HACIA EL DISEÑO DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS EN R2 DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA

Marcela Parraguez[1], Raúl Jiménez[2], Andrés Yáñez[1]
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[1], Universidad Católica del Norte[2]

Resumen: Basados en la teoría APOE como marco teórico y metodológico, investigamos, desde una postura cognitiva, las estructuras mentales necesarias para modelar la construcción cognitiva de los valores y vectores propios en R2 desde un aspecto geométrico. El diseño de una descomposición genética (DG) para este fin, mostró que los elementos desde el ámbito geométrico –la Rotación en 180° con centro en el origen y la Homotecia– son conceptos matemáticos previos para la construcción del concepto valor/vector propio en R2 como objeto, en estudiantes de primer año de universidad.

Valor propio, vector propio, teoría APOE

ANTECEDENTES

Los procesos de enseñanza y aprendizaje en álgebra lineal para estudiantes de Ingeniería, Pedagogía y/o de licenciatura en Matemáticas, Física y Química, precisan en general, de elementos de las teorías de espacios vectoriales, de coordenadas, de transformaciones lineales y de valores/vectores propios. Dorier y Sierpinska (2001) plantean que el problema central en esta materia consiste en que el estudiante tiene que trabajar con conceptos matemáticos de naturaleza muy general, pero tratados con elementos particulares. Especificamente, los conceptos de valor y vector propio representan un obstáculo mayor, porque precisan de una construcción previa y fuerte de espacio vectorial y transformación lineal, y como los aprendices no entienden su naturaleza general, se inclinan fuertemente por procedimientos calculatorios específicos que sabe manejar, pero no necesariamente los comprende (Robinet, 1986; Moore, 1995; Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016).

Salgado y Trigueros (2014), reportan los resultados de una investigación acerca del aprendizaje de los valores y vectores propios de los estudiantes en un curso en el que estos conceptos se han enseñado, usando un diseño didáctico basado en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Sin embargo, aún no se ha reportado un modelo cognitivo y su validación propiamente tal, plasmado en una descomposición genética, para el caso particular de valores y vectores propios en R^2 desde una perspectiva geométrica, dirección que toma la presente investigación, cuya finalidad es develar elementos del ámbito geométrico, que permiten la construcción de este objeto matemático en R^2.

La noción intuitiva en álgebra lineal de los valores/vectores propios

Para tener un acercamiento más intuitivo (desde lo geométrico) de lo que es un valor/vector propio, prestemos atención a la Figura 1. En ella se puede apreciar, que en esta transformación de la GALLINA la imagen se ha deformado de tal forma que su eje vertical no ha cambiado.

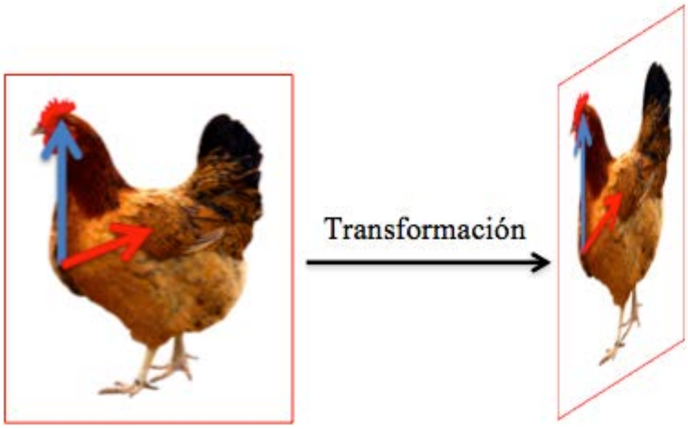

Figura 1: Transformación de la galllina.

El vector rojo, representado por la flecha roja que va desde el pecho hasta el ala de la gallina, ha cambiado de dirección, mientras que el azul, representado por la flecha azul, no ha cambiado. El vector azul es entonces un vector propio de la transformación, mientras que el rojo no lo es. Dado que el vector azul no ha cambiado de longitud, su valor propio es 1. Todos los vectores de esta misma dirección y sentido son vectores propios, con el mismo valor propio. Forman el espacio propio de este valor propio.

De acuerdo a varios textos de estudio (Por ejemplo: Lay, 2007 y Poole, 2011) los valores/vectores propios se definen de la siguiente forma:

Si A es cualquier matriz numérica cuadrada, de tamaño nxn, entonces:

(1) Un valor propio, denominado "λ", es un escalar, que para un vector "v" distinto de cero, se cumple la siguiente condición: $Av = \lambda v$.

(2) El vector v se llama vector propio de λ, si: $Av = \lambda v$.

Relevancia de los valores/vectores propios

Los valores y vectores propios pertenecen a los tópicos de mayor aplicación del álgebra lineal. De hecho, es raro encontrar un área de la ciencia aplicada donde nunca se hayan usado. Por ejemplo, se usan en áreas de las matemáticas, física, mecánica, ingeniería eléctrica y nuclear, hidrodinámica, aerodinámica, economía, etc., entre los que cabe destacar, el problema de la diagonalización de una matriz.

PREGUNTA Y OBJETIVO GENERAL DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas que guiaron la investigación son, por un lado desde la matemática de un primer año de universidad: ¿Qué prerrequisitos son necesarios para el aprendizaje de los valores /vectores propios en R^2 desde una perspectiva geométrica? y por otro, desde la cognición y la didáctica ¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales asociados a la construcción de los conceptos valores/vectores propios en R^2 desde una perspectiva geométrica? Para responder estas preguntas, se condujo esta investigación utilizando como marco teórico la teoría APOE. Consideramos que esta teoría es pertinente para este estudio, dado que justamente se aboca al análisis de la construcción de conceptos matemáticos y proporciona una metodología que permite el diseño de un análisis teórico congruente con la propuesta de investigacion.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA: TEORÍA APOE

La teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), desarrollada por Dubinsky (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), es una teoría reconocida en la comunidad de investigación en Didáctica de la Matemática. En ella se toma como punto de partida el mecanismo de abstracción reflexiva propuesto por Piaget, para describir la construcción de objetos mentales relacionados con objetos matemáticos específicos. La abstracción reflexiva se pone de manifiesto en la teoría a través de distintos mecanismos: interiorización, coordinación, generalización, encapsulación, y reversión.

Para operacionalizar la teoría como marco de investigación se diseñó un modelo, llamado descomposición genética, (DG) que es un modelo hipotético que describe en detalle las estructuras y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014) que son necesarios para que un estudiante de primer año de unversidad aprenda el concepto matemático de valor/vector propio en R^2 desde una perspectiva geométrica.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LOS VALORES Y VECTORES EN R^2

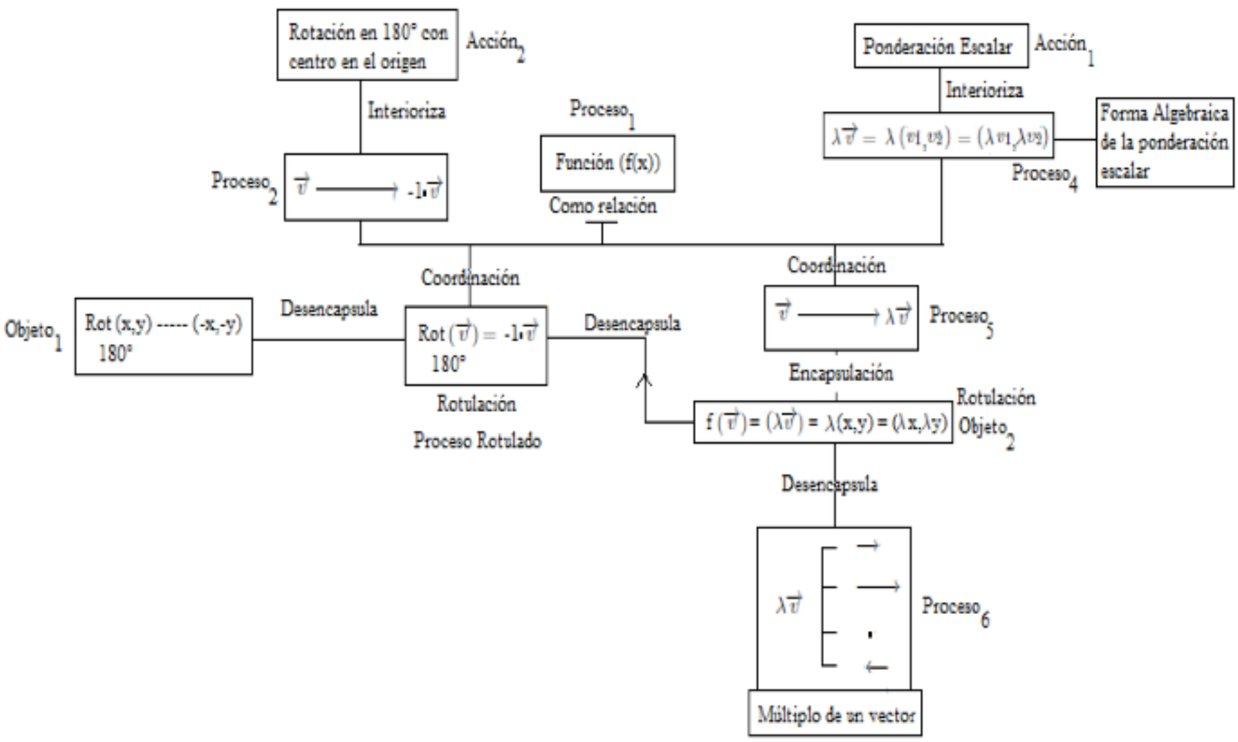

Figura 2: DG para el aprendizaje en estudiantes de primer año de universidad de los valores y vectores propios en R^2 desde una perspectiva geométrica.

Un estudiante de primer año de universidad construye (hipotéticamente) el objeto valor/vector propio en R^2, realizando acciones (Acción 2) sobre el objeto rotación en 180º con centro en el origen, rotando casos particulares de vectores dados, como se muestra en la

Figura 2. La Acción 2, es interiorizada, por el uso de una relación de correspondencia, que dado un vector se le asigna otro, este proceso obtenido (Proceso 2) se puede describir mediante la formula, $v \longrightarrow -1 \cdot v$. Al realizar acciones (Acción 1) sobre el objeto ponderación escalar, por ejemplo, calculando para algunos vectores de forma geométrica casos particulares, permite que, al ser interiorizadas por la forma algebraica de ponderación escalar para vectores en R^2, originen el proceso $\lambda v = \lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$.

Al coordinar el proceso 2 y proceso 4, por separado con la idea de función (proceso 1) como relación, generan nuevos procesos –Proceso 5 y Proceso rotulado–, como una fórmula. Un estudiante que logre encapsular el proceso 5, es decir, que tenga como objeto la ponderación escalar, utilizando como articulador la idea de función, obtiene el objeto 2, que al ser rotulado se puede expresar mediante una relación algebraica. Este objeto rotulado de esta forma, muestra la construcción objeto de los valores y vectores propios en R^2. El objeto 2 al ser desencapsulado, para dar cuenta de dos procesos como casos particulares: por un lado, la rotación en 180◦ (Proceso rotulado), donde el articulador, que produce esto es el caso $\lambda = -1$; y por otro lado, se puede desencapsular para dar cuenta de una idea geométrica, donde el articulador es la variación de la magnitud del vector (homotecia), en la idea de múltiplo de este (Proceso 6).

A MODO DE CONCLUSIÓN

El diseño de la DG mostró que las estructuras mentales previas, desde el ámbito geométrico, para el aprendizaje en estudiantes de primer año de universidad de los valores y vectores propios en R^2, son los objetos Rotación en 180° con centro en el origen y Homotecia.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1140801.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Nueva York: Springer.

Dorier, J. L. Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level,* 255-273 ICMI Study. Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Lay, D. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones (3ª Ed.). México: Pearson educación.

Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22, 262-303.

Parraguez M., Lezama, J. y Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores. *Revista enseñanza de las Ciencias*, 34(2), 129-150.

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna* (3º Ed.). México: Thomson.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modeles en ont les éléves? *Educational Studies in Mathematics*, 17, 359-386.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Revista Educación Matemática*, 26(3), 5-42.