

# LA OPERATIVIDAD CON FRACCIONES Y SU RELACIÓN CON LA COMPRENSIÓN DE EQUIVALENCIAS

*Fabiana Mahtabel Arteaga Cervantes, José Antonio Juárez López*

## **Resumen**

El trabajo mostrado a continuación corresponde a la primera etapa de una tesis de Maestría cuyo objetivo es diseñar y poner a prueba una secuencia didáctica en la que se trabaje con equivalencias de fracciones para superar las dificultades que alumnos de primero de secundaria presentan al operar con fracciones y verificar si el dominio de las equivalencias tiene una incidencia positiva en la resolución de problemas. En dicho trabajo se exponen los resultados obtenidos en el diagnóstico (pre-test) cuya intención fue identificar las dificultades que los alumnos presentan al manejar las fracciones y cómo hacen uso de las equivalencias. Los resultados del diagnóstico mostraron la falta de comprensión que tienen los estudiantes con respecto a las fracciones y sus significados. Sin embargo se pudo corroborar que cuando los estudiantes comprenden el manejo de las equivalencias y se enfrentan a una tarea relacionada con operaciones de fracciones, son capaces de resolverla sin necesidad de recurrir al algoritmo.

**Palabras clave: Fracciones, equivalencias, resolución de problemas.**

## **Antecedentes**

El aprendizaje de las fracciones es un tema que desde hace varios años ha causado gran interés para ser investigado debido a que presenta múltiples dificultades en estudiantes de diferentes niveles educativos. En México la educación básica considera las fracciones uno de los temas más importantes académica y socialmente, y es por ello que se le dedica un tiempo considerable en el currículo, ya que se introduce desde el tercer grado de primaria y es revisado repetidamente en grados subsecuentes. Pese a ello muchos niños y jóvenes siguen presentando serias dificultades para operar con ellas. Perera & Valdemoros (2009) explican que una de las causas por las que se puede dificultar el aprendizaje de las fracciones es que los estudiantes, al introducirse al tema de fracciones, cuentan con escasos conocimientos previos. Nunes & Bryant (1997) argumentan que los estudiantes pueden mostrarse muy diestros al utilizar los términos fraccionarios, hablar coherentemente acerca de las fracciones e incluso resolver problemas fraccionarios, pero no captan varios aspectos cruciales de las fracciones. Incluso pueden pasar de año en año sin dominar las dificultades de las fracciones. Al respecto Kamii & Clark (1995) explican que aunque en el mejor de los casos los estudiantes son capaces de manejar el algoritmo, se muestran ineficientes al momento de resolver problemas y, en general no muestran una habilidad real en el manejo de las mismas.

Además de la complejidad que presenta el aprendizaje de las fracciones subyace un problema mayor, debido a que estas dificultades trascienden a otras áreas de la matemática ya que los problemas de comprensión en este tema trae consigo dificultades en el

aprendizaje de temas subsecuentes que necesitan como principio básico a las fracciones. “Estas lagunas, a pesar de las cuales los estudiantes habían podido igualmente proseguir en sus estudios, se revelaban mortales en el momento de tener que darlas por obvias en situaciones... más complejas” (Fandiño, 2009; p. 19).

Numerosos estudios han revelado que uno de los principales factores que contribuye a esta complejidad es el hecho de que las fracciones comprenden una noción multifacética debido a que tiene diversos significados (parte-todo, cociente, razón, operador, medida) y que éstos están interrelacionados. Kieren (1976) fue el primero en establecer que el concepto de fracción no es de construcción simple, porque consiste de varias subconstrucciones relacionadas. Él argumenta que para entender las ideas de número racional, uno debe adquirir experiencia con sus múltiples interpretaciones. Además, Charalambous y Pantazi (2006) explican que las fracciones comprenden una noción multifacética que integra cinco subconstrucciones interrelacionadas y que entender las cinco subconstrucciones es considerado un prerrequisito para resolver problemas relacionados con el tema exitosamente”.

Por otra parte cuando se trata de introducir el tema de fracciones, la mayoría de los materiales del currículo escolar tratan el número racional como objetos de cálculo; se avanza muy rápido a la operatividad con las mismas y se le da gran importancia al dominio del algoritmo, por lo que los estudiantes pierden muchas de las interpretaciones importantes del número racional. Al respecto Hasemann (1981) menciona que “para la aritmética de fracciones existen muchas reglas, y esas reglas son más complicadas que las de los números naturales. Si esas reglas son introducidas demasiado pronto, existe el peligro de que sean usadas mecánicamente y sin pensar”.

Kamii y Clark (1995) explican que “no hay mucha información concerniente a las fracciones equivalentes como tal. Sin embargo la información disponible con respecto a la suma y resta de fracciones con denominadores diferentes “fáciles”, evidencia la dificultad de las fracciones equivalentes... algo claramente está mal con la manera en que las fracciones equivalentes y/o comunes denominadores son enseñados”. Kerslake (1986) dice que aunque los alumnos hayan logrado realizar las pruebas de equivalencia no tienen una comprensión real de las mismas y no las emplean para resolver operaciones con ellas.

De acuerdo con Fandiño (2009), para los estudiantes es más fácil manejar las equivalencias cuando éstas fracciones involucran números múltiplos entre sí; y la estrategia se reduce a multiplicar o dividir numerador y denominador por el mismo número, sin embargo les resulta más difícil encontrar una estrategia que les permita gestionar la equivalencia cuando los números involucrados no son múltiplos entre sí. Esta manera de proceder de los estudiantes refleja una falta de dominio y en consecuencia de comprensión real de las equivalencias entre fracciones, lo que podría incidir en la comprensión de otros significados de las fracciones con mayor relevancia; tanto en la resolución de problemas como en las operaciones con fracciones.

Freudenthal (1983) exponía que “la fracción como fracturador puede ser descrita mediante un concepto de equivalencia bastante restringido: no requiere más que dividir algo en partes iguales. Pero en la realidad de la didáctica se necesita una equivalencia de más alto alcance, así como una disponibilidad sin restricciones de objetos en cada clase de

*equivalencia. Esta necesidad no ha sido reconocida en la didáctica de las fracciones ni en la elección de modelos didácticos hasta la fecha”.*

Esto evidencia entonces que las dificultades en el aprendizaje de los números racionales desde su conceptualización hasta sus múltiples representaciones no es para nada trivial y merece mucho la pena ser analizado.

Kieren (1976) explica que partir de la idea de clases de equivalencia fluye la noción de operaciones en los racionales y también sus propiedades. Además, en uno de sus estudios proporciona un listado de cuestiones previas a la suma de fracciones en el que muestra que está íntimamente relacionada con la comprensión de las equivalencias.

Post, Behr & Lesh (1984) hacen un análisis sobre la comprensión de estudiantes de 4to grado sobre el orden y la equivalencia de los racionales. Ellos mencionan que el concepto de números racionales está entre las ideas matemáticas más complejas e importantes que los niños enfrentarán antes de llegar a la escuela secundaria y que con una instrucción adecuada durante un periodo prolongado de tiempo, la mayoría de los niños a finales de 4to grado son capaces de desarrollar un pensamiento adecuado para hacer frente a preguntas del orden y equivalencias de fracciones y que la habilidad para abordar efectivamente los racionales mejora enormemente su habilidad para entender y operar con situaciones y problemas en el mundo real.

### **Planteamiento del problema**

Con el referente anterior el problema identificado se resume a continuación:

Las fracciones es un tema que presenta muchas dificultades al momento de enseñarlo y aprenderlo por el hecho de que el concepto de fracción no es de construcción simple, ya que consiste de varias subconstrucciones relacionadas.

Pese a que es un tema que se trata durante varios años en la educación básica, muchos niños y jóvenes aún presentan serias dificultades para operar con fracciones.

Estas dificultades trascienden a otras áreas de la matemática.

Uno de los aspectos que presenta mayor dificultad es resolver problemas que implican aplicar la operatividad de las fracciones.

Muchos autores asocian las dificultades que se presentan al operar con fracciones con el dominio y comprensión real de las equivalencias.

Con tal antecedente se pretende realizar una investigación orientada por las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las principales dificultades que presentan alumnos de 1° de secundaria al enfrentarse a tareas cuya solución implica operar con fracciones?
- ¿Es posible superar las dificultades que los estudiantes de primero de secundaria presentan al tratar de resolver problemas relacionados con la operatividad de fracciones mediante la gestión de equivalencias?
- ¿Incidirá de manera positiva el dominio de la gestión de fracciones equivalentes en la resolución de problemas que implican operar con fracciones?

### **Metodología**

El estudio se realizó con 46 alumnos de primer grado de una Escuela Secundaria Técnica del estado de Puebla, que oscilan entre los 12 y 14 años. La escuela está ubicada en un contexto urbano. Dicho estudio tiene un enfoque cualitativo. En él se realizó una investigación documental que tiene como propósito conocer cuáles han sido las principales dificultades que enfrentan los estudiantes al estudiar las fracciones y la influencia que éstas tienen en la resolución de problemas. Además se realizó una investigación de campo con la intención de identificar las dificultades que los alumnos presentan al manejar las fracciones y cómo hacen uso de las equivalencias.

Existe una vasta referencia bibliográfica sobre las investigaciones que se han derivado del tema de fracciones y las dificultades que éste representa para los estudiantes. Algunas investigaciones se han centrado en la construcción del significado de fracción y cuáles son las dificultades al aprender fracciones. Otras en la enseñanza de las fracciones a nivel primaria. Algunas otras sobre la comprensión de los estudiantes en el tema de las fracciones. También existen algunas investigaciones que estudian los procedimientos empleados para operar con las fracciones, algunos de los cuales mencionan la importancia de la comprensión de equivalencias. Sin embargo no se han encontrado reportes de investigación que provean de evidencia empírica sobre la temática de equivalencias, por lo que en el presente trabajo se optó por hacer un pre-test, basado en un estudio empírico que aportara información sobre la problemática tratada y a su vez orientara la etapa de intervención.

El diagnóstico se llevó a cabo en tres etapas. Para el diseño del instrumento diagnóstico se tomaron de referencia dos textos. El primero que corresponde a Klaus Hasemann (1981) proporciona algunos ítems de diagnóstico sobre las dificultades con fracciones del cual se extrajeron los que correspondían a equivalencias, pero además provee de una clasificación con respecto al significado de fracción empleado para cada ítem y su grado de dificultad, misma que fue utilizada para clasificar todos los ítems del instrumento diagnóstico. Del segundo texto (Kamii C. & Clark F., 1995) únicamente se extrajeron los ítems de su diagnóstico ya que su investigación si se refiere a las fracciones equivalentes, sus dificultades e implicaciones educativas aunque, como se mencionó líneas previas, en tal estudio no se reporta intervención. Posterior al diseño se aplicó el instrumento y se realizó el análisis de resultados.

La clasificación que se utilizó para determinar el grado de dificultad de cada ítem fue la siguiente Klaus Hasemann (1981):

Se clasifica en tres facetas; Operaciones con fracciones, Formas de representación de los problemas y formas de operar con fracciones.

Los ítems pueden combinar varias facetas, esto implica una mayor dificultad y por lo tanto, mayor exigencia sobre lo que los alumnos deben manejar con respecto al tema de fracciones para resolver con éxito cada uno de ellos.

### **Análisis de resultados del diagnóstico**

Algunos de los ítems contenidos en el diagnóstico, su justificación y análisis se presentan a continuación.

#### **Ítems 1 y 2**

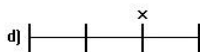
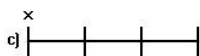
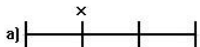
1. Una galleta redonda se repartirá entre dos niños. ¿Cómo representarías la parte que le corresponde a cada uno?
2. Con un pedazo de listón se tienen que hacer ocho moños del mismo tamaño. ¿Qué parte del listón se necesitará para cada moño?

Los ítems anteriores tienen la misma estructura, la intención de colocarlos era conocer si los alumnos, dado que ya han cursado varios grados de educación primaria en los cuáles se trata el tema de fracciones, manejaban como idea fundamental el significado de fracción parte-todo.

De acuerdo con los resultados del diagnóstico se pudo observar que el ítem 1; con 43 respuestas correctas (93%), no representa una dificultad para los estudiantes, sin embargo el ítem 2, que como hemos mencionado, corresponde a la misma estructura del primer ítem, si representa una dificultad importante, ya que de los 46 estudiantes el 65 % contestó incorrectamente a dicho ítem y el 9% no lo respondió. Esto pudo haber sucedido por varias causas, una de ellas puede ser la semántica ya que les es más familiar la representación simbólica de  $\frac{1}{2}$  que de  $\frac{1}{8}$ , esta consideración es importante porque en las respuestas de los estudiantes se puede observar que algunos sí representaron gráficamente el listón fraccionado pero no fueron capaces de representarlo de forma simbólica. También pudo haber influido el contexto del problema, a los niños les resulta más familiar el contexto de la repartición de una galleta que el de cortar un listón. Otra causa posible es que los estudiantes sean sensibles al rango numérico, es decir, que para ellos sea más familiar e intuitiva la idea de fraccionar en mitades que en octavos.

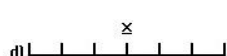
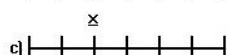
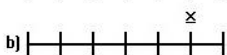
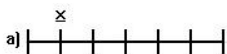
#### Ítems 4 y 5

4. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción  $\frac{1}{3}$ ?



e) Ninguna de las anteriores

5. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción  $\frac{1}{3}$ ?



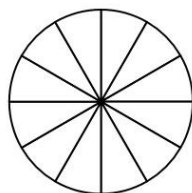
e) Ninguna de las anteriores

Los ítems 4 y 5 tienen la misma estructura; ambos piden ubicar en la recta numérica la fracción  $\frac{1}{3}$ , la diferencia en ellos es que en el primer ítem la fracción solicitada se muestra de manera directa, en el segundo ítem la fracción no se muestra directamente, los alumnos deben encontrar su equivalencia con sextos. La finalidad de colocar éstos ítems es conocer si los alumnos lograban identificar fracciones equivalentes en la recta numérica.

Estos ítems tienen la misma estructura, como se mencionó anteriormente, se trata de que los alumnos ubiquen la fracción  $\frac{1}{3}$ . En el ítem 4 la recta está fraccionada en tercios, por lo que los alumnos pueden identificar la fracción de forma directa, es decir, sin hacer uso de equivalencias o conversiones. En este ítem el 33% de los estudiantes contestó incorrectamente, la mayoría consideró la marca de un tercio en 0, otros la ubicaron contando los tercios del 1 hacia el 0, esto es, en la marca dos tercios. Pese a que los ítems 4 y 5 tienen la misma estructura, el ítem 5 exige hacer una conversión de un tercio a la fracción equivalente dos sextos, en este ítem se obtuvieron 59% de respuestas incorrectas. Es evidente que los estudiantes tuvieron más dificultad en identificar la fracción solicitada debido a que la recta no se encuentra fraccionada en tercios directamente.

### Ítem 9

9. Sombrea  $\frac{1}{4}$  del círculo, después sombrea  $\frac{1}{6}$  del círculo, ¿qué fracción del círculo total tienes sombreada?



En este ítem se muestra un círculo dividido en doce partes iguales, la primera intención es observar si los estudiantes reconocen la equivalencia en doceavos de  $\frac{1}{4}$  y también de  $\frac{1}{6}$ , finalmente se les pide sumar dichas fracciones y reconocer la parte del todo que se tiene sombreada con la intención de conocer su procedimiento para sumar fracciones. En este caso se trata de identificar si los alumnos tienen o no manejo de las equivalencias de fracciones y se espera que, si los alumnos son capaces de identificar la equivalencia en doceavos de cada una de las fracciones planteadas, la realización de la suma no represente un problema mayor.

El ítem 9 tiene varias exigencias con respecto a los ítems anteriores ya que, inicialmente se pedía a los estudiantes sombrear un cuarto del círculo, debido a que éste estaba fraccionado en doce partes, antes debía encontrarse la equivalencia de doceavos-cuartos. La segunda parte del ítem consistía en sombrear un sexto del círculo, para lo que, igual que en la primera consigna, se tenía que hallar la equivalencia sextos-doceavos. Finalmente se pedía indicar la fracción del círculo que quedaba sombreada después de haber realizado las primeras dos consignas. Esto implicaba una suma de fracciones, misma que se podía resolver de forma visual; identificando cuántos doceavos estaban sombreados o bien, sumar las fracciones equivalentes. En este ítem el 74% de los estudiantes contestó incorrectamente. De éstos, el 53% sombrió seis de los doceavos y cuatro de los doceavos,

quedando sombreado finalmente  $\frac{10}{12}$  (así lo expresan los estudiantes) del círculo completo. Esto pone en evidencia que los alumnos no tienen un manejo adecuado de las fracciones con respecto al significado parte-todo, debido a que, por una parte, ignoran por completo que se les ha pedido sombrear  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{6}$  del círculo y no 4 y 6 partes de las mostradas en el círculo, pero por otra si identifican que la respuesta es una fracción que corresponde a una parte de un todo. Otro grupo considerable (38% de los que respondieron incorrectamente) logra colorear  $\frac{1}{4}$  o bien  $\frac{1}{6}$  del círculo pero no ambas por lo que no puede responder de forma completa al ítem. Otro grupo de estudiantes mezcla las ideas anteriormente planteadas, es decir, por una parte colorea correctamente  $\frac{1}{4}$  pero por otra colorea seis de las doce partes. Estos resultados ponen de manifiesto que los alumnos no comprenden del todo la noción de fracción ni del uso de las equivalencias de fracciones. Aquí es importante aclarar que todos los estudiantes que lograron identificar las equivalencias contestaron correctamente al ítem, es decir, sombrearon correctamente las fracciones equivalentes en doceavos de un cuarto y un sexto. Pero además lograron resolver la suma de fracciones la cual, de acuerdo con los resultados, fue resuelta visualmente (no hubo registro del uso de algoritmo).

### Ítem 13 y 14

13. Calcula  $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$
14. Calcula  $1 - \frac{5}{12}$

Con estos ítems se pretendía conocer cómo es que los estudiantes operan con las fracciones, si utilizan el algoritmo convencional o hacen uso de las equivalencias.

Las operaciones con fracciones frecuentemente son resueltas por los estudiantes mediante el algoritmo convencional, pocas veces con la comprensión real de lo que se está haciendo. En estos ítems, un gran número de estudiantes; 65% y 52% respectivamente, contestan incorrectamente. Algunos de ellos tienen la tendencia a sumar numerador con numerador y denominador con denominador. Lo cual pone de manifiesto que para ellos las fracciones no representan un conjunto de números diferente de los naturales sino una combinación que además sigue conservando las mismas propiedades y que utilizan para operar indistintamente con unos y otros. Aunque los estudiantes que contestaron correctamente no muestran su procedimiento completo, de acuerdo con las respuestas obtenidas se puede suponer que si hicieron uso de equivalencias. No se muestra el uso del algoritmo convencional.

### Ítem 16

16. ¿Cuál debería ser el numerador de la segunda fracción para que cada par sea equivalente? Explica la estrategia que empleaste para resolverlo.

- a)  $\frac{2}{4} = \frac{\square}{10}$
- b)  $\frac{4}{6} = \frac{\square}{15}$
- c)  $\frac{7}{14} = \frac{\square}{10}$

Cuando se trabaja con fracciones equivalentes es muy común observar que éstas sean obtenidas multiplicando el numerador y denominador de la fracción en cuestión por el mismo número. Sin embargo, cuando se hacen comparaciones de fracciones cuyos denominadores no son múltiplos, esta tarea les resulta más compleja. El propósito de colocar éste ítem fue identificar cómo pueden los alumnos, dar solución a estas comparaciones.

Como se esperaba que ocurriera, aun cuando los estudiantes más diestros logran manejar las equivalencias de fracciones por múltiplos, les resulta más complejo identificarlas cuando no corresponden a múltiplos de los datos en cuestión. En éste ítem solamente el 1.3% contestó correctamente. El 26 % no contestó el ítem y el resto del grupo intentó dar alguna respuesta pero no se observa la estrategia empleada para llegar a ella.

### Ítem 19 y 20

19. En un club un tercio de la superficie del terreno se destinará al gimnasio, un sexto a los salones sociales y la mitad a los deportes al aire libre. ¿Quedará terreno para otras instalaciones? Explica tu respuesta.

20. El partido de futbol entre los equipos de “las águilas” y “los delfines” duró dos periodos de  $\frac{3}{4}$  de hora cada uno. Hubo también un descanso de  $\frac{1}{4}$  de hora y un periodo de tiempo extra que duró  $\frac{1}{2}$  hora. ¿Cuánto tiempo pasó entre el primer y último silbatazo?

En el caso de los ítems 19 y 20, es preciso realizar operaciones con fracciones, específicamente sumas y restas. En estos ítems más del 70% de los estudiantes dieron respuestas incorrectas. En el ítem 19 se obtiene un porcentaje más alto de respuestas correctas que en el ítem 20 aun cuando en éste ítem se debe hacer solo una suma, no así en el ítem 19 que debe resolverse una suma primero y después una resta. Sin embargo suponemos que la dificultad en el ítem 20 fue el hecho de que muchos estudiantes no se dan cuenta que el texto del problema indica “dos periodos de  $\frac{3}{4}$  de hora cada uno”; los estudiantes solo consideran un periodo al sumar. Entonces una parte de las respuestas incorrectas podría atribuirse a la lectura del problema. Los alumnos que resuelven correctamente hacen uso de equivalencias, en el diagnóstico no se observó el uso del algoritmo convencional, lo cual podría justificarse por el hecho de que los números en cuestión son múltiplos y sumarlos no representa una gran dificultad como para recurrir al algoritmo, otra explicación posible es que los alumnos no recuerden el algoritmo, sin embargo, si ellos comprenden los significados de la fracción y saben utilizarlos pueden resolver los problemas sin necesidad de algoritmos.

### Conclusión del diagnóstico

Como se puede ver en los resultados, los alumnos reflejan una falta de comprensión con respecto a las fracciones, sus significados y usos. Muchos de los alumnos no han comprendido siquiera el significado parte-todo. No distinguen que las fracciones representan una clase de números diferentes de los números naturales y por lo tanto con propiedades distintas. Como un dato importante se puede apreciar que cuando se propone a los estudiantes una tarea relacionada con operaciones de fracciones aquellos alumnos que comprenden alguno de los significados, como lo es el de equivalencias, son capaces de resolver los problemas sin necesidad de recurrir al algoritmo y más si no lo recuerdan. Gran



parte de las respuestas correctas en cualquiera de los ítems se logró mediante el uso de equivalencias.

### Referencias bibliográficas

- Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of rational numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (5), 323-341.
- Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2006). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 293-316.
- Fandiño, M. (2009). Las Fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos. *Cooperativa Editorial Magisterio, Colombia*.
- Freudenthal, H. (1983). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.
- Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 71-87.
- Kamii, C. & Clark, F. (1995). Equivalent Fractions: Their difficulty and Educational Implications. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 365-378.
- Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor: NFER-Nelson.
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh & D. A. Bradbard (Eds.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics and Environmental Education.
- Nunes, T. y Bryant, P. (1997). *Las Matemáticas y su Aplicación: La perspectiva del niño*. México: Siglo veintiuno Editores.
- Perera, B. y Valdemoros, M. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación matemática*, 21 (1), 29-61.

### Autores

Fabiana Mahtabel Arteaga Cervantes; BUAP, México; [hada061419@hotmail.com](mailto:hada061419@hotmail.com)  
José Antonio Juárez López; BUAP, México; [jajul@fcfm.buap.mx](mailto:jajul@fcfm.buap.mx)