EMERGENCIA DE LO HIPERBÓLICO EN UN CONTEXTO DE VARIACIÓN INVERSA

Aurea Guillermo Castellanos, Daniel Ortiz May, Landy E. Sosa Moguel

Resumen

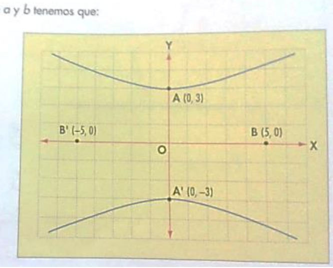
En el presente trabajo se reporta un estudio socioepistemológico acerca de lo hiperbólico a propósito del problema de aprendizaje que representa la ausencia de la interpretación de la hipérbola como modelo matemático. A partir de un análisis sistémico de las dimensiones social, epistemológica, didáctica y cognitiva se determinó que la construcción y significación del saber *hipérbola* están asociados al estudio de lo *hiperbólico* como una forma de razonamiento matemático. Así pues, la intención del trabajo es determinar las formas, razonamientos y contextos en los que emerge lo hiperbólico en estudiantes de bachillerato mediante la aplicación de un diseño didáctico basado en una situación de modelación del movimiento, bajo un contexto de variación inversa.

Palabras clave: Contextos, variación inversa, hiperbólico, socioepistemología.

Introducción

La desarticulación entre las múltiples representaciones conceptuales que subyacen en el discurso escolar sobre la hipérbola tales como: una forma geométrica estática (curva) obtenida al seccionar un cono doble por un plano, su representación gráfica asociada a la idea de lugar geométrico y sus expresiones o modelos algebraicos, suscita limitaciones cognitivas en el trabajo de los estudiantes que imposibilitan el desarrollo de su habilidad para emplear, seleccionar y moverse entre las representaciones algebraicas y gráficas (Knuth, 2000), lo cual hace a los estudiantes priorizar los cálculos algebraicos por encima de las ideas geométricas asociadas a éstos (Díaz, 2007). Asimismo, da lugar a la dificultad para realizar la representación coordinada del contenido matemático relativo a las secciones cónicas, particularmente para mirar a las figuras geométricas como objetos algebraicos, y viceversa (Arcos, 1998).

Tras el análisis de libros de texto tales como el de May, Pech y Reyna (2003), se observó que en el tratamiento de la hipérbola predomina el estudio de ésta como figura geométrica estática que se obtiene al seccionar un cono doble, haciendo énfasis en el análisis de sus “elementos” como lugar geométrico y en la determinación de la ecuación que le corresponde a partir de fórmulas (Imagen 1).


Dado que la hipérbola es vertical, su ecuación es de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Por tanto, sustituyendo los valores de a y b tenemos que:

$$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{5^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$$

$$\frac{25y^2 - 9x^2}{225} = 1$$

$$25y^2 - 9x^2 = 225$$

$$25y^2 - 9x^2 - 225 = 0$$

Imagen 1. Tratamiento algebraico de la hipérbola: determinación de su ecuación a partir de sus vértices

Empero en los textos se muestra una desafiliación con el estudio de lo variable, ya que el discurso presenta rupturas entre la forma geométrico-algebraica de la hipérbola, detectándose la ausencia de sentido y significación de ésta como modelo del comportamiento de relaciones entre variables en situaciones variacionales específicas.

Un discurso escolar de las secciones cónicas que es unidireccional, es decir, que parte de la representación estática de lugares geométricos en gráficas y se hace corresponder con expresiones algebraicas canónicas, soslayan el estudio de lo variable e inhiben la capacidad de interpretación y representación de lo hiperbólico en contextos variacionales. Históricamente, el origen y desarrollo de la Geometría Analítica en general y de las secciones cónicas en particular, se basó en la conexión de este contenido geométrico con su forma algebraica a través de la idea de magnitud variable que surgió del estudio del movimiento, adquiriendo importancia práctica las cónicas para la astronomía, la mecánica y la tecnología en la época de Descartes. Dicho desarrollo se basó en la idea de Descartes de considerar a x e y en una ecuación, no como incógnitas, sino como variables, de modo que la ecuación expresaría la interdependencia entre dos variables (Delone, 1956).

Contrario a la naturaleza epistemológica de la hipérbola, se concluye que en el escenario de su tratamiento escolar antes dibujado, no se favorece el desarrollo de formas de pensamiento para establecer y representar relaciones entre variables o identificar comportamientos de curvas que permitan generar modelos hiperbólicos en situaciones de esta naturaleza, ocultándose el sentido y significado del saber. Siendo así, se reconoce el problema que representa la ausencia de interpretación de la hipérbola como modelo matemático.

Epistemológicamente, el origen de la hiperbólica y las secciones cónicas tiene lugar en el trabajo de Hipócrates de Quíos para resolver el problema de la duplicación del cubo mediante la determinación de dos segmentos x e y que interpola entre dos medias proporcionales a (longitud de la arista del cubo) y $2a$ para establecer la proporción continua: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. De esta relación se obtienen dos curvas parabólicas y una hiperbólica, ésta última de tipo equilátera dada por la expresión $xy = 2a^2$. La búsqueda de una interpretación geométrica que justifique dicha expresión algebraica es un detonante para el desarrollo de la hipérbola y es ofrecida por Menecmo hacia el 350 a.C. Él identificó que para la resolución del problema existe toda una familia de curvas con tal propiedad, obtenidas al seccionar conos rectos por un plano perpendicular a su generatriz, siendo de tres tipos según si el ángulo en el vértice sea agudo, recto u obtuso. La hipérbola era la curva de la sección resultante de intersectar un cono obtusángulo. (Boyer, 1986)

Prescindir del cono para el estudio de las propiedades inherentes de la hipérbola dio lugar a la noción de hipérbola como lugar geométrico, y al estudio de las aplicaciones de ésta en el movimiento de planetas (Boyer, 1986). Sin embargo, es a través de la introducción de un sistema de coordenadas por parte de Descartes que se permite la conexión de su forma geométrica a la algebraica dando lugar a la evolución y desarrollo de la hipérbola como modelo, pues como se señaló anteriormente, para él una ecuación con dos "incógnitas" representa la interdependencia entre dos variables y reescribiéndola en la forma $F(x, y) = 0$. Así, "en el plano cartesiano a cada par de valores x e y corresponde un punto y, recíprocamente, a cada punto corresponde un par de coordenadas x, y" (Delone, 1956).

Luego, la ecuación $F(x, y) = 0$ determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación y estará representado por una curva; y viceversa, un lugar geométrico caracterizado por una condición geométrica puede definirse mediante una ecuación que exprese tal condición en lenguaje algebraico, por medio de coordenadas.

Nótese el cambio conceptual del uso de las literales en las expresiones algebraicas, a diferencia de los griegos, en la Geometría Analítica de Descartes, éstas no representarían segmentos sino magnitudes variables. De allí que, el estudio de comportamientos variables a través de su representación como curvas en unión con su expresión algebraica, posibilitó la evolución de la noción de hipérbola como forma geométrica a modelo de relaciones entre variables. Esto último se evidencia en los contextos de uso de lo hiperbólico en el ámbito científico y profesional hoy en día, por ejemplo, para describir el comportamiento de situaciones de movimiento mecánico (como la segunda ley de Newton y la ley de la Palanca), trayectorias (cuerpos celestes y partículas subatómicas), o relaciones entre variables no geométricas (como la Ley de Boyle o la Ley de Ohm). En estos contextos puede reconocerse a lo hiperbólico en relación con la constantificación de lo variable, por ejemplo, para modelar la conservación del área (constante) de rectángulos al variar las longitudes de su base y altura.

Siguiendo esta línea de desarrollo y evolución de la hipérbola, se detecta a lo hiperbólico como el elemento articulador de sus representaciones y significaciones en su proceso de construcción social, particularmente situado en contextos de variación inversa. Por ende, asumimos que lo hiperbólico, en tanto forma de razonamiento asociada a la interpretación y representación de un comportamiento de relación inversa entre variables, permite resignificar a la hipérbola. En otras palabras, decimos que para el aprendizaje de la hipérbola habría que situarse en el estudio y entendimiento de lo hiperbólico. Por tanto, a partir de un estudio socioepistemológico pretendimos caracterizar a lo hiperbólico como una forma de razonamiento matemático en un contexto de variación inversa, por medio de investigar cómo emerge lo hiperbólico en una práctica de modelación del movimiento.

Marco Teórico

Esta investigación se enmarcó teóricamente en la Socioepistemología, puesto que el estudio de la construcción social del conocimiento relativo a la hipérbola, se basó en el análisis sistémico de las dimensiones cognitiva, didáctica, epistemológica y sociocultural asociadas a ese saber. Asimismo, se reconoce que la construcción de conocimiento matemático y su aprendizaje obedecen al contexto en que se desarrollan las personas al realizar una actividad humana socialmente compartida (Cantoral, 2013).

El aprendizaje es contextual, las personas movilizan su cognición en función de los contextos en que se sitúen. Por ejemplo, en tareas de aprendizaje matemático, los razonamientos de los estudiantes se hallan en estrecha relación con la naturaleza de la actividad planteada; las condiciones socio-culturales en las que se encuentra un individuo son determinantes en su manera de actuar y pensar (Aparicio, Sosa, Tuyub y Jarero, 2012).

En general, la perspectiva socioepistemológica no se enfoca en un saber en particular, sino que proporciona una visión más global respecto al proceso didáctico, integrado por docente, alumno y saberes validados para ser enseñados, que confluyen en una realidad particular inmersos en una cultura y tiempos específicos, lo que confiere matices a las relaciones establecidas entre los mismos (Ferrari y Farfán, 2002).

Desde una postura socioepistemológica centrada en el análisis de las prácticas, usos y contextos ligados a la construcción de conocimiento matemático, ha sido posible proponer perspectivas didácticas alternativas no sólo acerca de nociones como lo logarítmico, lo periódico, las funciones y lo variacional, etc. (Farfán y Ferrari, 2010; Buendía, 2011), por mencionar algunos ejemplos. Bajo esta perspectiva de estudio de los fenómenos didácticos, se profundiza en el entendimiento de los procesos de producción y difusión del saber matemático, incorporando no sólo referentes de la génesis conceptual o procedimental, sino también su contexto de origen social, con el fin de esclarecer ejes rectores en su estudio y proponer epistemologías alternativas para la matemática escolar.

Metodología

El desarrollo de esta investigación cualitativa y experimental, parte de una problematización socioepistemológica de lo hiperbólico, pues permite "identificar aquellas significaciones que le son propias al saber y que se diluyen, se transforman o se pierden al configurar un discurso escolar, pero que lo caracterizan como un saber funcional en escenarios específicos" (Montiel y Buendía, 2012, p. 63). De modo que, tanto la problemática de aprendizaje como el diseño del instrumento se sustentan en un análisis socioepistemológico acerca de lo hiperbólico, en específico, en el análisis de la naturaleza epistemológica y didáctica de la hipérbola, así como sus usos en escenarios no escolares.

En dicho análisis se identificó que, contrario a las rupturas en el tratamiento didáctico y aquellas cognitivas en los estudiantes, la construcción y significación de la hipérbola estuvo asociada al estudio de lo hiperbólico para representar gráfica y simbólicamente el comportamiento de relaciones inversamente proporcionales entre variables en situaciones específicas.

Con el propósito de determinar cómo emerge lo hiperbólico en los razonamientos de estudiantes de bachillerato en una situación de simulación-modelación del movimiento de un objeto, se elaboró un diseño didáctico con eje rector en la práctica de modelación y el estudio del comportamiento hiperbólico que se describe en la situación, considerando las siguientes variables identificadas en el estudio socioepistemológico:

i. el análisis de lo hiperbólico como cualidad de una curva;

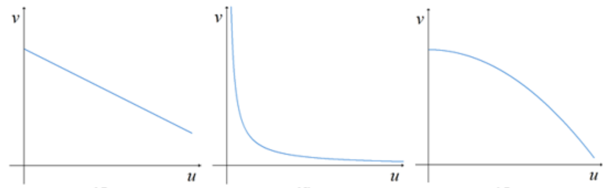
ii. la representación gráfica y algebraica de lo hiperbólico como modelo de una relación inversamente proporcional entre variables.

El diseño está compuesto por cinco tareas que se exponen a continuación:

1. Cada una de las siguientes gráficas representa una relación entre las variables u y v.

a) Explica detalladamente la relación entre las variables a partir de cada gráfica.

b) Explica ampliamente si las gráficas presentan algo común o no, en su caso indicarlo.



Gráfica A **Gráfica B** **Gráfica C**

2. El archivo **Movimiento1.gsp** contiene la simulación del movimiento de un objeto con diferente masa cuando éste es impulsado por una fuerza de $24N$ *(Newtons)* para ponerlo en movimiento. Analiza la simulación para realizar lo que se indica a continuación.

a) ¿Cómo describes el movimiento observado en términos de la aceleración (a) y la masa (m)?

b) Bosqueja la gráfica que representa la relación entre las variables masa (m) y aceleración (a) del objeto.

3. En el archivo **Movimiento2.gsp** se ilustra cómo varía la aceleración de un objeto conforme aumenta su masa al aplicarle una fuerza constante de $48\,N$ que lo pone en movimiento.

a) Analiza la simulación y determina si un objeto con masa de $12\,Kg$ que acelera a $4\,m^2/s$ satisface la relación mostrada en la simulación entre la m y a del objeto en movimiento. Explica el porqué de tu respuesta.

b) Determina si el punto $(6, 8)$ pertenece a la curva que modela la relación entre la m y a del objeto en movimiento.

c) Propón una expresión algebraica que permita calcular la aceleración del objeto para cualquier masa, al aplicarle dicha fuerza.

4. Indica si alguna de las gráficas del Ejercicio 1 describe el comportamiento de esa expresión algebraica. ¿Por qué sí o no?

5. Analiza las siguientes situaciones y determina cuáles podrían modelarse con el tipo de gráficas y expresiones algebraicas de las Situaciones 2 y 3. Argumenta tu respuesta para cada una.

a) El volumen de un gas en un recipiente según la presión aplicada sobre éste.

b) El valor de un vehículo con respecto al tiempo después de un año de ser adquirido.

c) La relación entre la medida de la base y la altura de rectángulos con áreas equivalentes.

d) La altura de una persona según su edad.

Imagen 2. Tareas del diseño didáctico.

En la Tarea 1 se pretende describir el comportamiento de una relación entre variables de un escenario gráfico, esperando puedan tener un reconocimiento inicial de lo hiperbólico en forma de curva. La Tarea 2 tiene por finalidad el estudio del comportamiento hiperbólico de una relación entre variables en un contexto fenomenológico (situación de movimiento) mediante una animación que ilustra la relación entre la masa y la aceleración de un objeto que es sometido a una fuerza constante, y donde varía la masa del objeto. Las Tareas 3 y 4 se desarrollan dentro de un contexto geométrico-algebraico, enfocadas a la representación de una curva hiperbólica como lugar geométrico y su representación gráfica como relación entre variables, mediante una animación que muestra la variación de los valores de masa y aceleración de la situación anterior. Finalmente, en la última tarea se propone una asociación del comportamiento hiperbólico con modelos gráficos y algebraicos, partiendo del análisis de la relación entre variables involucradas en diversas situaciones fenomenológicas.

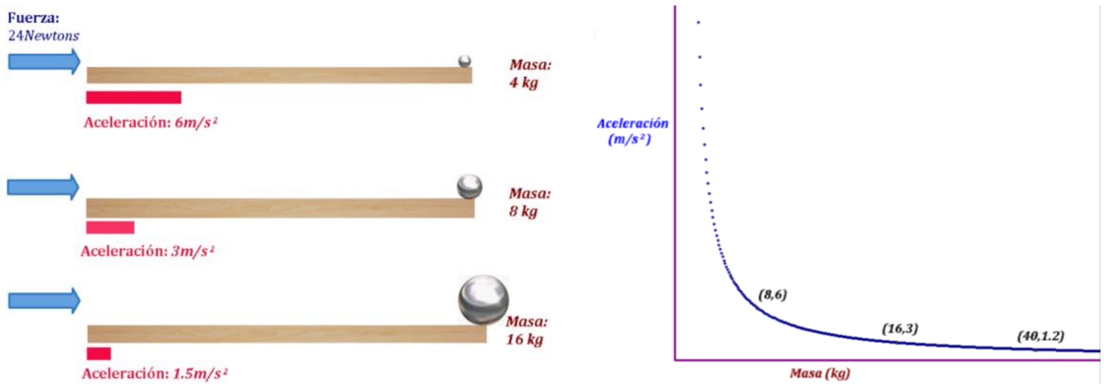


Imagen 3. Muestra de las animaciones Movimiento1.gsp y Movimiento2.gsp

La experimentación del diseño se llevó a cabo con diez estudiantes de bachillerato, organizados en cinco binas, con conocimientos elementales de Geometría Analítica y sin algún tipo de aprendizaje escolar previo sobre la hipérbola. Posterior a ello, se analizaron la ***forma*** *(geométrica, algebraica, variacional o numérica)*, las **situaciones** (gráfica, fenomenológica,…) y los **argumentos** (geométricos, algebraicos, numéricos, variacional) con que los estudiantes razonaron o concibieron lo *hiperbólico*.

Hacia una caracterización de lo hiperbólico

En la actividad se identificaron tres formas de emergencia de lo hiperbólico en los estudiantes:

- **Lo hiperbólico como una forma de variación entre cantidades:** Los estudiantes caracterizan una relación hiperbólica entre variables como una forma de variación inversa, en la que el aumento de una de ellas resulta en la disminución de la otra siempre que una el producto de éstas sea constante. Esta caracterización surge en la Tarea 2, en la que se menciona que "*mientras la masa aumenta, la aceleración disminuye",* e incluso se incluye una cuantificación por parte de los integrantes de los equipos:

Bina C: *Que mientras la fuerza ejercida sea siempre la misma, a mayor masa (m) menor será la aceleración (a) del objeto.*

Bina E:
- *Cada vez que la masa aumenta al doble, la aceleración disminuye a la mitad.*
- *Tienen una relación inversamente proporcional, mientras una aumenta (en este caso la masa), la otra disminuye (la aceleración).*
- *La aceleración por la masa es igual a la fuerza de 24N. O sea que* $(m)(a) = F$.

La resolución de la Tarea 5 también da cuenta de esta forma de lo hiperbólico, pues se distinguen los fenómenos de naturaleza hiperbólica a partir de reconocer relación de variación inversa. Por ejemplo, al identificar la presencia de una constante involucrada en dicha relación:

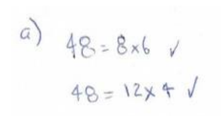
Bina C: *5.- a) ~~Si~~ No, porque para que nos de la gráfica similar a el problema 2 y 3, tienen que haber 3 valores, donde la relación de 2 de estos valores sea el resultado del 3ro.*

b) No, es lo mismo que en el inciso a.

c) Si, porque la relación entre los valores de la altura y la base nos dan el valor del área asignado.

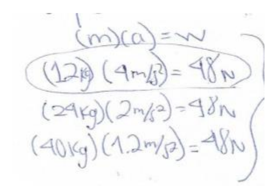
- **Lo hiperbólico como curva que describe un comportamiento variacional:** Se identifica como una gráfica simétrica que no posee propiedades lineales en la Tarea 1. Los estudiantes caracterizan a dicha curva como una representación del comportamiento de variables que gráficamente tienen la misma distancia respecto a los ejes y no los tocan. También como una gráfica asociada a un comportamiento numérico entre los valores de las coordenadas de puntos, tales que su producto es constante, y que satisfacen dicha relación o propiedad específica. Esto puede interpretarse en lo desarrollado en la Tarea 3, a) y b):

Bina C: *a) El objeto de 12 Kg si adquiere la aceleración de 4m/s^2 si satisface la resolución mostrada porque F=m*a. Entonces si la fuerza vale 48, la masa por la aceleración debe dar 48 lo cual es correcto.*



b) Sí, el punto (6,8) sí pertenece a la curva porque cuando la masa valga 6, la aceleración debe valer 8 para que se obtenga la misma fuerza.

Bina E: *a) Sí satisface la relación porque al hacer los cálculos obtenemos que también la magnitud de la fuerza aplicada en el objeto es de 48N.*



b) (6 Kg)(8 m/s^2)=48N

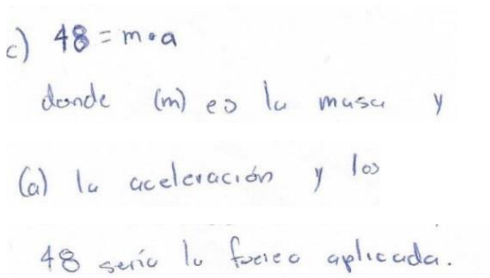
Sí pertenece a la curva

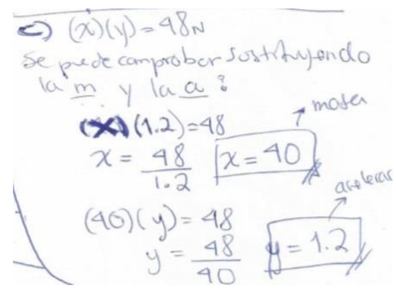
Existe una fuerte conexión entre las diferentes formas en las que emerge lo hiperbólico en los estudiantes. En algunos casos, los estudiantes incluyen argumentos variacionales y geométricos.

En una de las respuestas de la Tarea 4 se muestra otra dualidad entre las formas de lo hiperbólico: curva-algebraica, en la que los estudiantes asocian la gráfica hiperbólica a una expresión matemática que representa una relación numérica (producto constante de dos cantidades) y al mismo tiempo incluyen un argumento de variación inversa que resulta de dicha relación.

Bina C. *4.- La gráfica B.- Porque para llegar a dicho resultado, se tiene que multiplicar los valores, entonces al multiplicar esos valores, puede que uno disminuya, pero por consiguiente el otro valor aumentará para siempre obtener el mismo resultado.*

- **Lo hiperbólico como un modelo algebraico:** Se favorece bajo el contexto fenomenológico de variación inversamente proporcional de la masa y la aceleración, con base en argumentos numéricos y variacionales. En el inciso C de la Tarea 3 se nota que lo hiperbólico representa un modelo que describe el producto constante de dos cantidades que varían, es decir, un fenómeno es de naturaleza hiperbólica si se puede modelar mediante una expresión algebraica de la forma $x \cdot y = k$, con k constante.





Los estudiantes emplean también la expresión algebraica para validar si cierto par ordenado representa una correspondencia masa-aceleración apegada al sistema presentado en las simulaciones de movimiento en las Tareas 2 y 3.

Conclusiones

En este trabajo se asumió que el entendimiento de *lo hiperbólico* es fundamental para la construcción del concepto *hipérbola*. La forma más inmediata que se percibe de lo hiperbólico en las respuestas de los estudiantes fue como una *forma de variación inversamente proporcional*. Se pudo observar que para decidir si una situación es de carácter hiperbólico o no, el primer paso que realizan los estudiantes es analizar si existe una relación de variación inversa. La inclusión de las variables didácticas en el diseño influyó en el surgimiento de otras dos formas de concebir lo hiperbólico: como *curva* y como *modelo matemático* (algebraico). Estas dos últimas aparecen fuertemente ligadas y fungen de complementos de la forma variacional. Esto se ejemplifica cuando a un grupo de estudiantes no les basta que una situación incluya magnitudes que varíen inversamente, sino que se requiere de una *propiedad (numérica) que involucre la presencia de una constante* para que se caracterice como de naturaleza hiperbólica

Así, lo hiperbólico en este diseño didáctico emerge como una forma de variación que se modela mediante la expresión de un producto constante de variables y se asocia a una curva decreciente. Es verdad que las formas y razonamientos en los que emerge lo hiperbólico son influenciados por su análisis como cualidades de una curva en la simulación del movimiento, pero no se encuentran limitados por ello, ya que se presentaron razonamientos de diversa naturaleza por parte de los estudiantes, por ejemplo, geométricos y variacionales, e incluso algebraicos.

A lo largo de la actividad de los estudiantes, el contexto que rigió sus tareas fue el de variación inversamente proporcional, de modo que la caracterización de la forma hiperbólica más sobresaliente es justamente como el comportamiento de este tipo de relación entre variables. Cabe resaltar, como el estudio de la cualidad de cierto movimiento en un contexto variacional dinámico, posibilitó movilizar los razonamientos de los jóvenes para establecer una conexión entre curvas y ecuaciones hiperbólicas.

Referencias Bibliográficas

Aparicio, E., Sosa, L. Tuyub, I. y Jarero, K. (2012). Tareas y aprendizajes matemáticos en bachillerato. Un estudio de contextos. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de*

Matemática Educativa, 25, 855-862. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Arcos, I. (1998). *Geometría Analítica, Ecuaciones y Gráficas.* Cuaderno didáctico, vol. 5. México: Editorial Iberoamericana.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Allianza.

Buendía, G. (2011). *La construcción social del conocimiento matemático escolar. Un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones*. México: Díaz de Santos, S.A.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa

Delone, B. (1956). Analytic Geometry. En Aleksandrov A., Kolmogorov A. & Lavrent'ev M., (Eds.) *Mathematics: its content, methods and meaning*, 183-207. Moscú: MIT Press.

Díaz, M. (2007) Visualización y generalizaciones: el caso de la determinación de lugares geométricos. En Farfán, R., López, I., Martínez, G., Navarro, C., Carrillo, C., Dolores, C., *Matemática Educativa* (pp. 207-214). México: Díaz de Santos.

Farfán, R.; Ferrari, M. (2002). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16,* 62-67. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Farfán, R., Ferrari, M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 2010, 53-68.

Knuth, E. (2000). *Student understanding of the Cartesian connection: an exploratory study.* Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), 500-508.

May, J., Pech, J. y Reyna, P. (2003). *Trigonometría y Geometría Analítica Básicas.* México: Editorial Progreso S.A. de C.V.

Montiel, G, y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-68). México: Lectorum.

Autores

Aurea Guillermo Castellanos; CIMATE, UADY. México; aureaa@live.com
Daniel Ortiz May; CIMATE, UADY. México; dortizmay@outlook.com
Landy E. Sosa Moguel; CIMATE, UADY. México; smoguel@uady.mx