TIPOS DE DEMOSTRACIÓN CONSTRUIDAS POR ESTUDIANTES DE UN CURSO-LABORATORIO DE PRECÁLCULO

Edwin López Velandia, Jorge Enrique Fiallo Leal
Universidad Industrial de Santander

Resumen: En este documento se presentan los principios y la metodología de una investigación en curso, cuyo objetivo es analizar los procesos de conjetura y demostración e identificar las dificultades que presentan los estudiantes que participan en un curso de precálculo que ofrece la Universidad Industrial de Santander. Para este propósito se implementará la herramienta de análisis propuesta por Pedemonte (2005) y la tipología propuesta por Fiallo (2011). Una primera aproximación al contexto de estudio pone de manifiesto que en los estudiantes predominan las demostraciones inductivas, por la implementación de sistemas de referencia soportados en concepciones perceptivas.

Demostración, modelo cK¢, modelo de Toulmin, curso de precálculo, tipos de demostración

INTRODUCCIÓN

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas destaca como un objetivo de la educación matemática el desarrollo de la capacidad de efectuar demostraciones matemáticas (NCTM, 2003), pero desde hace décadas se reportan dificultades de los estudiantes en el desarrollo de este proceso (Harel y Sowder, 1998; Hanna & Jahnke, 1996). Investigaciones recientes muestran que el uso de ejemplos es utilizado como única estrategia para realizar demostraciones (Sen y Guler, 2015; Lockwood, Ellis y Lynch, 2016). Otros estudios basados en intervenciones en el aula (Fiallo, 2011; Sandefur, Mason, Stylianides y Watson, 2012; Stylianides y Stylianides, 2013) logran que los estudiantes comprendan los límites del uso de ejemplos como única estrategia de demostración y avancen hacia la construcción de demostraciones deductivas.

Presentamos algunos avances de una investigación en curso que pretende dar respuesta a la pregunta: *¿Qué dificultades estructurales y referenciales tienen los estudiantes en el desarrollo del proceso de conjetura y demostración en un curso-laboratorio de precálculo mediado por software matemático interactivo?*

MARCO TEÓRICO

Para responder a la pregunta de investigación, este estudio se adhiere a la caracterización de demostración de Fiallo (2011) quien considera la demostración como "todos los argumentos planteados por los estudiantes para *explicar, verificar, justificar o validar* con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática" (ibíd., pág. 85).

Para analizar e identificar fortalezas y dificultades en los procesos de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones de los estudiantes se utiliza el "Modelo de Pedemonte" (Pedemonte, 2005) y los tipos de demostración planteados por Fiallo (2011).

Modelo de Pedemonte

Pedemonte (2005) integra el modelo cK¢ (Balacheff y Margolinas, 2005) al modelo de Toulmin (Toulmin, 1958):

Modelo de Toulmin. Este modelo permite analizar la estructura de la argumentación del estudiante atendiendo al contenido empleado. Para ello tiene en cuenta seis elementos básicos (ibíd.): el *enunciado "E"* que se refiere a la conclusión de cada argumento que se basa en un cierto número de *datos "D"*. Para pasar de los datos al enunciado-conclusión es necesario un *permiso de inferir "Pi"* que legitime ese paso (por ejemplo, una regla o un principio general). Vale decir que *Pi* establece la conexión lógica entre *D* y *E* al mostrar que el paso de *D* hacia *E* es adecuado y legítimo; El *indicador de fuerza "F"* que precisa la fuerza con la que la unión entre *D* y *Pi* permite alcanzar *E*; las *refutaciones potenciales "Rp"* establecen las restricciones que se aplican a *E*, es decir, las situaciones bajo las cuales *E* no sería válida; y un *soporte "S"* que apoya el *Pi,* ya que éste puede ponerse en duda y va a ser necesario respaldarlo con algunos justificativos.

Modelo ck¢. Balacheff y Margolinas (2005) señala cuatro componentes indisociables, que se imponen cuando se requiere evidenciar una concepción *C*: a partir de un *problema matemático "P"* un estudiante puede representarlo con un conjunto de afirmaciones que expresa utilizando un *sistema de representación "L"*, a su vez que lo transforma aplicando una *regla "R"* (un operador); en dicho proceso aplica una *estructura de control "Σ"* para organizar las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción, asegurando la no contradicción de la concepción. La cuádrupla (*P, L, R, Σ)* es suficiente para caracterizar una concepción.

El Modelo de Pedemonte (Ilustración1) integra los dos modelos ya que en la resolución de problemas de demostración, las *concepciones* de los estudiantes permiten movilizar los procesos argumentativos y justificar la existencia del argumento, por lo que pueden remplazar el *soporte* en el modelo de Toulmin y los *operadores* de la concepción pueden reemplazar los *permisos de inferir* (Pedemonte, 2005).

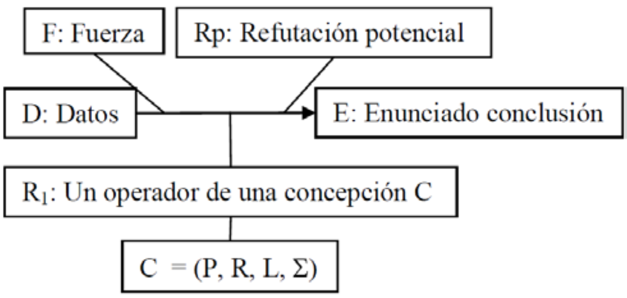

Ilustración 1: Integración del modelo cK¢, al modelo de Toulmin (Fiallo, 2011)

TIPOS DE DEMOSTRACIÓN

Fiallo (2011), basado en las categorías planteadas por Marrades y Gutiérrez (2000), plantea que en la clase de matemáticas se deben considerar los siguientes tipos de demostración:

Demostraciones empíricas o inductivas: caracterizadas por el uso de ejemplos como el principal elemento de convicción. Dentro de esta categoría está el *empirismo ingenuo* *inductivo (EII), el experimento crucial (basado en ejemplos o constructivo) y el ejemplo genérico (analítico o intelectual).*

Demostraciones deductivas: caracterizadas por la descontextualización de los argumentos usados, se basan en los aspectos genéricos del problema, operaciones mentales, y deducciones lógicas, que apuntan a validar la conjetura de una manera general. Dentro de esta categoría están el experimento mental (transformativo o estructural) y la deducción formal (transformativa o estructural).

METODOLOGÍA

Esta investigación es de tipo cualitativa, se lleva a cabo con estudiantes admitidos a carreras de ciencias o ingenierías en la Universidad Industrial de Santander, quienes participan en un curso de precálculo que pretende el desarrollo del pensamiento variacional con un trabajo de aula (de 14 sesiones) basado en resolución de problemas y el uso de la tecnología (Fiallo y Parada, 2014). En el primer semestre de 2016 se realizó una fase preliminar que permitió esclarecer la metodología del estudio exploratorio que llevará a responder la pregunta de investigación:

De aproximadamente 240 estudiantes que reciben al curso, se trabajó con 8 estudiantes, quienes fueron seleccionados bajo los criterios de participación constante, compromiso por realizar lo que le pedía los talleres y asistir a todas las clases. El investigador fue un observador participante ya que, para la recolección de los datos, interactuó con cada estudiante (o parejas de estudiantes) para explicitar el proceso de demostración. Para el posterior análisis, los datos de los vídeos se sistematizaron para identificar momentos donde se presentaron demostraciones, y se transcribieron para examinarlos a la luz de los elementos del marco teórico.

Ejemplo

A continuación una demostración realizada por un estudiante cuando aborda el siguiente problema.

Toma una hoja de tamaño carta y sin recortar forma un cilindro sin tapas

¿Cómo se obtiene el mayor volumen: formándolo a lo largo o a lo ancho de la hoja? Justifica tu elección.

¿Qué se puede decir de cualquier hoja rectangular? ***Explica*** *tu respuesta.*

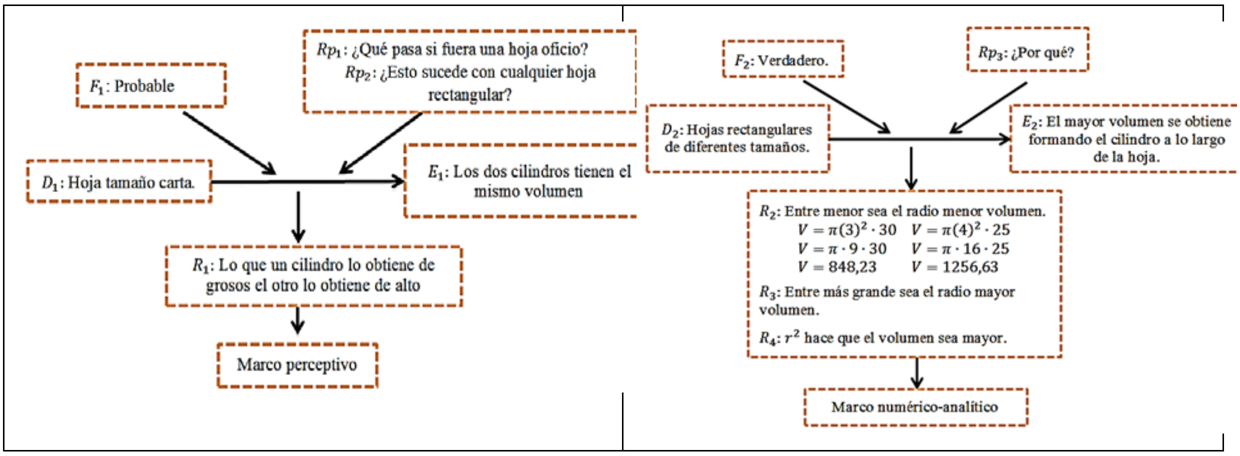

Tabla 1: Elementos de la demostración del estudiante.

Para el estudiante, los datos D_1 y D_2 provienen del problema planteado y los operadores de la concepción son reglas que generaliza de lo que ve (R_1), o lo que hizo o analizó (R_2 a R_5), o lo que en algunos casos explicitó como consecuencia de las refutaciones del investigador (Rp_1 a Rp_3). Estas Rp evidencian la fuerza del argumento que comenzó siendo débil (F_1) pero que se transformó en (F_2) por el procedimiento numérico posterior, con lo que mostró confianza en lo realizado. La Rp_2 hizo que el estudiante utilizara otros datos que cambiaron el enunciado-conclusión, de E_1 a E_2. Se debe considerar que en los ejemplos realizados y analizados para justificar el segundo enunciado, se tomaron números con un criterio basado en la percepción inicial de la situación y no con un argumento teórico.

En la argumentación del primer enunciado (E_1), la representación es verbal y el control es perceptivo ya que el estudiante se basó en lo que vio y conjeturó, lo que le resultó suficiente para plantear una solución del problema. Dada la intervención del investigador (Rp_2) el estudiante realizó un nuevo procedimiento con un ejemplo numérico y un nuevo control que emergen del análisis realizado sobre el ejemplo.

Con todo se concluye que el proceso de demostración emergente de la actividad matemática del estudiante es de tipo Empirismo Ingenuo Inductivo, ya que predomina lo perceptivo y la escogencia de ejemplos sin criterios teóricos que le den fuerza al análisis realizado.

CONCLUSIONES: PRIMEROS HALLAZGOS

El análisis de los primeros datos, nos permite tener por hipótesis que las demostraciones de tipo empíricas son las que predominan en los estudiantes al iniciar el curso, y aunque en las últimas sesiones también son utilizadas, ellos comprenden que con ellas no es suficiente la demostración e intentan realizar procesos más elaborados.

Referencias

Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Fiallo, J. (2011*). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* (Tesis doctoral). Universitat de València, Valencia, España.

Hanna, G., Jahnke, N. (1996). Proof and proving. En A. Bishop y otros. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: results from exploratory studies. En A. Schoenfeld y otros (Ed.), *Research in collegiate mathematics education III,* (pp. 234-283). Providence, EEUU: American Mahematical Society.

Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' Example-Related Activity when Exploring and Proving Conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(2), 165-196. DOI: 10.1007/s40753-016-0025-2.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemáticas*. Sevilla, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l`analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathematiques*, 25(3), 313 - 348.

Sandefur, J., Mason, J., Stylianides, GJ, y Watson, A. (2012). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, 83 (3), 323-340. DOI: 10.1007/s10649-012-9459-x.

Sen, C., & Guler, G. (2015). Examination of Secondary School Seventh Graders' Proof Skills and Proof Schemes. *Universal Journal of Educational Research* 3(9): 617-631. DOI: 10.13189/ujer.2015.030906

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM*, 45(3), 333-341. DOI: 10.1007/s11858-013-0501-y.

Toulmin, S.E., (1958) The use of argument, Cambridge University Press.