UNA APROXIMACIÓN VARIACIONAL AL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DESDE LO SITUACIONAL

Aurea Guillermo Castellanos, Daniel Ortiz May, José Suárez Huchin

Resumen

En el presente trabajo se plantea una forma alternativa de investigar sobre cómo favorecer el estudio escolar del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), a partir de tres consideraciones básicas. La primera, la componente situacional en el conocimiento matemático; la segunda, asumir a dicho teorema como el eje rector para el entendimiento del Cálculo; y la tercera, conferirle un tratamiento variacional en el que la acumulación de una variable está en relación con su razón de cambio y viceversa, esto en contraposición al tratamiento analítico-formal que suele darse aún en las aulas.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo, variación, acumulación.

Introducción

Escolarmente se concibe al TFC como un argumento para validar el algoritmo que facilita el cálculo de una integral definida. Sin embargo, su relevancia está en constituir una relación natural entre la variación de una variable y la acumulación de la misma, esto es, una relación entre el cálculo diferencial e integral entendidos como métodos o herramientas matemáticas de cuantificación variacional. De ahí que en esta propuesta investigativa se asume como premisa fundamental el que para lograr una mejor aprehensión conceptual del TFC, es necesario considerar el papel de la acumulación y razón de cambio de lo variable, tal como se menciona en Thompson (1994), empero, agregando una componente situacional, pues según Aparicio y Sosa (2015), lo situacional connota una situación de características específicas en la que esencialmente se produce la toma de consciencia de sus condiciones y contenido, posibilitando la realización e incluso la aprehensión conceptual de las tareas que de dicha situación emanan.

Los aspectos claves de esta propuesta investigativa se hallan en la manera en que conceptualmente evolucionaron las nociones básicas del cálculo. Por ejemplo y en primera instancia, se hace una consideración sobre la manera intuitiva en la que el ser humano se aproxima al análisis de las causas reales que motivan el movimiento, lo cual se asume es mediante **descripciones cualitativas**, pues como se señala en Muñoz (2007), es precisamente de esta manera en la que el ser humano describe inicialmente situaciones de movimiento. Lo anterior se enmarca bien con la historia del cálculo, pues es sabido que a partir de trabajos como los desarrollados por Arquímedes, se introduce la idea de la **cuantificación** en el estudio de áreas y volúmenes de figuras geométricas. Basta recordar que hacia los siglos XVII y XVIII, se presenta un énfasis en la necesidad de **establecer relaciones** entre magnitudes variables, tal es el caso del trabajo realizado por Leibniz sobre las relaciones entre **sucesiones de sumas y diferencias de números.** Él examina una sucesión infinita de valores de una variable, por ejemplo la variable x, y una diferencia entre dos valores sucesivos (dx) infinitesimal, comparada con los valores de la variable. Al tomar la suma de tales diferencias, denotada por $\int dx = x$ se obtiene la variable completa. Es decir, de esta forma se obtiene la noción de diferenciación e integración como procesos inversos e interrelacionados (Cantoral, 1983), y a partir de esto, sumando el trabajo de Newton, es que se identifican de manera más evidente la diferenciación e integración como procesos inversos (Lavrent'ev y Nikol'skii, 1956).

No obstante lo antes dicho y en contraste con la naturaleza histórica-epistemológica del TFC, en el tratamiento escolar otorgado a dicho contenido se deja de lado el proceso llevado a cabo por el ser humano en su constitución y desarrollo. Es sabido que en un curso tradicional, lo común es mostrar a los estudiantes procedimientos para calcular integrales con los llamados métodos de integración, básicamente mediante ejercicios repetitivos y separadamente de lo conceptual (Muñoz, 2007). Luego entonces, el TFC es erróneamente considerado como una *técnica de integración*, pues se le presenta y trata como "el argumento" que permite concebir el concepto de la integral definida como dos de sus formas más usuales de representación: como operación inversa de la derivada, y como método de determinación del área bajo una curva para funciones continuas sobre intervalos cerrados (Cabañas y Cantoral, 2007), razón por la que el significado y alcance conceptual que el teorema tiene, queda relegado a lo algorítmico.

Para desarrollar una base cognitiva que favorezca un entendimiento más amplio del TFC y del Cálculo mismo, se asume necesario reconocer una condición situacional en la que se entrelace lo variacional continuo y el cambio de lo variable, más que en los conceptos de derivada e integral en sí mismos. Por ejemplo, en el estudio de la integral y la integración se debe considerar como idea central a la acumulación por sobre el concepto función derivada o suma de Riemann (Gray y Tall, 1994; Cordero, 2003, en Muñoz, 2007). Y será precisamente en el entendimiento de la acumulación donde, de manera coherente, la atención esté puesta en que los estudiantes comprendan la conexión entre la razón de cambio de cantidades y la acumulación de esas cantidades (Thompson y Silverman, 2008).

Así, tal y como Schnepp y Nemirovsky (2001) sugieren, en lugar de aprender Cálculo partiendo de la diferenciación hacia la integración, los estudiantes deben tratar con la diferenciación en relación con la integración y viceversa. En ese sentido, con el presente trabajo se pretende determinar en qué medida actividades de cualificación y cuantificación de lo variable en una situación de relación variacional asociada al movimiento, favorecen la emergencia de nociones matemáticas inherentes al TFC como un conocimiento en vías de instituirse.

Marco teórico

El TFC, y en general el Cálculo, es una herramienta que permite cuantificar y cualificar relaciones cambiantes, sin embargo, escolarmente se propicia el entender que la derivada e integral tienen una relación en tanto métodos de cálculo que son inversos. Esto acota y limita el que se vea la relación variacional y la relación funcional entre derivación e integración, o variación y acumulación. La razón principal por la que esto ocurre es debido a la prevalencia de centrarse en los objetos matemáticos en el discurso matemático escolar, dejando a un lado las prácticas y situaciones que los significan. En el Cálculo esto se traduce como la ausencia de escenarios de intermediación socioculturales que traten con procesos de cambio y variación (Cantoral, 2013).

Por lo anterior, en este trabajo se toma como referente teórico al Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) que estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida (Cantoral, 2004). En tal forma de pensar y comunicarse, los énfasis están puestos en las estructuras variacionales presentes o que se hacen presentes al momento en que las personas asignan y comparten sentidos y significados.

El Pylvar se enmarca en la teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa, pues en ella se plantea la tesis de que para explicar el aprendizaje o la construcción del conocimiento matemático, la atención de los análisis debe estar puesta en los procesos de difusión social, así como en el desarrollo e institucionalización de los saberes desde una mirada socio-cultural; a diferencia de otras perspectivas que centran la atención en los objetos matemáticos en sí mismos, y a partir de ellos se pretende comprender y explicar los fenómenos didácticos que se suceden. En esta teoría se reconoce que el conocimiento matemático emerge como producto de una evolución del pensamiento social en el que se desarrolla, es decir, surge de la actividad humana en un contexto determinado.

Cordero (2001), refiere que “en la actividad humana el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención, de ahí surgen versiones diferentes alrededor de una noción matemática”. Para el caso del presente trabajo, esto se traduce en la idea de que el TFC debe ser estudiado en relación con actividades que le dieron origen y sentido, como es la cuantificación y cualificación de lo cambiante o variable en una variación acumulativa, antes de situarlo en un discurso analítico-formal que soslaye estas nociones imprescindibles para su entendimiento. Con esta reorientación a su tratamiento didáctico, se pretende sustituir el discurso matemático escolar que hoy día está en las aulas de clase, a partir de sentar las bases que permitan comprender el porqué de ese discurso por ejemplo, de modo que se desarrolle en los estudiantes el Pylvar.

En Arrieta (2003) se señala que “el aprendizaje surge cuando los actores sociales ejercen y modifican prácticas sobre su entorno, sus realidades, sus herramientas y sus identidades”, por lo que la actividad humana como referente para la producción y construcción de conocimiento matemático debe ser analizada en el contexto donde se ubica; esto implica que el contexto permite explicar el pensamiento y la acción de los individuos, lo cual se traduce en poder comprender cómo el humano, mediante su actividad, construye el conocimiento bajo las condiciones y circunstancias socioculturales en las que física o simbólicamente se sitúa (Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, 2010). Entendido así el proceso de construcción y aprendizaje matemático desde una perspectiva sociocognosctiva, se propone dar un tratamiento al TFC enmarcado en lo Variacional, es decir, en el estudio de lo cambiante, donde el énfasis esté en las nociones variacionales de acumulación y razón de cambio, si lo que se desea es favorecer su aprehensión.

En ese orden de ideas, también adquiere especial relevancia la noción de *lo matemático* en lo situacional, pues ésta se puede concebir como un entramado de naturaleza socio cognoscitiva en el que se relacionan procesos de construcción, despersonalización o descontextualización de saberes matemáticos, posibilitando la objetivación de los mismos (Aparicio y Sosa, 2015). Lo matemático se inscribe en la especificidad de las acciones matemáticas que componen una situación y de las cuales se logra o es posible abstraer un conocimiento matemático específico y por tanto, denota una expresión socio cognoscente de conocimiento matemático formalmente instituido (Aparicio y Sosa, 2015).

Un ejemplo de lo anterior se puede abstraer del estudio realizado por Aparicio y Cantoral (2006), sobre la construcción del concepto de continuidad puntual, en el que se observa que en un proceso de construcción de un saber matemático como es el de función continua en un valor, el centro de atención no está sobre el objeto matemático en sí, sino en la actividad o práctica que favorece u obstaculiza su producción; mostrándose que no es la actividad humana lo central, sino los procesos o mecanismos que de ellas pueden extraerse para el aprendizaje en torno a dicha objeto matemático. Los autores plantearon en un escenario variacional, el análisis gráfico y visual de las relaciones entre dos variables (valores en el dominio e imágenes de una función real), dando cuenta de elementos discursivos y gestuales sobre los cuales emergen ideas asociadas al concepto de continuidad puntual, en tanto una cualidad discutida de relaciones entre variables.

Así en la presente propuesta se parte de un contexto específico de relación variacional en el cual la actividad humana de cualificar y cuantificar lo variable en una situación de movimiento simulado, propicie la emergencia de lo matemático en relación el TFC. Lo anterior en conjunto (contexto, actividad humana y lo matemático) conforma *lo Situacional* (Aparicio y Sosa, 2015). Se dirá pues, que se ha logrado favorecer desde lo situacional, una construcción o resignificación social de un saber matemático, para este caso particular el TFC, si los tres componentes referidos se logran integrar adecuadamente para la consecución de los objetivos planteados, en caso contrario no podría referirse así.

Lo situacional	
Componente	**En el TFC**
Contexto	Variacional
Actividad humana	Cuantificar y cualificar lo cambiante
Lo matemático	Noción acumulación y razón de cambio

Tabla 1.

En síntesis de lo dicho en este apartado, la tesis que se sostiene es que la construcción del conocimiento matemático TFC, ha de darse en la medida en que éste se sitúe como parte de un contexto asociado a una actividad humana caracterizada por un hacer de matemáticas, por ejemplo, el cualificar y cuantificar lo variable. Tal construcción de conocimiento matemático no ha de entenderse como un/el conocimiento matemático institucional, sino como aquel que emerge de dicha relación diádica (contexto y actividad), es decir, lo matemático. Así, se espera que la actuación sobre una situación variacional en el contexto de llenado de una simulación de llenado de recipientes, emerja el TFC en tanto una forma de cualificar y cuantificar lo variable.

Metodología

Como se ha establecido anteriormente, *lo situacional* no pretende la emergencia de un conocimiento formalmente institucionalizado, sino la movilización y aprehensión de nociones que están en el conocimiento en vías de institucionalizarse. En vista que el TFC como saber institucionalizado cuenta con una definición y caracterización bien definida, en esta investigación, no se pretende trabajar sobre el TFC instituido, sino sobre las nociones matemáticas que subyacen en el conocimiento institucionalizado. Por tanto, es necesario situar al estudiante en el estudio de aquello que le da sentido, en este caso, la variación y la acumulación en una situación de llenado de recipientes. La situación anterior se ha considerado conveniente debido a las ventajas que representa la visualización física de un acumulado (puede percibirse físicamente la cantidad de líquido acumulada), contrastándola con situaciones usuales de velocidad de movimiento en donde el acumulado está en términos más abstractos (La distancia recorrida solo puede compararse en términos de medición o abstracción).

En un sentido más general, se propone desarrollar un trabajo didáctico en dos Momentos: el primero protagonizado por un análisis cualitativo de las nociones fundamentales de variación y acumulación; y el segundo caracterizado por un análisis cuantitativo y con matices más formales desde el punto de vista clásico escolar, orientados a concretar las ideas que se pusieron en juego en el primer momento.

El primer Momento del trabajo didáctico se estructura por *dos Estadíos*, donde la atención se sitúa en la forma de variación del llenado de un recipiente, con base en la información que lo acumulado proporciona. *Los Estadíos* representan sistemas de llenados de recipientes con variables didácticas establecidas de tal forma que la atención del estudiante esté enfocada a un aspecto específico:

Estadío 1	**Estadío 2**
• Misma variación • Acumulación diferente	• Diferente variación • Misma acumulación
¿Qué causa que un recipiente se llene más que otro?	*¿La misma acumulación implica misma variación?*

Tabla 2.

No se hace énfasis en el saber TFC, sino en la actividad y la experiencia del estudiante, las actividades exigirán movilizar argumentos cualitativos acerca de los efectos de la variación del llenado del recipiente sobre su acumulación o bien, la variación inherente del proceso de acumulación.

En el segundo Momento se pretende incluir un estudio cuantitativo de la misma situación empero, mediante tareas de interpretación gráfica y analítica en el que las ideas de acumulación y variación de lo variable, se explicitan a partir los argumentos situacionales del momento anterior. De ser así, se consideraría el haber favorecido una construcción de lo matemático asociado TFC, entendido éste como un conocimiento no institucionalizado.

La población para el estudio consistirá de jóvenes universitarios en su primer año de estudios superiores o en último año de bachillerato, siempre que cuenten con conocimientos relacionados con el cálculo, por ejemplo, entendimiento básico del concepto función. La participación será por invitación y de forma voluntaria.

Reflexiones

Consideramos que un tratamiento sobre las nociones relacionadas con el TFC como el que se refiere, favorecería el aprendizaje significativo del Cálculo en el nivel medio superior, ya que, más allá de presentar la derivación y la integración como métodos algorítmicos, se espera que cuando los estudiantes discutan la integración en situaciones como las aquí descritas, reconozcan la naturaleza de las relaciones variacionales presentes, por ejemplo, la presencia de una acumulación conlleva una razón de cambio, y que esta razón en cualquier punto es el valor de la función a integrar; y cuando discutan la diferenciación, reconozcan que la razón de cambio es acumulativa, es decir, el acumulado hasta cierto punto es el valor de la función a diferenciar. Esta manera de conceptualizar al TFC contribuiría a la formación de una base sólida en los estudiantes para el estudio posterior y más profundo del Cálculo.

Referencias

Aparicio, E., y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 7-29.

Aparicio, E., y Sosa, L. (2015). *Lo situacional y lo matemático en procesos de construcción social del conocimiento matemático*. Mérida, Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán (no publicado).

Aparicio, E., Sosa, L., Jarero, M. y Tuyub, I. (2010). Conocimiento matemático. Un estudio sobre el papel de los contextos. En R. Rodríguez y E. Aparicio. *Escuela de invierno en matemática educativa 13(1),* 167-174. Monterrey: Red de centros de investigación en matemática educativa.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2007). La integral definida: un enfoque socioepistemológico. En C. Dolores, G. Martínez, R.M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*, 3-25. México: Ediciones Díaz de Santos.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 1-9.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 4(2), 103-128.

Gray, E., Tall, D. (1994). Duality, ambiguity & flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 26, 115-141.

Lavrent'ev, M. y Nikol'skii S. (1956). Analytic Geometry. En A. Aleksandrov, A. Kolmogorov & M. Lavrent'ev, (Eds.) *Mathematics: its content, methods and meaning*, 65-180. Moscú: MIT Press.

Muñoz, G. (2007) Rediseño del Cálculo Integral escolar fundamentado en la predicción. En C. Dolores, G. Martínez, R.M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*, 27-76. México: Ediciones Díaz de Santos.

Schnepp, M., Nemirovsky, R., (2001) Constructing a foundation for the fundamental theorem of calculus. *Yearbook (National council of teachers of mathematics),* 90-102.

Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathemathics*, *26*(2-3), 229-274.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson, & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics*, 117-131. Washington, DC: MAA.

Autores

Aurea Guillermo; UADY. México; aureaa@live.com
Daniel Ortiz; UADY. México; dortizmay@outlook.com
José Suárez; UADY. México; jose.suarez.huchin@hotmail.com