

# UN ESTUDIO DESDE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Mario Adrián Caballero Pérez, Ricardo Cantoral Uriza

## Resumen

En este artículo partimos de una necesidad del individuo de *predecir* estados futuros ante *situaciones de cambio*. Nos preguntamos, ¿cómo se estructura el pensamiento humano para llevar a cabo predicciones ante situaciones de variación continua? Para ello recurrimos a las nociones de *causalidad* y *tiempo* de la psicogénesis con el propósito de investigar el rol que ellas juegan en el estudio del cambio. Postulamos ahora, en el marco de una investigación de corte socioepistemológico, un elemento adicional: la necesidad de la construcción de un *sistema de referencia* y de un *sentido de temporalidad* como condición para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, es decir, para el tratamiento del *cambio* y la *variación*. Para llevar a cabo esta articulación realizamos una revisión bibliográfica de los reportes experimentales piagetianos, utilizando la visión sistémica de la Socioepistemología.

**Palabras Clave: Variación, predicción, causalidad, tiempo.**

## Introducción

En este artículo partimos de una necesidad del individuo de *predecir* estados futuros ante *situaciones de cambio*. Para ello recurrimos a las nociones de *causalidad* y *tiempo* de la psicogénesis, con el propósito de investigar el rol que ellas juegan en el estudio del *cambio*. Postulamos ahora, en el marco de una investigación de corte socioepistemológico, un elemento adicional: la necesidad de la construcción de un *sistema de referencia* y de un *sentido de temporalidad* como condición para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, es decir para el tratamiento del *cambio* y la *variación*.

Como sabemos, el estudio del *cambio* y la *variación* es un elemento indispensable en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, debido a lo cual ha sido tema de interés en diversas investigaciones. Una regularidad en las dificultades detectadas radica en *la centración en los objetos matemáticos*, lo que provoca que los conceptos y procedimientos se conciben como entidades abstractas, preexistentes y externas al estudiante, soslayando la *construcción social del conocimiento matemático* (Caballero y Cantoral 2014). Esta investigación parte de una premisa distinta, fundamentada en la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, donde el énfasis está en las *prácticas* que hacen posible esta *construcción social* (Cantoral, 2013).

En otras palabras, no es el objeto matemático nuestro punto de interés, pues no nos bastará con observar un correcto “uso” de estos ante una actividad, sino que el énfasis estará en cómo las personas tratan con la variación por medio del desarrollo de prácticas, que particularmente en el Cálculo se encuentran ligadas al estudio y predicción de situaciones de variación, pues este posee un carácter dinámico dado que surge de la necesidad de

cuantificar cómo las cosas cambian (conceptos de variable y de función), la velocidad con la que se dan los cambios (la derivada), y la forma en cómo se acumulan los cambios (la integral) (Cantoral, 1990).

Esta naturaleza dinámica es considerada y desarrollada por la línea de investigación Construcción Social del Pensamiento Matemático, que cuenta con una serie de estudios relativos al desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar), donde el énfasis está puesto en las formas de “actuar y argumentar” sobre el *cambio* y la *variación*:

El PyLVar es tanto una línea de investigación como una forma de pensamiento, que se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el *cambio*, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la *variación*. Lo anterior permite significar los conocimientos matemáticos más allá de la sola manipulación simbólica, por medio de ideas variacionales que dieron vida y desarrollaron esos conocimientos (Caballero y Cantoral, 2013).

En (Caballero, 2012) se menciona que una de las tendencias en trabajos sobre PyLVar ha sido el diseño de actividades que propicien el desarrollo de *estrategias variacionales*, pero los resultados muestran que la influencia de la enseñanza previa, sustentada en la *centración en los objetos matemáticos*, repercute en que los estudiantes no cuentan con las herramientas necesarias para hacer un estudio de la variación, tales como la comparación de estados o la estimación de comportamientos, por lo cual recurren al uso de definiciones o propiedades que no son recordadas correctamente, e incluso construyendo teoremas no válidos. De modo que, aunque el propósito sea una descentración de los objetos, esta enseñanza centrada en ellos representa un obstáculo para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Consideramos que un elemento esencial para superar este obstáculo es propiciar la predicción de fenómenos, ya que requiere de estudiar aspectos variacionales para anticipar estados futuros mediante comparaciones, estimaciones y la construcción de modelos de explicación. El estudio de los procesos de cambio exige identificar aquello que cambia en una situación específica, cuantificar sus cambios y analizar cómo estos varían (el cambio del cambio), lo que permite identificar el *carácter estable del cambio*. Esto es, en todo fenómeno de variación existe algo que permanece estable cuando lo demás varía. Por ejemplo, en la caída libre lo identificamos como la *fuerza de gravedad*, que se conserva a pesar del cambio en otros parámetros.

De modo que al identificar el *carácter estable del cambio* es posible predecir, no obstante, falta indagar cómo se lleva a cabo esta identificación, qué elementos se ponen en juego para ello. En ese sentido nos preguntamos ¿cómo se estructura el pensamiento humano para llevar a cabo predicciones ante situaciones de variación continua? Respecto a esto, Caballero y Cantoral (2014) realizan un análisis preliminar a las nociones de *causalidad* y *tiempo* desde los trabajos de Jean Piaget, donde se muestra que el estudio del *cambio* exige de la construcción de *explicaciones causales* y de argumentos de tipo temporal. En el presente trabajo proponemos una articulación de estos elementos en relación al PyLVar que nos permite dar respuesta a la pregunta planteada, y que se expresa en la construcción de un

*sistema de referencia* y el establecimiento de una *temporalidad* para el tratamiento de los fenómenos de variación continua.

Para llevar a cabo esta articulación realizamos una revisión bibliográfica de los reportes experimentales piagetianos (Piaget, 1971; 1977; 1978), para lo cual tomamos como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, que postula que el conocimiento matemático tiene su origen en el conjunto de prácticas humanas que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2013), llamadas *prácticas sociales*, las cuales se entienden como normativas de la actividad humana. Al enfocar nuestra atención en las prácticas sociales, la socioepistemología nos permite analizar el pensamiento y lenguaje variacional de las personas, y las prácticas ejercidas ante situaciones de variación por los grupos humanos. En Cálculo algunas de las prácticas identificadas son la comparación, seriación, estimación y predicción (Caballero, 2012), que surgen de la necesidad de predecir estados futuros. Para la revisión bibliográfica se analizó cómo los conceptos de *causalidad* y *tiempo* permiten tratar con el cambio y la variación.

### Estudios sobre lo causal desde el PyLVar

En la naturaleza nada permanece constante, todo se encuentra en un estado continuo de transformación y cambio, que percibimos y en el que estamos inmersos. Ante tal situación surge la necesidad de anticiparse a los estados futuros de la naturaleza, lo que ha llevado a la construcción de conocimiento matemático para entender este carácter dinámico. En la Física esto se ha sustentado en corrientes *deterministas*, paradigma bajo el cual nada surge de la nada, todo tiene antecedentes, y nada desaparece sin dejar huellas (Álvarez, 2006), todo tiene una causa y efecto, es decir, existe una *causalidad* en la relación entre los acontecimientos.

Desde la perspectiva psicogenética sobre la *causalidad*, el establecimiento de dicha relación se sustenta en las *explicaciones causales*, que consisten en los procesos mentales que permiten la explicación de las causas que originan algún hecho, mostrando qué transformaciones se produjeron entre los estados observados (Piaget, 1977). Si bien un fenómeno puede parecer complejo, la identificación de transformaciones permite establecer estas explicaciones. No obstante, estas no se obtienen a través de simples observaciones de regularidades, la *explicación causal* debe estar incluida en un sistema explicativo del cual se deduce la relación. Por ejemplo, imaginemos un resorte que es sujetado de uno de sus extremos a una vara. Se tiene también esferas de diferentes pesos y tamaños que son colocadas en el otro extremo del resorte, y se pregunta ¿cuáles esferas provocan que el resorte se alargue más? Ante esta pregunta se pueden considerar una variedad amplia de variables, desde el material del que están hechas las esferas o el resorte, la altura a la que se coloca, su longitud, el tamaño de las esferas o su peso, entre otras.

Una *explicación causal* a este problema consiste, entonces, en relacionar los efectos observados (el alargamiento del resorte) con las diferentes variables consideradas, con la finalidad de determinar cuáles tienen un efecto significativo en el alargamiento. En un principio se puede pensar que entre más grande sea la esfera mayor será el alargamiento, pero pronto se descubre que dichas variables no se encuentran en una relación causal, dado que una esfera de menor tamaño puede provocar un alargamiento mayor que una esfera más grande. Lo que se encuentra en relación causal en dicho evento es **el peso** de las esferas,

relación que es encontrada por medio de la experimentación, y al hacerla explícita deviene en una *explicación causal*.

De manera que al hablar de las relaciones causales, estas no se encuentran explícitas en la naturaleza, sino que se trata de ciertas regularidades extraídas de la experiencia (Varela, 2005), que dan una racionalidad a los fenómenos observados mediante la construcción de *explicaciones causales*. En ese sentido, sostenemos que el estudio de *lo variacional* exige de *explicaciones causales*, ya que “ante un fenómeno de variación continua, en donde se busca la *predicción* de estados futuros, se deberá identificar las transformaciones realizadas (aquello que cambia) y las relaciones entre las variables involucradas (la variación que se presenta)” (Caballero y Cantoral, 2014, p. 310), de modo que por medio de *lo causal* es posible conocer la *variación* de un fenómeno, y en un sentido más amplio, identificar *el carácter estable del cambio* al medir o cuantificar el *cambio* expresado en las variables, los cambios de los cambios, etc.

Dicha cuantificación no puede ser arbitraria, debido a pequeñas perturbaciones que pueden existir en un fenómeno (Bunge, 1962) y que a la larga puede llevar a modificaciones esenciales. Es necesario llevar la situación estudiada a un sistema explicativo a partir del cual construir la relación causal incluso aunque las perturbaciones sucedan. En el caso de los fenómenos de variación dicho sistema explicativo convenimos en llamarlo *sistema de referencia*, pues es con base en este que se establecerá la relación causal (la forma de variación). En otras palabras, el estudio variacional de un fenómeno es realizado a partir de un *sistema de referencia*, que postulamos incluye los siguientes elementos:

**Variables:** Bajo la premisa de identificar lo que cambia, se eligen las variables que se consideran significativas, analizando las relaciones entre ellas. Esta elección influirá en el estudio variacional del fenómeno, pues con diferentes variables se puede llegar a establecer diferentes relaciones.

**Cuantificación:** Una vez elegidas estas variables se debe disponer de mecanismos para cuantificar los cambios. Estos pueden ser de diferente índole: herramientas para una medición cuantitativa (regla graduada o reloj), sobreponer las magnitudes de dos objetos para mostrar diferencias en una medición cualitativa, o bien, estimaciones subjetivas de las magnitudes. Una constante en lo anterior es *la comparación*, entendiéndola como una *estrategia variacional* (Caballero y Cantoral, 2013). Esto debido a que se compara la medida conocida de un objeto con otro del que desconocemos su medida, y con base en ello determinamos si son iguales (el caso de la regla graduada) o diferentes.

**Elemento de comparación:** En el punto anterior postulamos que para cuantificar el *cambio* se recurre a una *comparación*, pero esta no es arbitraria, sino que debe tener un referente a partir del cual establecer dicha comparación. Por ejemplo, al medir longitudes podemos recurrir a una regla graduada, de modo que la longitud del objeto es comparada con la longitud establecida de la regla. En ese sentido, la regla graduada funciona como aquel referente para establecer la comparación. En cambio, si usamos un objeto distinto como el tamaño de la mano, el referente pasa a ser la mano. Por tanto, hablaremos de un *elemento de comparación* a partir del cual establecemos la cuantificación del cambio.

Con base en lo anterior, una *explicación causal* dependerá de la elección de los elementos esenciales de una situación específica, que convenimos en llamar *sistema de referencia*, con base en el cual se establecen relaciones que permitan explicar la ocurrencia de los hechos observados (*lo variacional*) mediante una cuantificación del cambio a partir de la comparación de magnitudes en el sentido de *estrategias variacionales*.

### **El rol del tiempo en el PyLVar**

El estudio del *tiempo*, en cuanto a su concepción y construcción presenta dificultades debidas a su naturaleza, pues suele ligarse al estudio de fenómenos y sucesos que ya no existen, o que aún no suceden, y por tanto no pueden ser reproducidos a voluntad. Esto ocasiona que el tratamiento de las comparaciones y estimaciones de la duración de un suceso sea un tema delicado, debido a que en dichas situaciones “nos vemos obligados a reconstituirlas en lugar de poder percibir las en un todo simultaneo, o volver hacia atrás y reajustar la atención, como en las comparaciones perceptivas espaciales o incluso cinemáticas” (Piaget, 1971, p. 76). El problema por tanto, estriba en comprender cómo se reconstituyen los eventos percibidos, y las operaciones empleadas.

Para Piaget (1971) estas operaciones surgen como el producto de una relación entre aquello que ocurre (desplazamientos, frecuencias, trabajo efectuado, etc.) y la velocidad con que sucede (total de distancia recorrida, medida de la frecuencia, cantidad de trabajo realizado, etc., en relación a la duración del evento). Bajo esta visión, la duración de un evento, y por tanto la noción misma de *tiempo*, se encuentra ligado al propio observador, pues será él quien, mediante la utilización de instrumentos, herramientas o la propia percepción, determinará esa velocidad.

De manera que al tener el *tiempo* un desarrollo basado en el tipo de relación que el sujeto establece, los errores iniciales en su construcción provienen de que en las relaciones planteadas la velocidad comienza por descuidarse, lo que lleva a juzgar la duración solamente por los resultados observados (Piaget, 1971; 1978), soslayando el desarrollo mismo del evento. Para ejemplificar las relaciones que el sujeto puede establecer, consideremos una situación de movimiento de dos objetos que siguen trayectorias paralelas, que parten de puntos diferentes en el mismo instante con velocidades diferentes, y deteniéndose simultáneamente.

Inicialmente la velocidad de los móviles se mantiene constante en el razonamiento del niño, lo que hace que se fije solamente en la distancia recorrida y juzgue que el móvil que avanzó más lejos tardó más *tiempo* que el otro. Este tipo de razonamiento es acorde con las dificultades que Piaget manifiesta acerca del desarrollo del *razonamiento causal*, pues se centra únicamente en los resultados finales sin analizar la manera en cómo se desarrolla el evento (Caballero, 2012), lo que caracteriza la ausencia de *explicaciones causales*. Es así que en el ejemplo anterior, la duración se encuentra anclada al total de trabajo realizado (distancia recorrida) y no al comportamiento del móvil (su velocidad). En ese sentido, no existe una diferenciación entre *lo espacial* y *lo temporal*, pues se centra en el estado final del movimiento, aislándolo de su forma de realización.

De modo que la identificación y medición de las variables involucradas, al igual que en las relaciones causales, no es suficiente en el estudio del *tiempo*, se requiere establecer relaciones entre ellas. Para ello intervienen operaciones ligadas a la construcción de *explicaciones causales*, denominadas *reversibilidad* y *seriación*.

Los fenómenos temporales tienen la característica de que dejan de existir a medida que suceden, por tanto se requiere reconstruir esos eventos. Se entiende por *reversibilidad* esta reconstrucción que permite analizar el desarrollo a pesar de que ya no es observable. Esta operación le da una característica al *tiempo* que lo diferencia de nociones espaciales, ya que si el espacio describe el orden de los eventos simultáneos, el *tiempo* describe el orden de sucesión de los eventos que no son permitidos simultáneamente (Piaget, 1971).

De manera que al estudiar el *tiempo* se identifican estados intermedios en un acontecimiento que dan cuenta de su forma de realización. No obstante, dichos estados no suceden aleatoriamente, sino que tiene un cierto orden que se establece bajo una lógica basada en la *explicación causal*, y que permite realizar una *seriación* de los acontecimientos. Esta idea asociada a *lo causal* lleva implícita una dirección de sucesión, ya que la relación causal entre eventos se constituye sobre la base de que la causa antecede al efecto, por lo que se puede considerar que las *explicaciones causales* son una estrategia de los individuos para organizar la experiencia de acuerdo con un orden temporal. En ese sentido, la *predicción* de fenómenos de variación continua, si bien no siempre involucra el *tiempo* como una variable explícita, este se encuentra implícitamente involucrado a través del concepto mismo de proceso de cambio, donde el papel del *tiempo* es el de identificar o establecer la lógica de sucesión de dicho proceso.

Para ejemplificar lo anterior consideremos las actividades de llenado de recipientes presentados en Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, (2002), donde se pide anticipar la gráfica de la relación altura – volumen de algunos recipientes de formas distintas. El objetivo es identificar los niveles de razonamiento covariacional al correlacionar los cambios en las alturas con los cambios en el volumen. Para ello se identifican o postulan estados intermedios en el crecimiento de las alturas, lo que permite correlacionar dichos estados con el crecimiento del volumen.

En dichas actividades el *tiempo* no está presente como variable explícita, sin embargo, en la *seriación* al crecimiento de las alturas encontramos inmersa esta noción, dado que se establece un orden de sucesión al crecimiento. Dicho orden no es arbitrario, se construye con base en una *explicación causal*, que consiste en que una altura mayor corresponde a un estado posterior (volumen mayor), en tanto que una altura menor corresponde a uno anterior (volumen menor).

Es así que mediante la *reversibilidad* y *seriación* se logra construir las relaciones temporales de un evento, que a su vez se encuentran ligadas la experiencia introspectiva y a la experiencia física, es decir, dependen del sujeto y de la relación que establezca con el evento observado (Piaget, 1971). Estas operaciones nos llevan a considerar el *tiempo* no únicamente en el sentido de una medida o variable de una relación funcional, sino en un *sentido de temporalidad*. Con esto nos referiremos a que el estudio del *tiempo* consiste en una división del fenómeno en estados sucesivos, cuya secuencia se determina por la *explicación causal* entre dichos estados.

Este *sentido de temporalidad* en relación al PyLVar permite analizar el comportamiento de un fenómeno de variación continua y argumentar sobre la *variación* mediante el análisis de los procesos de cambio de un estado a otro. Para ello, una vez identificado o postulado estados intermedios, se recurre a las *estrategias variacionales* (Caballero y Cantoral, 2013) para estudiar el comportamiento variacional de un estado a otro, las cuales requieren del

sistema de referencia para su uso. Por lo tanto, ambos constructos son complementarios, de ahí que promueve el estudio del *cambio* y la *variación*.

## Reflexiones finales

En este escrito hemos realizado un análisis desde la Socioepistemología a las nociones de *causalidad* y *tiempo* bajo la perspectiva de los trabajos de Piaget, y los hemos relacionado con las ideas del pensamiento y lenguaje variacional. Por un lado, con base en el estudio de la construcción de *explicaciones causales* postulamos la necesidad de construir un *sistema de referencia* para el estudio de la *variación* en una situación específica, el cual está constituido por una selección de variables, la cuantificación del *cambio* y elementos de comparación. Este sistema funciona como un marco explicativo sobre el comportamiento variacional de un fenómeno al permitir identificar aquello que cambia, cómo y cuánto cambia.

Por otra parte, del desarrollo de la noción de *tiempo* encontramos que se encuentra inmerso en los fenómenos de *variación*, pero no solamente en el sentido de variable o medida sino en un *sentido de temporalidad* que permite establecer un orden de sucesión de estados a partir de los cuales se analiza los procesos de cambio. Es decir, el pensamiento humano ante situaciones que involucran *variación*, establece una *temporalidad* a dichas situaciones para poder estudiar los procesos de cambio involucrados.

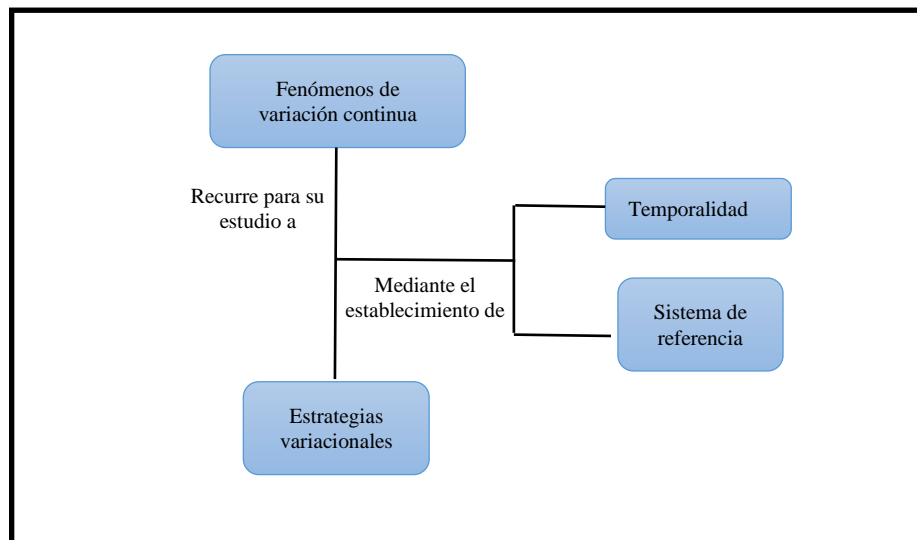


Figura 1: Articulación del sistema de referencia y temporalidad en el estudio del cambio.

Ambos constructos, *sistema de referencia* y *temporalidad*, sostenemos se articulan en el pensamiento humano ante el desarrollo de prácticas predictivas (Figura 1), y por tanto en la identificación del *carácter estable del cambio*. Esta articulación se sustenta en que el estudio de la *variación* precisa del uso de *estrategias variacionales* (Caballero, 2012), pero esto mediante la conjugación de la *temporalidad* y el *sistema de referencia*, ya que el primero permite establecer una sucesión de estados que permite hacer explícito el proceso de cambio involucrado, y el segundo estudiar esos procesos de cambio.

Hasta el momento hemos propuesto esta articulación con base en los estudios piagetianos, que sostenemos nos permite explicar cómo el pensamiento humano se estructura ante la

predicción de fenómenos de variación continua. En la siguiente etapa de la investigación se realizará el diseño de actividades de variación que nos permitan corroborar la articulación propuesta mediante el análisis de las respuestas de estudiantes de bachillerato de México. Estas actividades se contemplan diseñarlas con base en los tópicos del currículo de bachillerato, incluyendo contextos dentro de la matemática, física, entre otros. Para ello se tomará como eje central el estudio del cambio y la variación por sobre los objetos matemáticos.

## Referencias

- Álvarez, J. (2006). La causalidad en la física: Johannes Kepler. *Boletín de la sociedad Mexicana de Física*, 20(3), 23 – 32.
- Bunge, M. (1972). *Causalidad: El principio de causalidad en la ciencia moderna*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.
- Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 1007 – 1015.
- Caballero, M. y Cantoral, R. (2014). Pensamiento y Lenguaje Variacional: Un estudio sobre mecanismos de construcción del conocimiento matemático. *Memorias de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 17, 307 – 314.
- Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Praedación entre las nociones de “el Prædicere y lo Analítico”*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 1-9.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. Gedisa Editorial.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for research in mathematics education* 33, 35 -278.
- Piaget, J. (1971). The Development of Causality. En J. Piaget (Eds.), *The construction of reality in the child* (pp. 247 – 361), United States of America, Ballantine Books.
- Piaget, J. (1977). Causality and Operation. In J. Piaget y R. Garcia (Eds.), *Understanding Causality* (pp. 1 – 10), United States of America: Norton Library.
- Piaget, J. (1978). *El desarrollo de la noción de tiempo en el niño*. México: Fondo de Cultura Económica.



Varela, O. (2005). Causalidad y Mecánica Cuántica. *Versiones*, 4, 119 – 124.

**Autores**

*Mario Adrián Caballero-Pérez*; CINVESTAV, IPN. México; [macaballero@cinvestav.mx](mailto:macaballero@cinvestav.mx)

*Ricardo Cantoral Uriza*; CINVESTAV, IPN. México; [rcantor@cinvestav.mx](mailto:rcantor@cinvestav.mx)