

# HACIA LA INNOVACIÓN EN EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

*José Armando Albert Huerta, Blanca Ruiz Hernández, Santiago Inzunza Cazares, Sergio Hernández González, José Marcos López-Mojica.*

## Resumen

Este grupo temático busca dar continuidad a los esfuerzos por consolidar una comunidad de profesores e investigadores en educación estadística a nivel nacional a través de este espacio y que se viene haciendo desde hace varios años en las EIME. En esta ocasión, el grupo se propone discutir las posibilidades de hacer innovación a partir de los resultados de investigación, el uso de la tecnología y la experiencia en el aula. Con esa intención en nuestro grupo se aborda la importancia de las ideas fundamentales de estocásticos en el aula, el desarrollo del pensamiento inferencial estadístico, las nuevas oportunidades que ofrece el Geogebra como herramienta tecnológica a favor del razonamiento estadístico y una experiencia didáctica de su uso.

**Palabras clave: Educación Estadística, innovación, investigación.**

## Introducción

Los estudios sobre educación estadística son relativamente recientes, en comparación con otras áreas de la didáctica de la matemática. Sin embargo, recibieron un particular impulso a partir de la primera reunión de la IASE (Asociación Internacional para la Educación Estadística) en 1993, en Perugia, Italia. Desde entonces, ha habido un gran número de publicaciones de investigación y difusión a través de diversos medios académicos. Nuestra intención con el grupo es abrir un espacio de reflexión sobre esta producción y de la moderna tendencia impulsada por nuestras instituciones educativas de hacer innovación en el aula. La producción actual es muy vasta y no se pretende sino dar muestra de algunos avances de investigación, elementos de diseño e incorporación de la tecnología hecho por profesores investigadores mexicanos con el fin de entusiasmar a otros para compartir y producir nuevas investigaciones e innovaciones en la educación estadística, así como de impulsar una comunidad de práctica de profesores investigadores en educación estadística en México. En una primera instancia se presenta la importancia de la enseñanza de las ideas fundamentales de estocásticos en nuestras aulas y cómo éstas promueven un razonamiento estocástico. Posteriormente, se presentan algunas ideas que están revolucionando el modo de enseñar estadística inferencial a estudiantes de recién ingreso universitario, y que están siendo útiles para el diseño de innovaciones en el aula. Se continúa con el uso de tecnología que es otra parte fundamental para el aprendizaje de la Estadística por su gran potencial de procesamiento de datos y visualización de ellos, así como de la creación de situaciones de aprendizaje capaces de impulsar el razonamiento estadístico en los estudiantes, en esta ocasión se aborda el Geogebra, que es un software abierto y con muchas posibilidades. Finalmente, se termina con una experiencia particular del uso de Geogebra en el salón de clase, para, luego, abrir un espacio de discusión entre todos los asistentes en el grupo.

## **Ideas fundamentales de estadística: Propuestas de enseñanza para la educación primaria**

*Por José Marcos López-Mojica*

La reciente reforma educativa pretende que los estudiantes de educación básica desarrollen competencias (SEP, 2011) que les permitan resolver problemas de su vida cotidiana. En ese sentido, un reto importante para los docentes es proponer a los niños actividades de enseñanza apropiadas para el logro de ese objetivo. Además, las actividades de matemáticas deben estar ligadas a situaciones de la vida cotidiana del niño. Afrontar ese reto requiere que los docentes dominen el contenido matemático respectivo.

Recientes investigaciones han documentado el escaso y discontinuo tratamiento de los temas de probabilidad y de estadística (estocásticos) en el sistema educativo nacional, desde el nivel preescolar hasta el superior (por ejemplo, Ojeda, 1994; Limón, 1995; Carballo, 2004; Elizarraras, 2004; Salcedo, 2013; de León, 2002). Ese resultado atañe también a la docencia, ya que la falta de su formación en probabilidad y en estadística deriva en sesgos del pensamiento probabilístico y del razonamiento estadístico que se arraigan con el tiempo y son de más en más difíciles de erradicar.

La presente sección tiene la finalidad de reflexionar sobre la importancia de la enseñanza de las ideas fundamentales de estocásticos en nuestras aulas y cómo éstas promueven un razonamiento. Se interesa por el nivel básico (preescolar, primaria, secundaria), pues se considera que entre más temprana sea la introducción de los temas de estadística menos serán los problemas en su comprensión a nivel superior. Se toman en consideración los resultados de investigaciones teóricas. Una referente al desarrollo epistemológico de conceptos de estadística y de probabilidad. La otra concierne al desarrollo del conocimiento matemático en la interacción en el aula. Con la interrelación de estas dos teorías aplicadas en las aulas se podría promover una acción renovadora; es decir, se podría innovar con el planteamiento de situaciones de referencia (Steinbring, 2005) que impliquen a las diez ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) en las aulas. Con lo anterior se estarían acercando cada vez más la investigación con la docencia.

### **La importancia de las ideas fundamentales de estocásticos en las aulas**

La negligencia hacia los temas de estocásticos en el nivel básico, dificulta identificar aspectos importantes del razonamiento estadístico a tomar en cuenta en el planteamiento de actividades para introducir la estadística en el nivel medio superior. A falta de una formación sistemática sobre fenómenos aleatorios se arraigan sesgos del pensamiento del individuo, una de cuyas causas es el énfasis desmedido en el cálculo. Por ejemplo, Mevarech (1983) identifica un modelo de estructura profunda de estudiantes de licenciatura en problemas de estadística. Argumenta que los alumnos presentan una concepción errónea respecto al concepto de media; aplican las propiedades de grupo (principalmente la distributiva) en los problemas del cálculo de la media y de la media ponderada.

Maldonado y Ojeda (2009) informan sobre la comprensión de ideas fundamentales de estadística en la educación primaria. Realizaron un análisis de la propuesta institucional de ese nivel educativo, particularmente en el eje tratamiento de la información, y en las lecciones de texto respectivas. Encontraron “una reducción de la enseñanza de la estadística al uso de tablas, gráficas, pictogramas y diagramas como medios para organizar y comparar

datos” (pág. 3). Además, los autores exponen que hay un predominio de la operatividad aritmética, la cual propicia el desvío de la naturaleza del fenómeno estadístico para asignar valores numéricos como medida de la frecuencia de eventos.

Heitele (1975) propone diez ideas fundamentales para la formación de conceptos de estocásticos, sustentada en una enseñanza que tiene un curriculum en espiral, que parta de un plano intuitivo y arribe a un plano formal; apoya ese tránsito en la relación entre modelo y realidad, con la pretensión de que el alumno pueda desarrollar un pensamiento científico sustentado en la cotidianeidad. Para Heitele, una idea fundamental es aquella que proporciona al individuo, en cada etapa de su desarrollo, modelos explicativos tan eficientes como sea posible y que difieren en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración (Heitele, 1975, pág. 188).

Por otra parte, gran parte de los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se traducen en la interacción diaria entre profesor y estudiantes tienen lugar en el aula, donde el profesor pone en juego las estrategias de enseñanza que determinan el acto educativo. En ese sentido Steinbring (2005) ha realizado investigaciones respecto a la interacción en el aula con los contenidos matemáticos de estocásticos, ha revelado “la importancia de la intervención del profesor en la definición de las situaciones en las que han de participar los alumnos” (pág. 26). Steinbring (2005) plantea que “la apropiación de las nociones de matemáticas no resulta *a priori*, por lo que las experiencias matemáticas son fundamentales y el conocimiento se caracteriza como una relación epistemológica social, en la que entran en juego aspectos formales y contextos interpretativos” (pág. 48). A continuación, se presenta un ejemplo de actividad de enseñanza en la que se aplican las diez ideas fundamentales y el triángulo epistemológico.

### Distribuciones centradas y uniformes

La situación consiste en el acomodo azaroso de canicas, liberadas por los embudos, en las casillas de la parte inferior de las bandejas.

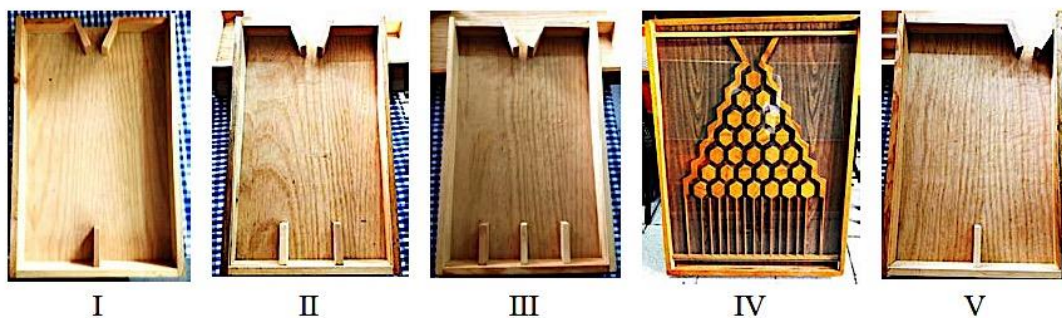


Figura 1. Bandejas para las distribuciones centradas y sesgada (Piaget e Inhelder, 1951).

El fenómeno aleatorio en foco en cada caso es el acomodo azaroso de las canicas en las casillas después de su vaciado por los embudos. El espacio muestra son las posibles casillas en las que pueden caer las canicas. La medida de probabilidad se considera, cualitativamente, con la relación del número de posibilidades de que una canica caiga en una casilla respecto al número total de posibilidades de ocupación de las casillas posibles.

El número de canicas por casilla es una variable aleatoria; la frecuencia relativa de una casilla es el número de sus canicas ocupantes respecto al total de canicas liberadas por el embudo. Se apela a la ley de los grandes números con la forma de la distribución de un número grande de canicas después de su vaciado. Gradualmente, por el número de casillas en las bandejas, se pasó de una distribución uniforme (bandeja I), a distribuciones centradas (bandejas II, III y IV) y a una sesgada (bandeja V).

## **Retos y oportunidades de educación en el pensamiento inferencial estadístico**

*Por Blanca Ruiz y José Armando Albert H.*

En los últimos años han surgido diversas propuestas para la mejora de la enseñanza de la estadística en los cursos introductorios a estadística. Entre ellas destaca el trabajo de Aliaga Gunderson (2006), quienes elaboraron seis recomendaciones para mejorar la enseñanza en los cursos introductorios a estadística. Estas recomendaciones se enfocan principalmente a fomentar la cultura y el razonamiento estadístico a través del manejo de datos y actividades que conduzcan a cuestionamientos inferenciales. En ese sentido la inferencia informal fue propuesta como una forma de concretar la introducción del razonamiento estadístico en el salón de clases. Sin embargo, también se plantearon cuestionamientos sobre la forma más apropiada de establecer un vínculo entre la inferencia informal y la formal en el nivel universitario. Pfannkuch (2005) propone la inserción de una etapa intermedia entre la inferencia formal y la informal y Wild, Pfannkuch, Regan y Horton (2011) enfatizan en el papel del muestreo y su vinculación con la variabilidad. En común estas propuestas resaltan la importancia de replantear el currículo de los cursos introductorios de estadística con miras a la modificación de la forma y el momento en que son tratados los contenidos y por lo tanto, también a su epistemología.

En su mayoría en el primer curso universitario de estadística, se introduce inferencia estadística (y todo el bagaje de conceptos que conlleva) después de haber tratado probabilidad y funciones de probabilidad más o menos formalmente y de que se esbozó estadística descriptiva en las últimas semanas del curso. Esto exige que muchos conceptos nuevos para los estudiantes tengan que ser operacionalizados simultánea y rápidamente. Wild, Pfannkuch, Regan y Horton (2011) visualizan la necesidad de agrupar los conceptos estadísticos en conjuntos pequeños más manejables que compartan razonablemente esferas de influencia y buscar vinculaciones entre ellos que permitan activar el conjunto apropiado en el momento apropiado. Esto también daría pauta a insertar paulatinamente los conceptos relacionados con inferencia estadística intencionalmente. En Albert, Ruiz, Tobías y Villarreal (2014) pretendemos estudiar la inserción temprana de conceptos propios de la inferencia estadística en distintos momentos del curso. El resultado se describe en este trabajo con la intención de que sirva como sustento al diseño de una estrategia nueva de organizar un curso de Probabilidad y Estadística.

### **Una propuesta**

Con la finalidad de puntualizar las distintas potencialidades del curso donde puedan introducirse las ideas de inferencia estadística se partió del marco referencial de la explicación sistémica del fenómeno didáctico (Cantoral, Farfán, Lezama y Sierra, 2006) para analizar las distintas dimensiones alrededor de las cuales vive la inferencia: (1) epistemológico-disciplinar, para identificar las ideas pilares de la inferencia estadística y de su posible secuencia lógica conceptual; (2) epistemológico-histórico, para identificar

momentos críticos del desarrollo de las ideas de inferencia estadística que diera una visión diferente del problema de *conocer* la inferencia; (3) didáctica, con los libros de texto y el currículo para identificar la secuencia actual de la inferencia estadística en la escuela. En primera instancia, estos estudios dieron lugar a la conclusión de que es posible desarrollar ideas germinales de estadística de estadística inferencial paralelamente al desarrollo de un curso universitario introductorio a estadística en cuatro momentos: Estadística descriptiva, Probabilidad, Distribuciones y Distribuciones del muestreo

### En Estadística descriptiva

La estadística descriptiva vista como análisis exploratorio de datos, puede ser un poderoso detonador de ideas de estadística inferencial a través de fomentar la inferencia informal y abordar en una forma germinal los conceptos de:

- **Toma de decisiones.** Contextualizar situaciones en la toma de una decisión con base en evidencia empírica
- **Hipótesis nula y alternativa.** Introducir la distinción entre una hipótesis de investigación de una hipótesis estadística. Se busca que, a través de una narración, se plantee la hipótesis del investigador versus la hipótesis en donde se involucra el parámetro de una variable.
- **Errores tipo I y tipo II.** Toma de decisiones con un riesgo a equivocarse. Describen con palabras los tipos de errores que pueden cometerse en situaciones específicas y concluir qué error es más importante no cometer según el contexto.
- **Intervalos con desviaciones estándar alrededor de la media.** No es común que en este estadio de su aprendizaje se construyan intervalos alrededor de la media utilizando desviaciones estándar, pero plantearlos resulta un antecedente para el concepto de intervalo de confianza y un preámbulo para el concepto de dato atípico.
- **Intervalos con percentiles.** Es un detonador de intervalos de probabilidad en distribuciones e intervalos de confianza en inferencia estadística.
- **Datos atípicos.** ¿Qué significa cerca o lejos de la media? Conviene abrir la discusión sobre la subjetividad de este concepto con el propósito de sentar un antecedente de lo que más adelante se abordará como *resultado significativo*.

### En probabilidad

Es posible desarrollar algunas ideas germinales de inferencia estadística desde probabilidad como:

- **Condicionabilidad del Error tipo I y Error tipo II.** En esta etapa puede ejercitarse la parte lógica de  $P(\text{Error tipo I})$  como probabilidad de rechazar  $H_0$ , dado que  $H_0$  es cierta y  $P(\text{Error tipo II})$  como probabilidad de aceptar  $H_0$  dado que  $H_0$  es falsa).
- **Calculo probabilidades de cometer Error tipo I y Tipo II.** A través diagramas de árbol, probabilidad total y Teorema de Bayes el estudiante, en situaciones como las pruebas para saber si una persona tiene cáncer, puede calcular las probabilidades de los errores.

### En distribuciones de probabilidad

Las Distribuciones permiten dar un avance decisivo a las ideas de inferencia estadística como a continuación señalamos:

- **Planteamiento simbólico de las hipótesis.** En esta etapa los estudiantes pasan de expresar sus hipótesis narrativamente a su forma simbólica con relación a un parámetro en cuestión.
- **Intervalos de probabilidad.** Estos permiten sentar las bases para que los estudiantes más adelante puedan distinguir entre intervalos de probabilidad (que se plantean en la regla de decisión de las Pruebas de hipótesis, por ejemplo) y los futuros intervalos de confianza.
- **Resultado significativo.** Este concepto fundamental puede desarrollarse completamente con el uso de la Distribución binomial vista como una distribución muestral, y establecerlo en función del número de desviaciones estándar desde la media, así como el valor  $p$ .

### En distribuciones muestrales

Los estudiantes ya pueden formular un problema de toma de decisiones en forma simbólica con el parámetro en cuestión. En esta etapa es posible desarrollar varias ideas esenciales para la inferencia estadística de tal manera que ésta última pueda ser vista, en cierto modo, como una aplicación de dichas distribuciones.

- **Nivel de significación.** Visto como una consecuencia directa del valor crítico definido como el número de errores estándar desde la media convenido para determinar a partir de qué valor se tiene un resultado significativo.
- **Regla de decisión.** Se desprende de manera natural del nivel de significación determinar la regla a partir de la cual se rechaza o no una hipótesis nula.
- **Valor  $p$ .** Se da una continuidad, desde su primer acercamiento del valor  $p$  con las distribuciones discretas que estudiaron, ahora visto desde las distribuciones muestrales y como un argumento para decidir si se rechaza  $H_0$ .
- **Probabilidad de los Errores tipo I y II.** Esto es visto como una aplicación directa de las distribuciones muestrales involucradas.

### En inferencia formal

Se pretende la aplicación del procedimiento de pruebas de hipótesis a diferentes tipos de parámetros. Desligarse del estadístico de prueba como número de desviaciones estándar alrededor de la media para visualizarlo como una cota que determina el nivel de significancia deseado. Es de esperarse dificultades que van desde la diferenciación entre parámetros y estadísticos en la información del problema, dificultades conceptuales con las distribuciones muestrales, hasta dificultades lógicas en el planteamiento de las hipótesis y de los tipos de errores.

En conclusión, un acercamiento multidimensional del fenómeno didáctico de la inferencia estadística permitió tener una idea más clara de su naturaleza e identificar que la enseñanza tradicional de probabilidad y estadística aborda muy linealmente los contenidos y desaprovecha el gran potencial de interrelación que tienen los conceptos. Es una falsa creencia que sólo es posible abordar la inferencia estadística después de que han estudiado todos los temas que le componen. De hecho, como se mostró en este trabajo, existen muchos espacios a lo largo del desarrollo de un curso que permiten detonar ideas



germinales de inferencia estadística y de capitalizar a través de la vinculación de conceptos lo aprendido para desarrollar una idea más robusta de lo que es la inferencia estadística.

También se logró identificar elementos conceptuales para construir una secuencia de ideas germinales para el desarrollo de la inferencia estadística que puedan ser fundamento para el diseño y experimentación en el aula. La complejidad de algunos elementos de la inferencia estadística como su parte lógica y la comprensión de resultado significativo, desde esta perspectiva, contarán con mayores tiempos didácticos para su aprendizaje.

### **Utilizando GeoGebra para la Enseñanza de la Estadística**

*Por Sergio Hernández González*

GeoGebra es un software de código abierto, disponible gratuitamente para usos no comerciales. Desarrollado por Markus Hohenwarter en la Universidad Atlantic de Florida. Se utiliza para matemáticas dinámicas en todos los niveles educativos. Reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. Es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países. GeoGebra se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo. GeoGebra conecta geometría, álgebra y hoja de cálculo de forma completamente dinámica, tiene una interfaz muy fácil de usar, a pesar de contar con poderosas herramientas, se puede crear materiales de aprendizaje interactivos como páginas web y disponible en varios idiomas. A los estudiantes les gusta porque hace tangible la matemática, ya que crea una conexión entre la geometría y el álgebra de un modo visual, de tal manera que ellos pueden ver, tocar y experimentar con la matemática; mientras que los profesores lo incorporan en sus clases como una herramienta didáctica. Aunque fue creado en un principio para matemáticas, se ha incorporado una herramienta sobre Cálculo de Probabilidades.

Al pulsar sobre esa herramienta se abre una ventana, que ofrece la posibilidad de trabajar con las distribuciones de probabilidad (discretas y continuas) más habituales en los cursos de introducción a la Estadística. Podemos deslizar los puntos del eje x en la figura, y ver esos cambios reflejados automáticamente en los correspondientes valores de probabilidad. Además, se puede observar el desplazamiento, a izquierda o derecha, que se produce según cambian los parámetros de la media y la desviación estándar.

Igualmente se puede trabajar con pruebas de hipótesis, intervalos de confianza, pruebas de bondad de ajuste y de Ji-cuadrada, donde con sólo introducir los valores de la media, la desviación estándar y el tamaño de muestra, nos calcula el intervalo de confianza o nos prueba una hipótesis. Vea las distintas opciones que no proporciona:

Nos proporciona una Hoja de Cálculo, el funcionamiento es similar al de una hoja de cálculo convencional, por tanto, con un simple arrastre de celda se creará de forma rápida una colección de objetos. Es bastante útil para la enseñanza de la Estadística, donde se pueden introducir datos y realizar análisis de una sola variable, análisis de regresión de dos variables, análisis de la varianza, análisis multivariante y acceder a la ventana de Cálculo de Probabilidades mencionado anteriormente.

Al margen de estas herramientas específicas GeoGebra ha incorporado una gran cantidad de comandos relacionados con la Probabilidad y la Estadística, las cuales se pueden consultar en <http://wiki.geogebra.org/es/Categor%C3%ADa:Comandos>

Como un plus, mediante GeoGebra se puede realizar material didáctico con animaciones, modelado de problemas y guías didácticas.

En general, podemos decir que GeoGebra se puede utilizar dentro de la enseñanza de la Estadística como una herramienta didáctica que sirve para: i) analizar datos estadísticos tanto unidimensionales como bidimensionales, ii) presentar los datos en diagramas y gráficas que faciliten la interpretación de los resultados obtenidos, iii) obtener diferentes medidas estadísticas, iv) obtener e interpretar funciones de densidad de distintas distribuciones, tanto discretas, como continuas, en particular la distribución Normal y v) calcular probabilidades como el valor del área bajo la curva y comprobar intervalos característicos de la distribución.

### **Una experiencia de innovación en la introducción a la inferencia estadística utilizando el software Geogebra**

*Por Santiago Inzunza Cazares*

La enseñanza tradicional de la inferencia estadística en los cursos de bachillerato y universitarios utiliza un enfoque deductivo basado en teoría de la probabilidad. En concordancia con ello, la distribución muestral de un estadístico, -concepto que constituye la base de los métodos de inferencia- se define como una distribución teórica que expresa la probabilidad de los valores que puede tomar el estadístico en todas las muestras posibles de la población. Desde esta perspectiva, esta idea fundamental para comprender la inferencia resulta difícil de asociar con el proceso real que se utiliza en la selección de muestras de una población en aplicaciones prácticas. Este enfoque, además de las dificultades que entraña para los estudiantes con pocos antecedentes matemáticos, no hace visible las relaciones que existen entre los conceptos e ideas que se involucran, dando con ello una imagen determinista de la inferencia, cuando es la variabilidad parte central en su estudio. Como alternativa didáctica se sugiere una enseñanza que clarifique la forma como se relacionan e intervienen todos estos conceptos como paso previo al estudio de los métodos formales de la inferencia, utilizando herramientas tecnológicas con amplio potencial de representaciones visuales dinámicas para generar imágenes correctas de estos conceptos en los estudiantes. La experiencia de enseñanza que se describe a continuación ha sido puesta en práctica con un grupo de estudiantes de ciencias sociales y ha tenido el propósito de analizar el razonamiento e imágenes que los estudiantes construyen sobre conceptos que forman parte de las distribuciones muestrales en un ambiente computacional como el que proporciona el software Geogebra.

#### **Descripción de la experiencia**

Para el caso específico de distribuciones muestrales, el software Geogebra dispone de una hoja de cálculo con diversos comandos y una ventana gráfica que permiten simular y visualizar los resultados del proceso de selección de muestras de una población, así como el comportamiento de una distribución muestral en forma numérica y gráfica (ver figuras 1 y 2). Los datos de la población utilizada representan el número de contactos que los estudiantes del grupo tienen en la red social de su preferencia. La estructura de la actividad



para construir distribuciones muestrales empíricas (en este caso de la media) consiste de tres fases que se describen a continuación:

1. Se define una población y se calculan medidas descriptivas: media y desviación estándar.
2. Se selecciona una muestra aleatoria de un tamaño dado de la población y se calcula su media muestral.
3. Se repite el proceso de selección de muestras para generar una colección numérica y gráfica de las medias muestrales. Se calcula su media y error estándar.

El proceso anterior se repitió para diferentes tamaños de muestra (ver figura 1). Al final los estudiantes completaron una hoja de trabajo donde exploramos conceptos como:

1. Relación entre tamaño de muestra y variabilidad de la distribución muestral.
2. Relación entre el tamaño de muestra y la forma de las distribuciones muestrales.
3. Efecto del tamaño de muestra en el centro de las distribuciones muestrales.
4. Cálculo del error muestral y el efecto del tamaño de muestra.
5. Identificación de un intervalo intuitivo que comprende un porcentaje de medias muestrales.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Número de contactos			Medias Muestrales n=5	Medias Muestrales n=10	Medias Muestrales n=20	Medias Muestrales n=30	Error Muestra=5	Error Muestra=30
400	Media Poblacion	460.18	397	456.1	339.85	393.9	63.18	66.28
500	Desviacion Poblacion	411.33	643.2	670.9	467.5	499.07	183.02	38.88
985			894	258.2	620.7	497.37	433.82	37.18
129	Media Muestra n=5	456.66	371.6	529.4	466.55	548.13	88.58	87.95
1624	Desviacion Estandar n=5	186.23	505.8	362	554.15	536.3	45.62	76.12
29			671.6	469.6	407.5	520.57	211.42	60.38
500	Media Muestra n=10	448.35	639.8	519.4	572.3	530.83	179.62	70.65
82	Desviacion Estandar n=10	124.26	725.2	499.5	675.55	386.03	265.02	74.15
299			497.4	354.7	492.15	525.8	37.22	65.62
308	Media Muestra n=20	451.31	266.6	386.3	611	366.67	193.58	93.52
220	Desviacion Estandar n=20	95.51	493.2	461.4	358.95	538.87	33.02	78.68
50			381.6	447.2	707.45	525.9	78.58	65.72
116	Media Muestra n=30	464.38	283.2	638.5	331.85	612.47	176.98	152.28
76	Desviacion Estandar n=30	72.36	508.4	360.9	520.95	445.77	48.22	14.42
800			233.8	351.9	736.25	374.83	226.38	85.35

Figura 1: Hoja de cálculo de Geogebra con simulación de muestras

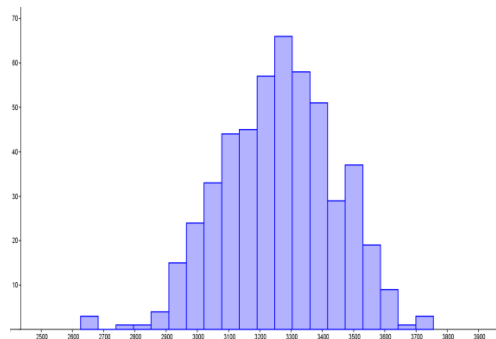


Figura 2: Distribución muestral de la media muestras de tamaño 30 (500 simulaciones)

Algunas respuestas que proporcionaron los estudiantes del grupo:

“En este ejercicio pudimos observar que la muestra, aunque no arroja los datos exactos de la población, nos ofrece datos con márgenes de error que son muy bajos, y el error disminuye a medida que la muestra se amplía. Con el ejercicio del error absoluto comprobamos de una manera clara esa hipótesis” (Anahí).

“Al aumentar la muestra la forma de las gráficas es más uniforme y más confiable ya que está más acomodada al centro; por otro lado, la media es más cercana a la media poblacional cada vez que la muestra aumenta; y por último la desviación estándar es cada vez menos cuando el número de la muestra aumenta reduciéndose de esta manera la dispersión” (Paúl).

En conclusión, el ambiente computacional que proporciona el software Geogebra contiene elementos de una herramienta cognitiva que puede ayudar a que los estudiantes desarrollen ideas correctas sobre los conceptos como variabilidad muestral, la forma como el tamaño de muestra influye en la variabilidad de las medias muestrales, el error muestral y la forma de las distribuciones muestrales, y sobre todo, concebir al muestreo como un proceso aleatorio y repetible de una población, que aunque produce resultados que varían, estos son en la mayoría de los casos cercanos a la media poblacional.

## Conclusiones

La educación estadística se ha convertido en una necesidad social relevante. Es por eso que numerosos profesores e investigadores en el mundo y en México se han dado a la tarea de abordar esta tarea desde una perspectiva científica desde hace más de 25 años. Sin embargo, este tiempo ha sido insuficiente para conocer en su complejidad el fenómeno didáctico de su enseñanza y aprendizaje. Es por eso que, dándole continuidad a ese esfuerzo, nuestro grupo se propone contribuir a través de nueva investigación en el contexto mexicano que favorezca el razonamiento estadístico y el uso de recursos tecnológicos disponibles. En particular, de darle prioridad a las ideas fundamentales estocásticas y de inferencia estadística para el diseño de situaciones de aprendizaje innovadoras, así como de la conveniencia de usar software libre disponible, como el Geogebra, como parte del diseño de situaciones retadoras y de gran riqueza de aprendizaje para estudiante.

## Referencias bibliográficas

- Acuña, P. (2004). *Estadística aplicada con Fathom*. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- Albert, J. A., Ruiz, B., Tobías, M. G. y Villarreal, O. (2014). Transformando la educación estadística desde un enfoque inferencial. Proyecto de la Fundación Novus, Tecnológico de Monterrey.
- Aliaga, M., & Gunderson, B. (2006). *Interactive statistics*. Prentice Hall.
- Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: goals, definitions and challenges. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, ( pp. 3-15). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., & Sierra, G. M. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 83-102.

- Carballo, M. (2004). *Estocásticos en el segundo ciclo de la Educación Primaria: Determinismo y azar*. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav-IPN, México.
- De León, J. (2002). *Comprensión de la ley de los grandes números de estudiantes de Ciencias Sociales*. (Tesis de Doctorado inédita). DME, Cinvestav-IPN, México.
- Devore, I. (2011). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. (8 ed.) México: Cengage Learn.
- Elizarraras, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en el segundo grado de secundaria*. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav-IPN, México.
- Fisher, R. A. (1949), *Métodos estadísticos para investigadores* (10 ed). Madrid: Ed. Aguilar.
- Gómez, V. y Haro, M. (2014). Estadística con GeoGebra. En Contreras, J. M., Cañadas, G. R., Gea, M. M. y Arteaga, P. (Eds.). *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, pp.243-250.
- Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6(2), 187-205.
- Limón, A. (1995). *Elementos para el Análisis Crítico de la Posible Inserción Curricular de Nociones Estocásticas, Ausentes en Programas de Preescolar y Primaria*. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav-IPN, México.
- Maldonado, J. E. y Ojeda, A. M. (2009). Ideas fundamentales de estadística en educación primaria: Una perspectiva epistemológica. *Premisa* 11 (43), 3-10.
- Mevarech, Z. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics* 14(1), 415-429.
- Ojeda, A.M. (1994). Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels. (Tesis de Doctorado inédita). King's College London. UK.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La Genèse de l'idée de Hasard Chez l'enfant*. Francia: PUF.
- Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: how can teachers enable learners to make the connection? In *Exploring Probability in School*. Springer US. pp. 267-294.
- Pfannkuch, M., Wild, C. J., & Parsonage, R. (2012). A conceptual pathway to confidence intervals. *ZDM*, 44(7), 899-911.
- Salcedo, J. (2013). Razonamiento probabilístico en el bachillerato tecnológico. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav-IPN. México
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Planes de estudios 2011. Educación Básica*. México: SEP.
- Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. USA: Springer.

- Montgomery, D. & Runger, G. (2008). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. (2 ed). México: Limusa Wiley.
- Rodríguez, M. I., Albert, J. A., Agnelli, H. (2011). Controversias sobre las pruebas de hipótesis: sus implicaciones para su enseñanza. *Contribuciones a la Enseñanza y Aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística*. Puebla, BUAP.
- Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute*, 201-204.
- Wild, C. J., Pfannkuch, M., Regan, M., & Horton, N. J. (2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, 174(2), 247-295.

### **Autores**

José Armando Albert Huerta; ITESM. México; [albert@itesm.mx](mailto:albert@itesm.mx)

Blanca Ruiz Hernández; ITESM. México; [bruiz@itesm.mx](mailto:bruiz@itesm.mx)

Santiago Inzunza Cazares; UAS. México; [sinzunza@uas.edu.mx](mailto:sinzunza@uas.edu.mx)

Sergio Hernández González; UV. México; [sehernandez@uv.mx](mailto:sehernandez@uv.mx)

José Marcos López-Mojica; UCOL. México; [josemarcos\\_lopez@ucol.mx](mailto:josemarcos_lopez@ucol.mx)