, para aquellos estudiantes que cultivan la matemática con intención propedéutica, los conocimientos adquiridos dispondrán de un significado que no se limitará sólo a los resultados finales conseguidos.

> La cuestión de la calidad debe contemplarse teniendo en cuenta la manera en que las distintas sociedades definen la finalidad de la educación. En la mayoría de ellas se plantean dos objetivos principales: el primero estriba en garantizar el desarrollo cognitivo de los educandos; el segundo en hacer hincapié en que la educación estimule su desarrollo creativo y afectivo para que puedan adquirir valores y actitudes que les permitan ser ciudadanos responsables.
>
> (UNESCO, 2005, p. 5)

Asimismo, entre la enseñanza que brindamos y el aprendizaje del que finalmente se adueña el discente se establece una vía que, como en todo proceso de comunicación, padece hasta cierto punto de una razonable pérdida. Pretender que el receptor recaude la totalidad de la información recogida en los mensajes emitidos es deseable; utópico es suponerlo.

Focalizamos la atención en una propuesta que se desprende de la resolución de un problema. Veremos que, adicionalmente a la participación que pueda tener en el desarrollo creativo del estudiante, brinda otro cognitivo a través de la construcción de algunos resultados matemáticos. La visión retrospectiva en la resolución del problema sugerida por Pólya (1987) facilita, por una parte, la obtención de la fórmula que permite calcular la suma de los primeros términos de una progresión aritmética. Por otra posibilita negociar la terminología utilizada para denotar los números negativos e introducir el número entero desde un enfoque que, en la actualidad, es llamado deductivo. Adicionalmente permite establecer un “puente didáctico” entre los primeros pasos de la matemática escolar por el número negativo y la presentación axiomática del conjunto de los números enteros.

Las dos finalidades descritas por la UNESCO (2005, p. 5), relativas a la calidad de la educación orientan la propuesta de enseñanza que mostramos en las líneas siguientes puesto que proponemos una construcción de conocimiento matemático que participa del desarrollo cognitivo a través de entornos de aprendizaje que inciden en el creativo.

2. Interés didáctico de los enunciados incompletos

Griggs (1991, p. 442) recupera el problema de los números consecutivos a partir de la definición de número “educado”, utilizada en el número 24 de la revista Sesame de Open University, posteriormente retomada por Adams (1993). Llama “educado” a un número natural que puede ser escrito en forma de suma de dos o más números naturales. Esta delimitación del campo numérico sugiere un enunciado como el siguiente:

¿*Cuáles son los números naturales que se pueden expresar como la suma de dos o más números naturales*?

Esta formulación no deja lugar a dudas sobre los números que participan en el juego. Sin embargo los encargos, mandatos o cometidos con los que nos codeamos en nuestra vida cotidiana son a menudo imprecisos. Pólya (1966, min. 18) abogó por dicha proximidad con nuestro día a día a través de enunciados incompletos. Desde este punto de vista el enunciado podría concederse como sigue:

¿*Qué números se pueden expresar como suma de consecutivos*?

Con este interrogante abarcamos el estudio de los números naturales que se pueden expresar como suma de dos o más números naturales, tal como se formula en el primer enunciado; sin embargo dejamos abiertas otras posibilidades. No se excluye que un número natural pueda ser interpretado como un entero positivo y expresado como suma de dos o más enteros, sean éstos positivos o negativos. El segundo enunciado, formulado a partir de la sugerencia de George Pólya, no quita la posibilidad de indagar qué números enteros, positivos o negativos, se pueden expresar como la suma de enteros consecutivos, positivos o negativos. Esta segunda formulación del problema armoniza más con la imprecisión de nuestra realidad cotidiana.

Algunos números pueden aceptar más de una descomposición como suma de números consecutivos, tal vez sólo una, o quizá ninguna. Algunas descomposiciones pueden tener una u otra cantidad de sumandos; tampoco se descarta a partir del enunciado la posibilidad de aceptar que todo número se pueda considerar como la suma de un solo sumando, es decir, el mismo número. Un enunciado incompleto requiere concretar y precisar lo que se aborda en cada momento pero, además y gracias a su imprecisión, sugiere nuevas preguntas. Consideremos un determinado número, ¿cuántos sumandos tienen sus descomposiciones?, ¿existe alguna relación entre dicha cantidad de sumandos y el número que pretendemos descomponer?

No todos los números tienen por qué admitir la misma cantidad de descomposiciones como suma de consecutivos. Adams (1993), siguiendo la nomenclatura rescatada por Griggs (1991), dice que un número tiene “educación 0” si no admite descomposición alguna. En la misma línea llamaremos “p–educado” o que tiene “educación p” a todo número que admite p descomposiciones como suma de números consecutivos. Con esta jerga no pretendemos en ningún caso abandonar la esencia del problema. Pero si ello facilita que un solo individuo se sume al juego habrá cumplido su cometido. ¿Tal vez usted haya decidido hojear, ni que sea en diagonal, este texto por la curiosidad que entraña el título? En cualquier caso una nueva pregunta ha asomado: ¿Cuántas descomposiciones como suma de números consecutivos admite un número? O, expresado de otra forma, ¿cuán educados son los números?

3. Regularidades numéricas

Este problema de los números consecutivos sugiere preguntas y fomenta el juego, el descubrimiento y, en general, el trabajo intelectual con los números y con la propia imaginación. La suma de tres, cinco o siete naturales consecutivos resulta múltiplo de tres, cinco o siete, respectivamente; ¿será este patrón siempre cierto? La experimentación muestra que dicha regularidad no se mantiene ante la suma de dos, cuatro o seis números naturales consecutivos, puesto que los resultados no son siempre múltiplos de dos, cuatro o seis respectivamente. Sin embargo, la suma de dos naturales consecutivos parece que siempre es impar, la suma de cuatro múltiplo de dos, la suma de seis múltiplo de tres... Con Mason et al. (1988, p. 92), formular, comprobar y modificar conjeturas son procesos que constituyen la espina dorsal de la resolución de un problema. Además de los descubrimientos mencionados, la experimentación puede revelar que las potencias de dos no se pueden expresar como suma de dos o más números naturales consecutivos.

Examinar la cantidad de sumandos de las descomposiciones puede sugerir una conexión con los divisores del número que pretendemos descomponer; pero ello no siempre es cierto. Mientras 15=4+5+6 admite una descomposición con tres sumandos, siendo 3 un divisor de 15, o con cinco sumandos, 15=1+2+3+4+5, siendo 5 un divisor de 15, también admite una con dos sumandos, 15=7+8, pero 2 no es un divisor de 15.

El recuento de la cantidad de sumandos de las descomposiciones conduce a un procedimiento que faculta la obtención de descomposiciones de un número en suma de números consecutivos a partir de sus divisores impares. Así, 15=3•5=5+5+5=3+4+5, o también 15=5•3=3+3+3+3+3=1+2+3+4+5. Pero, ¿permite este procedimiento lograr todas las descomposiciones de un número como suma de números consecutivos? Parece que no, pues 15=7+8, pero 2 no es un divisor impar; ¡nuestro gozo en un pozo!

4. Consolidación de resultados conjeturales

El resultado conjetural conquistado, relativo a que toda descomposición de un número como suma de consecutivos tiene tantos sumandos como alguno de sus divisores, ha sido batido por un contraejemplo. Es necesario reconocer el conocimiento que sólo se ampara en evidencias basadas en nuestra intuición y sentido común. ¿Qué nos hace pensar que los demás resultados obtenidos no perecerán de forma parecida? Consolidar, solidificar, probar o demostrar los resultados conjeturales debería convencer al receptor a partir de razonamientos y premisas transparentes para el discente. Una nomenclatura enrevesada debe ser evitada. Con Halmos (2006, p. 72), la mejor notación es la ausencia de notación; siempre que podáis evitar usar un complicado sistema alfabético, ¡evitadlo!

La finalidad de la demostración es pues convencer y satisfacer. Además, con Pujol et al. (2007), la necesidad de dar rigor quedará justificada cuando el alumno conjeture propiedades que él ha descubierto, que él ha defendido y que también él ha refutado. Si todos los resultados que la experimentación facilita son confirmados por experimentaciones más extensas, es difícil que el estudiante constate la necesidad de demostrar.

Griggs (1991), a partir de la fórmula que permite obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética, demuestra que toda suma de consecutivos tiene por resultado un número con un factor impar. Acto seguido considera un número con un factor impar mayor o igual a 3 y encuentra, también a partir de dicha fórmula, el primero y la cantidad de números consecutivos que tienen por suma el número considerado. Los llamados números educados por Griggs (1991) son llamados amables por Holton (2008). A pesar de la diferencia terminológica, este último autor se basa en el mismo resultado para demostrar que para que un número no sea amable, la condición necesaria y suficiente es que sea una potencia de dos.

Conocida la suma de los primeros términos de una progresión aritmética y supuesta una cierta competencia con el trabajo algebraico dichas demostraciones son incuestionables. Sin embargo la fórmula enmascara la transparencia y difumina la elegancia de la demostración puesto que, con Puig Adam (1960, p. 95), su uso no enseña precisamente a urdir, que es lo educativo. Los argumentos matemáticos que se derivan de la misma convierten el resultado en incuestionable, pero la demostración difícilmente pueda cautivar al oyente o al lector que perciben su uso con molestia. Compartimos que ciertas rutinas pueden ser necesarias, aunque no como un fin en sí mismo, pero, ¿es necesaria la fórmula que permite obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética para demostrar los resultados conjeturales obtenidos?

5. Analogía con un problema histórico

Adams (1993), continuando la posición iniciada por Griggs (1991), define la educación de un número natural como el número de formas en que dicho número puede ser expresado como suma de números naturales. En su estudio obtiene, también a partir de la fórmula que permite obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética, un método que permite medir la educación de un número natural. En particular obtiene que las potencias de dos son los números con educación 0, 0–educados o, si se nos permite, mal educados.

Supongamos en este apartado el problema dirigido a alumnos familiarizados con el número entero y revisemos lo realizado bajo este punto de vista. Tomemos las descomposiciones del 15 que se desprenden de la aplicación del procedimiento anteriormente expuesto y que detallamos en el caso concreto siguiente:

15=1•15=15

15=3•5=5+5+5=3+4+5

15=5•3=3+3+3+3+3=1+2+3+4+5

15=15•1=1+…$^{15)}$+1=(–6)+(–5)+(–4)+(–3)+(–2)+(–1)+0+1+2+3+4+5+6+7+8=7+8

Para cada divisor impar obtenemos una descomposición de dicho número como una suma de tantos números enteros consecutivos como indica el divisor impar considerado. Para ello hemos aceptado que el 15 es suma de un sumando, el mismo número. E inmediatamente nos asalta una pregunta, ¿toda suma de números enteros consecutivos tiene por resultado un número entre cuyos divisores se encuentra la cantidad de sumandos?

Consideremos una suma de números consecutivos con una cantidad impar de sumandos. Aplicando el procedimiento de descomposición en sentido inverso al utilizado hasta este momento, dicha suma se puede convertir en otra con la misma cantidad de sumandos, pero iguales; dicha cantidad de sumandos divide la suma. Veamos tres ejemplos:

4+5+6+7+8=6+6+6+6+6=5•6=30. Y 5 divide 30.

(–2)+(–1)+0+1+2+3+4+5+6=2+…9)+2=9•2=18. Y 9 divide 18.

(–10)+(–8) +…7) + (–4)+(–3)= (–6)+…7) +(–6)=7•(–6)=–42. Y 7 divide (–42).

Atendamos a continuación una suma de números consecutivos con una cantidad par de sumandos. Con números naturales un adecuado razonamiento muestra que la suma de los dos números consecutivos centrales es un factor impar del resultado, cuando la suma se presenta ordenada. Sin embargo, con números enteros dicha suma puede ser convertida en otra de números consecutivos con una cantidad impar de sumandos, ¿cómo? Sólo falta añadir (o quitar) el cero y los números necesarios para que siga tratándose de una suma de números consecutivos equivalente, es decir, sin que varíe el resultado. En virtud de lo expuesto, la cantidad impar de sumandos divide la suma. Veamos tres ejemplos:

$3+4=(-2)+(-1)+0+1+2+3+4=1+\ldots 7)+1=7 \bullet 1=7$. Y 7 divide 7.

$1+2+3+4=0+1+2+3+4=2+\ldots 5)+2=5 \bullet 2=10$. Y 5 divide 10.

$(-3)+(-2)=(-3)+(-2)+(-1)+0+1+=(-1)+\ldots 5)+(-1)=5 \bullet (-1)=-5$. Y 5 divide (-5).

Ampliar el campo numérico a los números enteros nos ha permitido ver que:

1. Toda suma de números enteros consecutivos se puede expresar como otra con una cantidad impar de sumandos. Su resultado es el producto de la cantidad de sumandos por el número que está situado en el centro de la suma, cuando la expresamos ordenada. Tiene pues un divisor impar y, ¡no es una potencia de 2!

2. Todo número entero que no es una potencia de 2 tiene un divisor impar. Es expresable pues como una suma de números iguales con una cantidad impar de sumandos. También se puede expresar como una suma de números enteros consecutivos con tantos sumandos como indique uno de sus divisores impares. Tal vez la cancelación de términos conduzca finalmente a una suma con una cantidad par de sumandos.

Así pues, todo número entero admite tantas descomposiciones como suma de números consecutivos como divisores impares tiene. Un nuevo problema se ha gestado: ¿cuántos divisores tiene un número? Y, más concretamente, ¿cuántos divisores impares?

Con el fin de obtener todas las descomposiciones de un número natural como suma de consecutivos hemos ampliado el campo numérico a los enteros para, una vez obtenidas, retornar a los naturales. Como apunta Josep Pla (2006, p. 411), Rafael Bombelli se percató de que la ecuación $x^3-15x-4=0$ no se puede resolver haciendo uso de la expresión general que permite resolver toda cúbica de la forma $x^3+px+q=0$, si limitamos el campo numérico a los números reales. Sin embargo, aceptar nuevos números, en la actualidad llamados complejos, le condujo a tres raíces reales; una de ellas es $x=4$. Nos encontramos pues ante una analogía con un problema histórico pero, mientras Bombelli se introduce en los números complejos para obtener soluciones reales, nosotros nos introducimos en los enteros para obtener descomposiciones de números naturales. La propuesta conduce pues a una ampliación del campo numérico análoga, pero más sencilla, que la vivida por Rafael Bombelli.

La fórmula que permite sumar los primeros términos de una progresión aritmética no nos ha sido necesaria para consolidar los resultados conjeturales obtenidos; nosotros hemos optado por ampliar el campo numérico. Además, en el próximo apartado veremos que, a partir del problema de los números consecutivos, se puede obtener una vía para descubrir la fórmula que permite sumar progresiones aritméticas. Así pues, lo que era un resultado necesario para consolidar los descubrimientos logrados, se ha convertido en innecesario para, como veremos acto seguido, ¡ser construido a partir del propio problema!

6. Construcción de resultados útiles: suma de una progresión aritmética.

Según cuenta la leyenda, para sumar los números enteros del 1 al 100, Johann Carl Friedrich Gauss, a los siete años de edad, optó por escribir dicha suma dos veces pero poniendo el segundo sumando en orden inverso. Sumando término a término obtuvo el doble del resultado deseado; Andrey Nikolaevich Kolmogorov lo consiguió a los cuatro años de edad. Dicho procedimiento puede ser entendido por un estudiante pero requiere un punto de genialidad para ser descubierto. Con Pólya (1966, min. 2, 3), Si aceptamos que enseñar es dar la oportunidad a los estudiantes de que descubran cosas por sí mismos, tal vez éste no sea el punto de partida más acertado.

Supongamos conocido y estudiado el problema de los números consecutivos. Nos proponemos a continuación obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética a partir del razonamiento ya realizado. Para ello suponemos una cierta familiaridad con las progresiones aritméticas, pero no con la fórmula que permite obtener la suma de sus primeros términos.

Puesto que del 1 al 100 hay una cantidad par de sumandos, convertimos dicha suma en su equivalente con una cantidad impar, esto es, 0+1+2+…+99+100. El procedimiento de descomposición permite convertir dicha suma en otra de 101 sumandos iguales:

$$0+1+2+\ldots+99+100=50+50+\ldots+50+50=101\cdot 50=5050.$$

Nos proponemos a continuación sumar la siguiente progresión aritmética:

$$1+3+5+\ldots+999.$$

Puesto que su diferencia es 2 puede ser escrita como:

$$(2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1)+\ldots+(2\cdot 500-1).$$

Sumamos 500 veces 1 obteniendo 2•1+2•2+2•3+…+2•500.

Dividimos por 2 obteniendo 1+2+3+…+500.

Esta suma de números consecutivos con una cantidad par de sumandos puede ser convertida en otra con una cantidad impar, sólo falta añadir el 0.

El procedimiento utilizado en el problema facilita expresar dicha suma como otra con 501 sumandos iguales:

$$1+2+3+\ldots+500=0+1+2+3+\ldots+500=250+250+250+250+\ldots^{501)}+250=501\cdot 250=125250.$$

Finalmente rehacemos las modificaciones preliminares multiplicando este resultado por 2 y restando 500 para obtener el resultado deseado, es decir, 250000.

Acto seguido vamos a sumar la siguiente progresión aritmética:

$$4+7+10+13+\ldots+100+103.$$

Puede ser escrita como:

$$(3\cdot 1+1)+(3\cdot 2+1)+(3\cdot 3+1)+(3\cdot 4+1)+\ldots+(3\cdot 33+1)+(3\cdot 34+1).$$

Restamos 34 veces 1 obteniendo 3•1+3•2+3•3+3•4+…+3•33+3•34.

Dividimos por 3 obteniendo 1+2+3+…+34.

Esta suma de números consecutivos con una cantidad par de sumandos puede ser convertida en otra con una cantidad impar, sólo falta añadir el 0.

El procedimiento utilizado en el problema de los consecutivos facilita expresar dicha suma como otra con 35 sumandos iguales, tal como mostramos a continuación:

$$1+2+3+\ldots+34=0+1+2+3+\ldots+34=17+17+17+17+\ldots^{35)}+17=35\bullet 17=595.$$

Para acabar rehacemos las modificaciones preliminares multiplicando este resultado por 3 y sumando 34 para obtener el resultado deseado, es decir, 1819.

Vamos a continuación a sumar los n primeros términos de la progresión aritmética que tiene por primer término a_1 y por diferencia d, es decir:

$$a_1+(a_1+d)+\ldots+(a_1+(n-1)d).$$

Restando n veces a_1 obtenemos $0+d+2d+\ldots+(n-1)d$ y dividiendo por d obtenemos $0+1+2+\ldots+(n-1)$.

Si n es impar consideramos la suma $0+1+2+\ldots+(n-1)$, para que tenga una cantidad impar de sumandos; si n es par consideramos $1+2+\ldots+(n-1)$ por el mismo motivo.

Para el primer caso el procedimiento permite convertir la suma en n sumandos iguales: $0+1+2+\ldots+(n-1)=(n-1)/2+\ldots n)+(n-1)/2=n(n-1)/2$. Para el segundo caso convertimos la suma en otra con una cantidad impar de sumandos y, a continuación, el procedimiento permite convertir la suma en: (n–1) sumandos iguales:

$$0+1+2+\ldots+(n-1)=1+2+\ldots+(n-1)=(n/2)+\ldots n-1)+(n/2)=n\bullet(n-1)/2.$$

Falta sólo rehacer las modificaciones preliminares multiplicando este resultado por d y sumando n veces a_1 para obtener el resultado deseado:

$$d\bullet n(n-1)/2+n\bullet a_1=(n/2)(d(n-1)+2\,a_1)=(a_1+a_n)n/2.$$

La expresión que nos permite obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética no sólo no es necesaria en la resolución del problema de los consecutivos sino que, además, se puede obtener a partir del mismo.

7. Incorporación de nuevos números: ampliación del campo numérico.

Conocido el problema de los consecutivos limitemos inicialmente el campo numérico a los naturales. Ello lo hacemos con la pretensión de añadir nuevos números cuando éstos sean requeridos por el procedimiento de descomposición expuesto anteriormente y que suponemos ahora conocido. La terminología con la que denotaremos los nuevos entes no la supondremos conocida y sugeriremos su negociación.

Buscar descomposiciones del número 14 nos conduce a expresarlo como la suma de siete sumandos iguales. El procedimiento de descomposición desemboca en la necesidad de admitir un ente que no es un número natural y que, en virtud de la propuesta realizada, debemos aceptar como un nuevo número si queremos obtener la descomposición deseada, como se puede visualizar en la Figura 1.

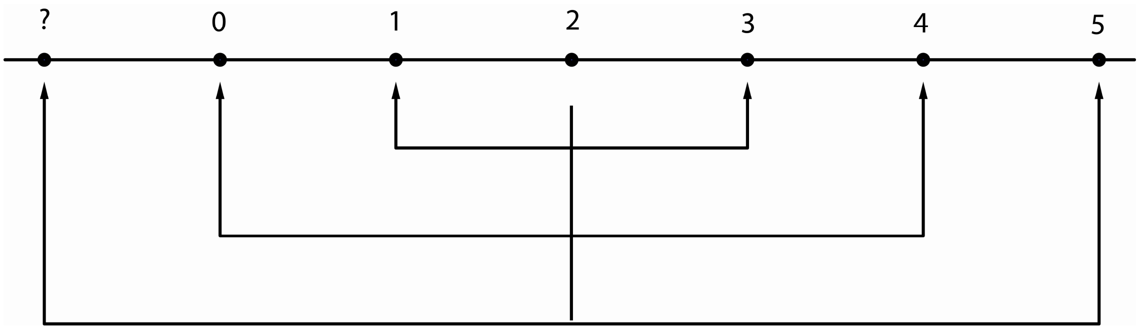

Figura 1. El número 14 se puede escribir como la suma de siete doses. En el gráfico se muestra como se puede convertir dicha suma en otra de números consecutivos en la que uno de ellos es un ente que debemos aceptar como número si queremos obtener la descomposición deseada.

El número que hemos denotado por "?" nace para conseguir una descomposición del 14 como suma de números consecutivos a partir del procedimiento descrito, pero no proviene de representar cosas reales y concretas, como apunta Félix Klein (1927, pp. 32–33). La palabra número tiene, pues, en cada una de las sucesivas fases de la aritmética significado cada vez más amplio.

Las operaciones con números naturales tienen una correspondencia inmediata con acciones empíricas conocidas: sumar con añadir, restar con quitar, multiplicar con añadir repetidas veces una misma cantidad y dividir con repartir una cantidad en partes iguales. Pero este nuevo número se añade a los naturales sin mantener la misma transparencia. Con Rey Pastor (1976, p. 85), será preciso definir las operaciones fundamentales pero no lo haremos arbitrariamente, sino, de tal modo, que las operaciones conocidas para los números naturales queden incluidas en las nuevas definiciones como caso particular. Si estas nuevas definiciones diesen resultados distintos a las antiguas, la aritmética construida sería contradictoria consigo misma.

Sumar a un número natural otro produce un desplazamiento hacia la derecha en la recta numérica de tantas unidades como indica el número sumado; restar produce un desplazamiento a la izquierda. Extender este comportamiento al nuevo número que se requiere en la descomposición del 14 sugiere una negociación sobre la terminología con la que lo vayamos a denotar: ?+1=0, ?+2=1, ?+3=2, … Con números naturales el orden de los sumandos no altera la suma. Si aceptamos que el nuevo número debería conservar esta propiedad entonces 1+?=0, 2+?=1, 3+?=2, … Vemos pues que sumar el nuevo número, denotado por ?, tiene un comportamiento equivalente a restar 1; ello sugiere denotarlo por –1.

El símbolo "–" recae pues en una polisemia que debe ser aclarada puesto que los números que llamamos negativos los denotamos con un símbolo que ya no tiene un significado exclusivamente emparentado con la acción quitar. Con González et al. (1990, p. 28) subrayamos que probablemente el término «negativo» provenga de ser utilizado para denotar los valores negados cuando se obtenían como raíces de una ecuación; situación distante de la introducción a través de modelos concretos propuesta en la actualidad.

Los nuevos números que incorporamos tienen un comportamiento diferente del conocido para los naturales. Por ejemplo, sumar –1 produce un desplazamiento a la izquierda de la recta numérica de una unidad. ¿Y restar –1?, por ejemplo: ¿2–(–1)? Si convenimos que dicha expresión debe tener sentido, su resultado es en principio desconocido; llamémosle x, es decir, 2–(–1)=x.

Extendemos la segunda noción común del primer libro de los Elementos de Euclides (si a cosas iguales añadimos cosas iguales los totales son iguales) al nuevo número y tenemos, 2–(–1)+(–1)=x+(–1), equivalentemente, 2=x–1; consecuentemente 2–(–1)=3. Así pues, si aceptamos que restar –1 tenga algún sentido, éste debe ser el mismo que sumar 1; hecho que denotamos por –(–1)=+1. En la recta numérica (–1) y 1 se visualizan opuestos con relación al origen, análogamente (–2) y 2, …, ¡buen motivo para llamarles opuestos!

Con Borel y Drach (1895, pp. 128–135) puesto que (–1) es un número que cuando lo sumamos se comporta como si restásemos 1 sabemos que 1+(–1)=0. Si aceptamos que estos nuevos números deben cumplir la propiedad distributiva, transparente para números naturales, entonces para todo entero a, a•(1+(–1))=0 o equivalentemente a+a•(–1) =0. Así pues a•(–1)=–a ya que es un número que cuando lo sumamos se comporta como si restásemos a. Consecuencia de extender la misma propiedad es que (–1)•((–1)+1)=0 y equivalentemente (–1)•(–1)+(–1)•1=0. Puesto que 1+(–1)•1=0, por el principio de cancelación de la adición, (–1)•(–1)=1. El comportamiento de las operaciones entre números enteros se desprende de la extensión a ellos de las conocidas propiedades para números naturales.

Esta introducción del número entero que se desprende del problema de los números consecutivos se corresponde con la que ha sido llamada “deductiva” por Arcavi y Bruckheimer (1981), posteriormente también por Cid (2003), y toma su fuerza en el principio de permanencia de las leyes formales.

> Al generalizar el concepto de número mediante definiciones por abstracción del nuevo concepto, pasaremos del natural al entero, de éste al racional, luego al real, y de aquí al complejo, de manera que puedan definirse operaciones de adición y multiplicación entre los nuevos entes que cumplan dichas reglas de cálculo antes establecidas. Éste es el llamado método genético, y en él se debe tomar como norma el principio de permanencia de las leyes formales, enunciado así por Hankel: «Al generalizar un concepto se debe tratar de conservar el mayor número de propiedades, y al nuevo concepto debe corresponder como caso particular el anterior».
>
> (Rey Pastor et al., 1969, p. 23)

La sucesión de notaciones que va descubriendo el alumno a lo largo de la enseñanza no debería consistir en una lista de símbolos y reglas impuestas para su utilización y manipulación. Las matemáticas tratan de problemas, y las técnicas específicas, los procedimientos, las fórmulas pero también las notaciones para denotar los números y las reglas que rigen las operaciones surgen de ellos.

> Las matemáticas proporcionan un medio de comunicación de la información conciso y sin ambigüedad porque hacen un uso amplio de la notación simbólica. Sin embargo es la necesidad de usar e interpretar esta notación y de entender las ideas y conceptos abstractos que le sirven de base, lo que resulta un escollo para mucha gente. En efecto, la notación simbólica que capacita a las matemáticas para que se usen

> como medio de comunicación y así ayuda a hacerlas «útiles», puede también hacer las matemáticas difíciles de entender y usar.
>
> (Cockcroft, 1985, p. 4)

Históricamente fue la necesidad de validez general de los métodos de resolución de ecuaciones a la que deben su existencia los números negativos, como apunta Hans Freudenthal (1983, p. 433). Posteriormente, con González et al. (1990, p. 33), fue Girard el primero que apreció el carácter algebraico-geométrico del negativo. No sólo tuvo en cuenta su validez algebraica sino que lo interpretó geométricamente: «Lo negativo en geometría indica un retroceso mientras que lo positivo es un avance». Si aceptamos la importancia de la historia de la matemática como eje vertebrador de su enseñanza, ¿no deberían los primeros pasos por el número negativo convivir con el pensamiento algebraico?

8. Conclusiones

En la actualidad la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas está propuesta en la mayoría de los currículos vigentes. Pero cuando decimos que debe poner el énfasis en la resolución de problemas caben, por lo menos, tres interpretaciones.

Enseñar para resolver problemas es uno de los cometidos de la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas que nadie pone en duda. Promover la experimentación, la observación, la búsqueda de patrones y regularidades, presentar resultados conjeturales y contrastarlos para desaprobarlos o aceptarlos con la intención de consolidarlos constituye tal vez el foco principal de la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas que, en nuestros días, es un propósito aceptado.

Enseñar sobre resolución de problemas es otra encomienda que permite acercar a los alumnos estrategias que faciliten el descubrimiento, la indagación y la invención: resolver un problema similar más sencillo, considerar casos particulares, dividir el problema en partes, variar las condiciones del problema, buscar un problema relacionado, examinar el problema desde un campo numérico más amplio, …

Enseñar a través de la resolución de problemas entendemos que toma su máxima autoridad cuando, además de facilitar el desarrollo creativo del discente, permite construir conocimiento matemático curricular. El problema de los números consecutivos lo hace con la suma de los primeros términos de una progresión aritmética. También ofrece una introducción deductiva de los números enteros que sugiere una negociación sobre la terminología que utilizamos para denotar los números negativos. Facilita incidir en la polisemia en la que recae el símbolo “–” así como obtener las reglas que rigen las operaciones entre números enteros. También, como se puede ver en Pujol (2008) faculta una introducción deductiva del conjunto de los números enteros que establece un “puente didáctico” con su presentación axiomática.

Griggs (1991) y Adams (1993) focalizan la atención en una enseñanza para resolver problemas, más concretamente, para resolver el problema de los números consecutivos. Derek Holton (2008) promueve el descubrimiento de regularidades que posteriormente consolida. Un cierto dechado de conocimientos previos es necesario para abordar el problema, pero no el resultado que permite obtener la suma de los primeros términos de una progresión aritmética. Tomamos estos ejemplos para mostrar que enseñar a través de la resolución de problemas es una empresa difícil. Hacer uso de resultados conocidos, visualizarlos o manipularlos es tal vez más frecuente, generarlos a partir de la resolución de problemas parece mucho más excepcional.

García Cruz (2002), refiriéndose a un artículo de M. Fernández, dice: «[…] me aventuré a indicar lo que creo suele olvidarse: la propuesta de problemas con el fin de elaborar una teoría, esto es, para explorar y aprender nuevos conceptos. En efecto, comentó, pese a ser eminentemente formativa, no es frecuente que se tenga en cuenta por el profesorado». Y nos preguntamos: si algunos contenidos curriculares no se elaboran a partir de la resolución de problemas, ¿cómo se introducen?, ¿tal vez algunos se instruyen para después ser aplicados para resolver problemas? ¿Conviven tal vez dos o más estilos de enseñanza algunos de los cuales facilitan el desarrollo creativo mientras que otros permiten “cumplir” con el currículo? Buscando algunas respuestas hemos hallado más preguntas…

La construcción de conocimiento matemático que se desprende del problema de los consecutivos fue descubierta a posteriori. Nuestra experiencia nos dice que tomar un determinado contenido curricular y buscar problemas que faciliten su construcción sólo será posible si, con anterioridad, la visión retrospectiva en la resolución de algún problema lo ha conseguido. La divulgación de la resolución de problemas no acostumbra a sintetizar qué contenidos curriculares pueden ser construidos por cada problema. Ésta parece, al menos en una cierta medida, una tarea pendiente.

Ayudas recibidas

Este artículo se ha realizado en el marco del proyecto EDU2009-07298 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación y el plan de actuación del grupo de investigación consolidado PREMAT (2009SGR364) de la Generalitat de Catalunya (España).

Bibliografía

Adams, K. (1993): How polite is x? *The Mathematical Gazette* 77(478), 79-80.

Arcavi, A.; Bruckheimer, M. (1981): How shall we teach the multiplication of negative numbers?. *Mathematics in School* 10(5), 31-33.

Borel, E.; Drach, J. (1895): *Introduction a l’étude de la Théorie des Nombres et de l’Algèbre Supérieure*. Librairie Nony, París.

Cid, E. (2003): *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Pre-publicaciones del seminario matemático García de Galdeano, Universidad de Zaragoza.

Cockcroft, W.H. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft.* Ministerio de Educación y Ciencia. Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado, Madrid.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an educational task.* Reidel Publishing Company, Dordrecht (Holanda).

García Cruz, J.A. (2002): *La didáctica de las matemáticas: una visión general.* RTEE, http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/rtee.htm

González et al. (1990): *Números enteros.* Síntesis, Madrid.

Griggs, Terry S. (1991): Impolite numbers. *The Mathematical Gazette* 75(474), 442-443.

Halmos, P. (2006): Com cal escriure en matemàtiques. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 21(1), 53-79.

Holton, D. (2008): What VIEW of mathematics should we learn at school? *Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI,* Rome.

Klein, F. (1927): *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, vol. 1. Madrid: [s.n.].

Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (1988): *Pensar matemáticamente.* Labor, Barcelona.

Pla i Carrera, J. (2006): *Introducció a la metodologia de la matemàtica.* Publicacions i edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona.

Pólya, G. (1966): *Teaching us a lesson;* MAA Video Classics. The Mathematical Association of America.

Pólya, G. (1981): Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving. Wiley, New York.

Pólya, G. (1987): Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, México.

Puig Adam, P. (1960): *La Matemática y su enseñanza actual.* Ministerio de Educación Nacional, Madrid.

Pujol, R. (2008): *Una reconsideració dels nombres enters per a l'ensenyament postobligatori,* Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Pujol, R.; Bibiloni, Ll.; Deulofeu, J. (2007): Del treball conjectural al rigor: la resolució de problemes als ulls de l'alumne. *Biaix* 26, 66-80.

Rey Pastor, J. (1976): *Elementos de análisis algebraico.* Biblioteca Matemática, Madrid.

Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; Trejo, A. (1969): *Análisis matemático, vol I. Análisis algebraico, teoría de ecuaciones y cálculo infinitesimal de una variable*. Kapelusz, Buenos Aires.

UNESCO (2005): *Educación para Todos. El imperativo de la calidad.* UNESCO, Informe de Seguimiento de la EPT en el Mundo 2005, París.

Romà Pujol Pujol. Nació en Castellet i la Gornal (Barcelona. España) el 10 de abril de 1969, es Catedrático de Matemáticas en el Instituto de l'Arboç (Tarragona, España) y profesor colaborador y asociado del Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat Autònoma de Barcelona (España). El centro de interés de su investigación reside en la construcción de conocimiento matemático a través de la resolución de problemas. Es uno de los investigadores principales del proyecto financiado EDU2009-07298 del grupo consolidado PREMAT. Autor de diversos libros de texto y artículos actúa como formador de profesores de educación primaria y secundaria. Recientemente ha escrito en la publicación de los manuales que la editorial Graó ha dirigido al Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria. **Roma.Pujol@uab.cat**

Lourdes Figueiras Ocaña y Jordi Deulofeu Piquet. Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat Autònoma de Barcelona.