CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UN ABORDAJE UTILIZANDO EL SOFTWARE MAPLE

Carmen Teresa Kaiber
kaiber@ulbra.br
Sandra Pacheco Renz
sp_renz@yahoo.com.br
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA

Recibido: 11/02/2008 **Aceptado:** 13/05/2008

Resumen

Actualmente, el uso de tecnologías para la enseñanza de las matemáticas es necesario para que la educación cumpla su función de preparar al individuo para la vida social y para el mundo del trabajo, en un contexto donde los recursos informáticos se hacen cada vez más presentes. Metodologías que incorporan estos recursos para el plan de estudios están siendo propuestas y fue con esa intención que se desarrolló este proyecto cuyo objetivo fue investigar y analizar el uso de software *Maple*, en el contexto del aula de clase, como una herramienta para desarrollar aspectos teóricos y prácticos del proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral, en cursos de Licenciatura en Matemáticas y en Ingeniería. Metodológicamente, el proyecto se basa en los principios de la *Ingeniería Didáctica*, que se caracteriza por plantear un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en el aula, en relación con la concepción, ejecución, observación, seguimiento y análisis de secuencias de enseñanza. La investigación mostró que el uso de software matemático en el aula motiva a los estudiantes, permite un trabajo autónomo, desarrollando su capacidad de interpretar, analizar y establecer conjeturas, favoreciendo la construcción sólida de conocimientos.

Palabras clave: Cálculo Diferencial e Integral, software Maple

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO O SOFTWARE MAPLE

Resumo

Atualmente, a utilização de tecnologias para o ensino da Matemática faz-se necessária para que a educação cumpra seu papel de preparar o indivíduo para a vida social e para o mundo do trabalho, em um contexto onde os recursos computacionais se fazem cada vez mais presentes. Metodologias que incorporam tais recursos ao currículo estão sendo propostas e é com esse intuito que se desenvolveu um projeto de pesquisa que objetiva investigar e analisar a utilização do software Maple, no contexto da sala de aula, como ferramenta para desenvolver aspectos teóricos e práticos do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, junto a acadêmicos dos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharias. Metodologicamente, o projeto fundamenta-se nos princípios da Engenharia Didática, que se caracteriza por ser um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, no que diz respeito à concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino. A investigação apontou que utilizar softwares matemáticos, em sala de aula, motiva os alunos, possibilita um trabalho autônomo, desenvolvendo a capacidade de interpretar, analisar e estabelecer conjecturas, favorecendo a construção sólida dos conhecimentos.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral, software Maple

DIFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS USING MAPLE SOFTWARE

Abstract

The use of technologies as support tools for the teaching of mathematics has become an important area of research on teaching. Educational institutions may use these tools to prepare students for social life and the world of work. Each day, more and more computational resources are made available to teachers. Methodologies including such resource in the syllabus were examined and a research project was developed with the purpose to analyze the possibilities of using Maple software in the theoretical and practical development of Differential and Integral Calculus for students of Mathematics and Engineering. Methodologically speaking, the project is based on the principles of Didactics Engineering, which is characterized as an experimental frame of reference based on classroom didactic practices, concerning conception, practice, observation, and analysis of teaching sequences. The study pointed out that the use of mathematical software in class motivates students, allows autonomy, rises the ability to interpret and analyze and promotes solid knowledge building.

Key words: Differential and Integral Calculus, Maple software

Introdução

Nos dias atuais, a exploração de recursos computacionais, em sala de aula, faz-se necessária, a fim de que a educação cumpra seu papel de preparar o indivíduo para a vida social e para o mundo do trabalho, em um contexto onde a tecnologia se faz cada vez mais presente.

> Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (BRASIL, 2006:. 87)

Dessa forma, o educador está à frente de um desafio: utilizar tecnologias de forma criativa e inovadora, de maneira que possam auxiliar e potencializar as aprendizagens escolares. Um dos principais objetivos do uso do computador na educação é possibilitar situações de resolução de problemas, a fim de, simultaneamente, desenvolver conteúdos, estratégias de ação e o pensamento do aluno. De acordo como as Orientações para o Ensino Médio, há *softwares* que provocam o processo que caracteriza o “pensar matematicamente”, (BRASIL, 2006: 88) ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas.

Segundo Taneja (1997:14), “o computador não deve ser inserido na educação como uma máquina de ensinar, deve ser usado como uma informatização construcionista que permita reflexão e construção de idéias a partir da relação professor, computador e aluno". Quando o aluno está interagindo com ele está manipulando conceitos e isso contribui para o seu desenvolvimento mental, pois está adquirindo conceitos da mesma maneira que os adquire quando interage com objetos do mundo.

As novas tecnologias oferecem recursos em que a representação de processos abstratos passa a ter caráter dinâmico e isso tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito às concretizações mentais.

No entanto, para a utilização de ferramentas computacionais é necessário saber manuseá-las, ter consciência de suas potencialidades e, principalmente, ter um planejamento didático adequado, para que se atinja o objetivo de constituí-las em um auxiliar na construção dos conhecimentos matemáticos, conforme Kaiber e Renz, (2005). Para Nogueira e Andrade (2004), não se trata apenas da inserção da "informática" nos currículos escolares, e sim da alteração dos pressupostos do processo educativo, de forma a possibilitar a construção e a elaboração de conhecimentos a partir das características específicas das novas tecnologias computacionais.

Nesse contexto, foi desenvolvido o projeto "Investigando o potencial de utilização do *software* Maple no ensino do Cálculo Diferencial e Integral", na Universidade Luterana do Brasil, junto a acadêmicos dos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharias, que investigou e analisou a utilização do *software* Maple no contexto da sala de aula, como ferramenta para desenvolver aspectos teóricos e práticos do processo de ensino aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

O *software* Maple no ensino do Cálculo Diferencial e Integral constituiu-se em uma ferramenta de apoio para a compreensão dos conceitos matemáticos. Através dessa compreensão, os educandos desenvolveram a capacidade de interpretar fenômenos físicos, resolver problemas recorrendo a funções e gráficos, bem como analisar situações reais identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução. Entende-se que o Maple como ferramenta deve ser focado, não na verificação da teoria que geralmente foi apresentada *a priori* em sala de aula, mas como um instrumento capaz de viabilizar a construção de novas conjecturas e o estabelecimento de estratégias de resolução de problemas e entendimento, além da construção de conceitos pelo próprio educando. Se há alguns anos era necessário fazer contas rápidas e corretamente, hoje é importante saber por que os algoritmos funcionam, quais são as idéias e os conceitos neles envolvidos, qual a ordem de grandeza de resultados que se podem esperar de determinados cálculos e quais as estratégias mais eficientes para enfrentar um problema.

Metodologicamente, a investigação fundamenta-se nos princípios da Engenharia Didática que, segundo Artigue (1995), como metodologia de investigação, se caracteriza por ser um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, quer dizer, sobre a concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino. A metodologia Engenharia Didática se caracteriza por uma distinção temporal em seu processo experimental, composta de quatro fases: fase de análises preliminares, fase de concepção e análise *a priori* das situações didáticas da engenharia, fase de experimentação e fase de análise *a posteriori* e validação.

O desenvolvimento do projeto

O presente projeto desenvolveu-se seguindo os pressupostos da Engenharia Didática que, na sua fase de análises preliminares, buscou um referencial teórico referente aos processos de ensino do Calculo Diferencial e Integral bem como uma análise junto aos alunos quanto às suas necessidades e interesses na disciplina. Contou, também, com uma fase de concepção e análise das situações didáticas que foram previstas as ações a serem desencadeadas pelos professores juntamente com a aplicação das seqüências didáticas. Finalmente, o desenvolvimento das atividades foi realizado juntamente com a validação do processo da engenharia didática. Todas essas fases do processo passarão a ser descritas a seguir.

Análises Preliminares: o ensino do Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo Diferencial e Integral surgiu no final do século XVII, a partir dos trabalhos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Diversos problemas que ocupavam os matemáticos da época, como o cálculo de longitudes, áreas, volumes e centros de gravidade, determinação de máximos e mínimos e determinação da velocidade instantânea a partir da posição em cada momento e sua recíproca passaram a ter um tratamento unificado dado por Leibniz. As idéias de derivada, diferencial e integral, bem como suas interpretações geométricas e físicas foram desenvolvidas rapidamente, muitas vezes, associadas ao desenvolvimento da Física. O Cálculo, que no início do seu desenvolvimento tinha um caráter mais geométrico, passou a ter, no século XVIII, um caráter mais algébrico, tornando-se a base da argumentação e obtenção de resultados (RIVAUD, 1996).

Embora o cálculo tenha se desenvolvido para resolver problemas de Física, sua potência e versatilidade levaram aos mais diversos campos de estudo. A utilização dos seus conceitos fundamentais – a derivada e a integral definida – estão presentes na solução de problemas que vão desde a descrição do comportamento de partículas atômicas e a estimativa da evolução de um tumor na terapia radioativa até a determinação do trabalho necessário para mandar uma sonda espacial a outro planeta. Ambos os conceitos, de derivada e integral, são definidos por processos de limites. A noção de limite é a idéia inicial que separa o Cálculo da Matemática elementar .

Cantoral e Farfán (2004), estudaram como ocorre a evolução do processo de construção do conhecimento no campo do cálculo infinitesimal e no campo da análise matemática clássica, procurando, principalmente, responder a questões sobre o papel que a heurística e o desenvolvimento conceitual das idéias matemáticas desempenham nas questões relativas ao processo de ensino e aprendizagem. Nesse contexto, consideram importante estudar a função da indução no desenvolvimento do cálculo e analisar o papel que desempenha o estudo dos limites na evolução de uma teoria de infinitésimos.

Artigue (1995) pondera que, apesar de se poder ensinar estudantes a realizar cálculos de derivadas e primitivas e a resolver problemas clássicos, encontram-se grandes dificuldades para levá-los a entrar no campo do Cálculo e fazê-los alcançar uma compreensão satisfatória dos conceitos e métodos de pensamento que são o centro desse campo da Matemática. Essas dificuldades, segundo a autora, estão relacionadas à complexidade dos objetos básicos do Cálculo, à conceitualização e formalização da noção de limite e às rupturas necessárias com relação ao modo de pensamento puramente algébrico.

No Brasil, o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, historicamente, caracteriza-se pela prevalência de processos algébricos seguidos de exercícios, via de regra, de caráter repetitivo e com pouca, ou quase nenhuma interdisciplinaridade. Aplicações a ciências como Física e Engenharia são apresentadas nos livros textos como exercícios ou em capítulos separados, às vezes, parecendo algo isolado. No entanto, diversos estudos têm sido feitos, a fim de testar e qualificar metodologias para o ensino do cálculo, cabendo ressaltar algumas propostas.

Cabral e Baldino (2004) defendem um ensino de cálculo diferencial e integral baseado nas concepções conceituais infinitesimais. Segundo os autores, os infinitésimos sempre estiveram presentes na mecânica, no eletromagnetismo, na hidrodinâmica e nada impede que os alunos trabalhem com acréscimos infinitamente pequenos *dx* da variável *x* e com deslocamentos infinitamente pequenos *dr* de um ponto no espaço, bastando-lhes saber que um infinitésimo é um número cujo valor absoluto é menor que todo o número real positivo. Podem usar as aproximações por limites, sem que seja necessário dominar a técnica dos épsilons e deltas que os livros textos se esforçam, sem sucesso, para deixar ao alcance dos alunos. Nessa perspectiva, nada impede que se trabalhem os teoremas fundamentais do cálculo por via infinitesimal e se dê prosseguimento com ênfase em aplicações do cálculo integral.

Flemming (2004) argumenta que o trabalho do professor deve consistir em apresentar ou resgatar problemas para serem trabalhados, de modo que o aluno possa resolver e estabelecer novas e mais abrangentes interrogações, utilizando-se de todos os recursos, inclusive, os tecnológicos. Para acompanhar a evolução da tecnologia, é importante uma busca contínua de formação e de escolhas teóricas. Segundo a autora, o uso das representações semióticas tem se tornado uma sistemática em seus experimentos, pois, ao observar a história do desenvolvimento da Matemática, é possível perceber que as representações semióticas acompanham a evolução do pensamento matemático.

Santos e Bianchini (2002) utilizam o computador como ferramenta para alcançar os objetivos de levar o estudante a trilhar o caminho, a sentir o prazer da descoberta e a entender que aprender Matemática é muito mais do que decorar fórmulas e obter respostas para exercícios-padrão. Os autores procuram apresentar a Matemática como um assunto vivo, em constante construção, e não simplesmente descrevê-la como um corpo de conhecimento pronto e acabado.

Porém, considera-se que o desenvolvimento de um projeto que utilize recursos computacionais para o ensino do cálculo deve levar em consideração não só a evolução dos estudos referentes ao seu processo de ensino e aprendizagem, mas também a disposição de professores e alunos em utilizá-los. Nesse sentido, investigou-se essa postura junto a professores e alunos.

Com relação aos professores, foram investigados quatorze docentes do Departamento de Matemática da Universidade Luterana do Brasil. Dos professores entrevistados sete conhecem o *software* Maple e consideram importante utilizá-lo para o desenvolvimento do conteúdo. Acreditam que o interesse dos alunos pelas aulas seria superior se fosse utilizado um *software*. Quanto à questão aprovação e reprovação, seis dos professores entrevistados acreditam que a aprovação dos alunos seria superior, caso fosse utilizado um *software* em aula, enquanto que quatro acham que seria igual e quatro não opinaram a respeito. A opinião dos professores dividiu-se com relação à forma como a aula deveria ser organizada, entre uma aula expositiva e prática, utilizando o *software* para desenvolver o conteúdo com a participação do aluno, que refaz no *software* os exemplos citados pelo professor, e uma aula igualmente expositiva e prática, porém, utilizando o *software* para desenvolver o conteúdo com a participação do aluno, que constrói os próprios exemplos.

Com relação aos alunos, quando solicitados a manifestar seu interesse por uma aula de Cálculo que incorporasse a tecnologia, foram unânimes as manifestações de interesse. Assim, partindo do conhecimento de trabalhos de investigação já desenvolvidos sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo e de uma análise da postura dos sujeitos, professores e alunos envolvidos no processo, passou-se à concepção e elaboração das situações didáticas.

Concepção e análise* a priori *das situações didáticas

O projeto foi desenvolvido em duas turmas distintas: uma cujo conteúdo programático refere-se ao estudo de integrais impróprias e funções de várias variáveis e outra referente ao estudo de funções em coordenadas polares.

As aulas de caráter teórico-prático foram desenvolvidas no Laboratório de Informática, alternando discussões teóricas, pesquisa bibliográfica e o trabalho com o *software*. Foram propostas atividades, nas quais era solicitado que o aluno, primeiramente, apresentasse uma proposta de solução, ou seja, quais as estratégias que seriam utilizadas, em que momento, de que forma seria utilizado o *software* e como seria possível validar o resultado obtido, passando, a seguir, a resolver o problema. As situações didáticas, sob a forma de atividades, são apresentadas a seguir.

Desenvolvimento das Seqüências Didáticas

A fase da experimentação ou aplicação da seqüência didática é uma das mais importantes etapas do processo porque, nessa fase, são acompanhadas, observadas e registradas a postura, atitude e tomada de decisão dos alunos em relação à realização das tarefas propostas. O professor acompanha o trabalho do aluno, faz indagações, refuta, argumenta e registra os fatos relevantes em um diário de campo, que é retomado para complementação logo após o desenvolvimento da sessão. As tarefas desenvolvidas pelos alunos, as soluções apresentadas, as estratégias desenvolvidas também são acompanhadas através da análise das produções dos estudantes. Esses registros são de fundamental importância, para garantir a proximidade dos resultados com a análise teórica e permitir análises posteriores. A seguir, são apresentadas três atividades propostas aos alunos, bem como aspectos do seu desenvolvimento e análises pertinentes.

Situações didáticas propostas aos alunos em sala de aula

Atividade 1: Esboce o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$, determine e explique o seu domínio.

Objetivo: Estabelecer o domínio de uma função de várias variáveis.

Solução apresentada: Os alunos construíram o gráfico da função em um intervalo qualquer, buscando uma boa visualização, conforme apresentado na Figura 1.

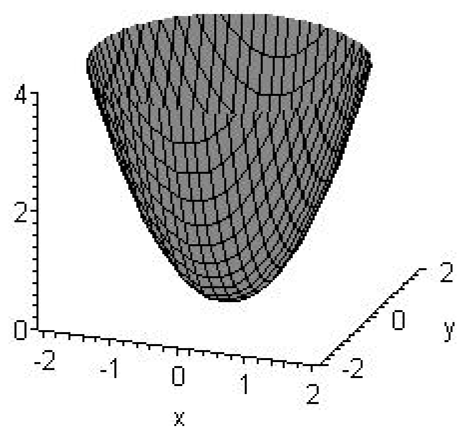


Figura 1: Gráfico da função f(x,y)=x^2 +y^2 apresentado pelos alunos

A partir da construção do gráfico e sua movimentação, estabeleceu-se a conjectura de que os traços verticais são parábolas com a concavidade voltada para cima e os traços horizontais são circunferências, o que foi confirmado através da análise da representação analítica da função.

Para a análise do domínio, foram feitas inúmeras perspectivas do gráfico da função até a apresentação da projeção no plano xy, conforme apresentado na Figura 2.

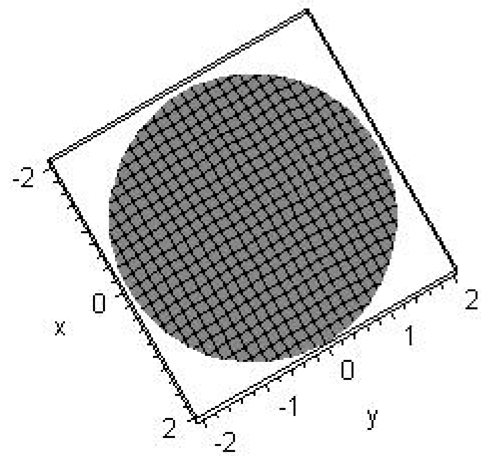


Figura 2: Gráfico da função f(x,y)=x^2 +y^2 no plano xy

Quando solicitados a determinar e explicar o domínio da função, houve uma discussão generalizada: alguns argumentavam que o domínio estava representado pela região interna à circunferência, conforme apresentado na figura 2; outros, que era todo o plano xy, mas sem muita convicção. Com o decorrer da discussão, um dos alunos escreveu novamente a função $f(x,y) = x^2 + y^2$ e afirmou que o domínio era R^2, explicando que não havia nenhuma restrição para essa função. Entretanto, a discussão continuou, a fim de descobrir o que o *software* havia esboçado. " É a sombra da função", diziam alguns; outros, "um disco sem furo".

Partindo para outras visualizações da função, foram representadas as curvas de nível na superfície e no plano, conforme apresentado na Figura 3.

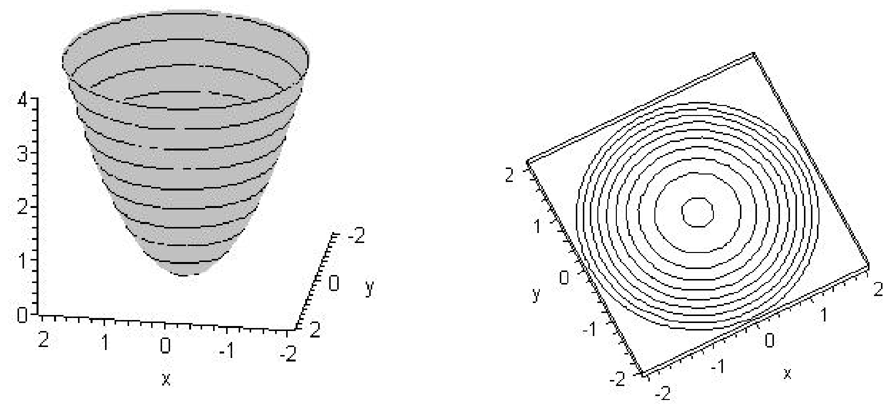


Figura 3: Gráfico das curvas de nível apresentado pelos alunos

Após inúmeros questionamentos e discussões, foi elaborada a idéia de que o que havia sido esboçado no plano não era o domínio da função, e sim uma família de circunferências dentro dos limites estabelecidos para a construção da representação gráfica da superfície. O *software*, na verdade, não havia esboçado, no plano, o domínio da função, e sim uma família de circunferências.

A partir dessa atividade, várias idéias e conceitos foram analisados, quase que simultaneamente, tais como: necessidade da análise da função para a construção gráfica, interpretação do domínio e construção das curvas de nível. Houve o consenso de que não basta digitar os comandos ou apertar teclas. É necessário analisar as situações, voltar-se aos aspectos teóricos, fazer conjecturas e confrontar os resultados, utilizando o *software* de maneira a interpretar os resultados obtidos no âmbito da sua utilização, o que leva à compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Atividade 2:

(a) Se f(x) = $\frac{1}{x^2}$, encontre $\int_1^t f(x)dx$ quando t = 1000, 2000, 3000, 4000 e 5000, conjecturando sobre a evolução dos valores. Calcule a integral analiticamente quando t tende a mais infinito e compare os resultados.

(b) Se f(x) = $\frac{1}{x}$, encontre $\int_1^t f(x)dx$ quando t = 1000, 2000, 3000, 10000 e 100000, conjecturando sobre a evolução dos valores. Calcule a integral analiticamente quando t tende a mais infinito e compare os resultados.

(c) Compare as soluções dos itens (a) e (b) e justifique sua resposta.

Objetivo: Investigar o comportamento da integral de uma função, a partir de um conjunto de valores, e analisar a convergência ou divergência de uma integral imprópria.

Solução apresentada: A primeira idéia apresentada pelos alunos foi a construção do gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ em um intervalo qualquer. O software mostrou uma linha vermelha sobre o eixo das abscissas e das ordenadas, conforme a figura 5-(a). As manifestações foram imediatas: "Por que está acontecendo isso? Está errado?", " O meu não deu certo!..."

Na comparação dos resultados com os colegas, houve a percepção de que deveria ser colocada uma variação para o eixo das ordenadas, uma vez que, inicialmente, apenas colocou-se variação para o eixo das abscissas. Assim, com as respectivas variações, apresentou-se o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, conforme a figura 5-(b).

Partiu-se, então, para a resolução da integral para diferentes valores de t, utilizando o software, conforme Figura 4.

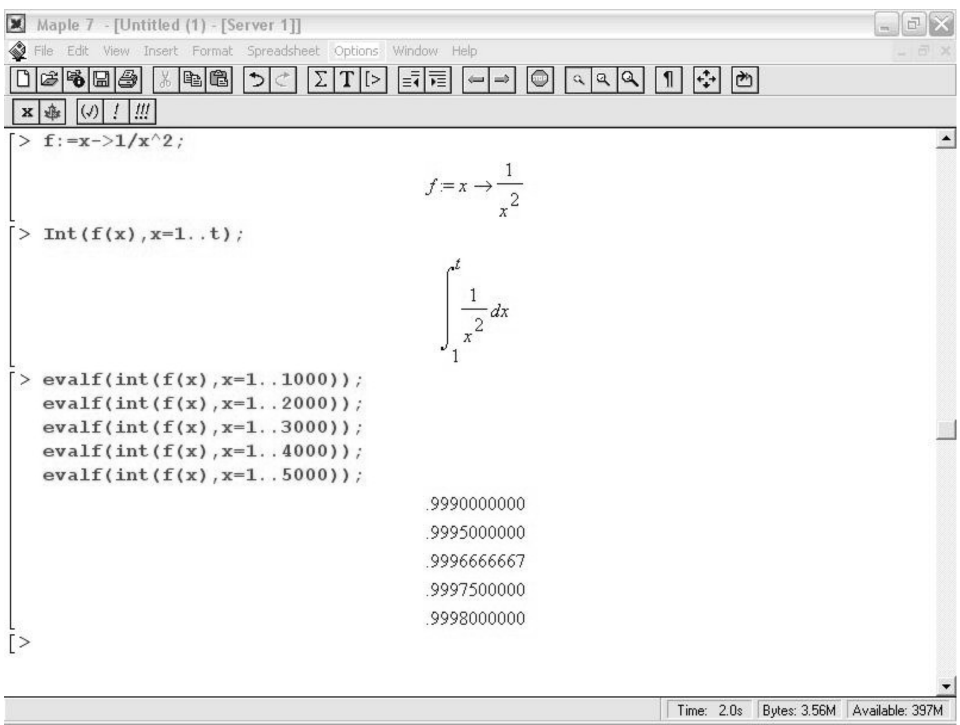
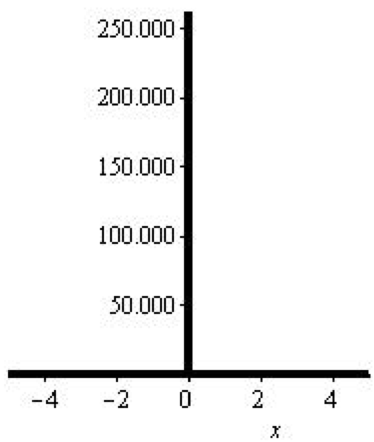


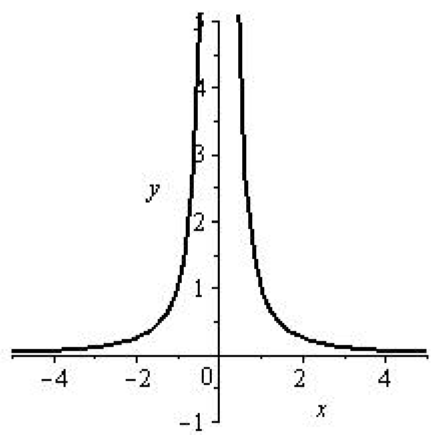
Figura 4: Construção da solução apresentada pelos alunos ao item a

A idéia intuitiva de limite foi percebida imediatamente, pois foram apresentadas as seguintes respostas: "Conforme t aumenta, o resultado da função tende a 1. O limite da integral dessa função, de 1 a t, com t tendendo a infinito é 1”. “O resultado está tendendo a 1, portanto, a integral converge”. “A integral está se estabilizando, tendendo a 0,9998000. A integral converge para 1”.

Quando solicitados a encontrar a solução analítica, alguns estudantes solucionaram utilizando o *software*; outros, lápis e papel, confrontando os resultados e concluindo que a integral convergia.

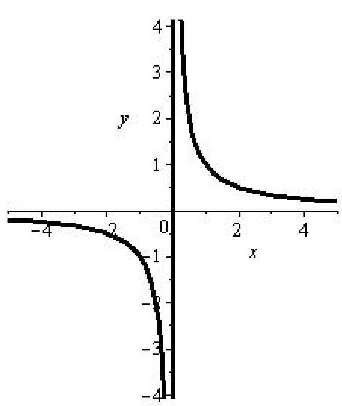
Quanto ao item (b), a idéia inicial proposta pelos alunos foi a mesma do item (a): construção do gráfico em um intervalo qualquer. No entanto, um fato inusitado aconteceu, o *software* mostrou uma linha sobre o eixo das ordenadas, apesar da variação para o eixo-y já ter sido estabelecida. Houve a percepção de que ocorrera um erro matemático, devido à inclusão do zero no intervalo estabelecido para a construção do gráfico, o que permitiu a discussão sobre a continuidade da função, conforme a Figura 5-(c).

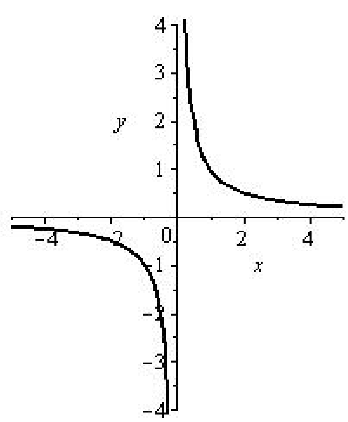




(a)

(b)





(c) (d)

Figura 5: Construção das soluções apresentada pelos alunos ao problema 1

Cabe ressaltar que, em relação à utilização do *software* Maple, na construção do gráfico da função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, figura 5-(a), houve apenas uma má visualização gráfica em função da escala utilizada. Já, na construção do gráfico da função $f(x)=\dfrac{1}{x}$, figura 5-(c), ocorreu uma limitação do *software*, que incluiu o zero no intervalo estabelecido.

Resolvido o problema gráfico, partiu-se para a resolução do problema do item (b), apresentado na Figura 6.

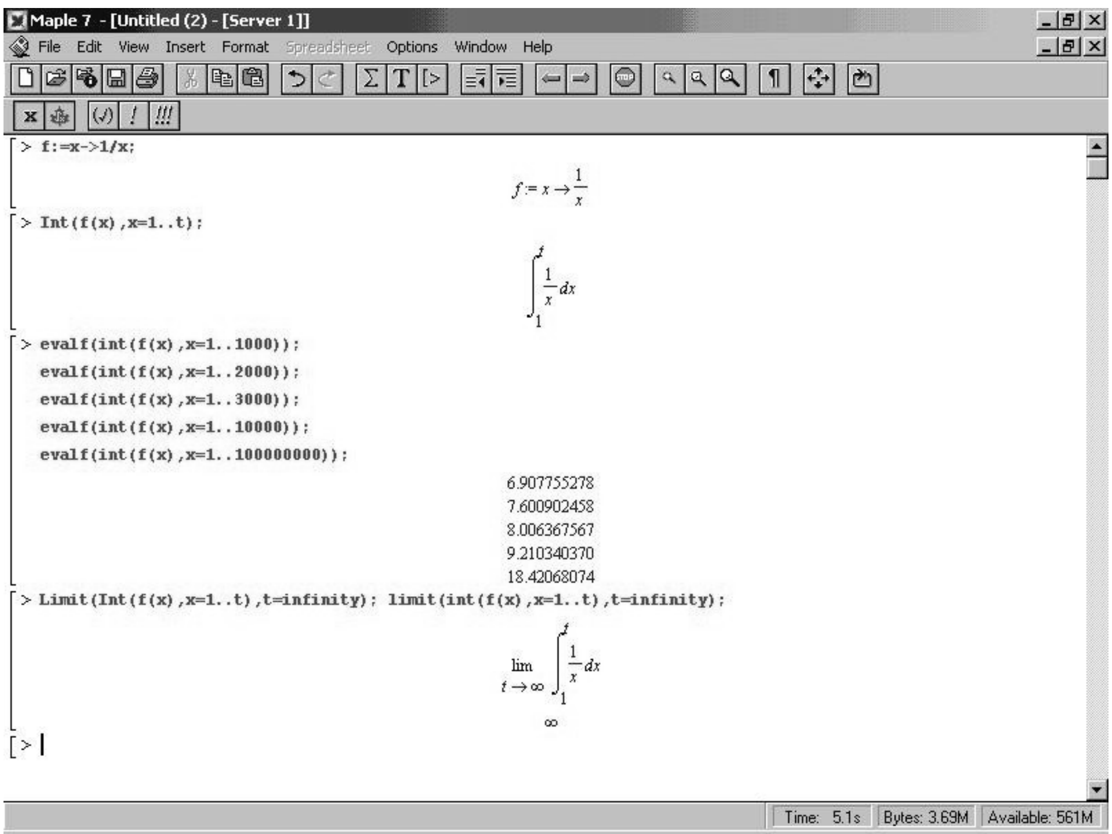


Figura 6: Construção da solução apresentada pelos alunos ao item b

Constatou-se, nessa questão, que os alunos resolveram um número maior de integrais para se certificarem de que a solução divergia, o que ficou evidenciado pelos comentários realizados em sala de aula: "acho que não dá certo", "o resultado sempre dá diferente", "o resultado está oscilando, porque a integral diverge". No entanto, para alguns, foi necessário desenvolver a solução analítica para esclarecer as dúvidas a respeito da convergência ou divergência.

Quanto à comparação dos itens (a) e (b), a resposta mais comum foi que a integral do primeiro exemplo converge e a do segundo exemplo diverge, devido ao limite da função, o que indica uma resposta ligada somente ao resultado obtido na integral. O professor provocou uma discussão sobre o decrescimento das funções em questão, como justificativa da situação de convergência de ambas.

A partir da construção gráfica, da análise dos resultados e da verificação analítica, a idéia de integral imprópria na situação apresentada ficou bem definida para os alunos. Ao longo do processo de aprendizagem, surgiram fatos novos que envolveram outros aspectos, que não o solicitado pelo professor, o que propiciou a reflexão e a discussão entre os estudantes.

Atividade 3: Construa o gráfico da equação r=a+bcos(θ) para diferentes valores de *a* e *b*, com *a*>0 e *b*>0.

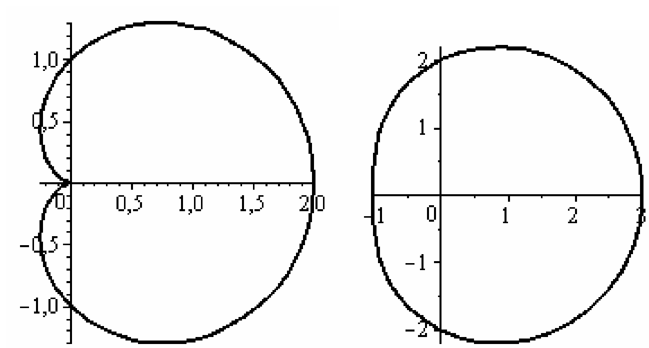
Objetivo: Reconhecer e identificar equações e seus gráficos em coordenadas polares.

Solução apresentada: A primeira idéia apresentada pelos alunos foram construções gráficas em coordenadas cartesianas. Foram construídos os gráficos das funções f(x) = 1 + cos(x) e g(x) = 2 + 2cos(x) no intervalo de variação $[-2\pi, 2\pi]$. A primeira discussão que ocorreu entre os estudantes foi em relação às diferentes escalas utilizadas pelo *software* para representação da mesma função. No primeiro instante, um grupo questionou que os gráficos das funções f(x) = 1 + cos(x) e g(x) = 2 + 2cos(x) eram praticamente iguais. Solicitados a analisar quais as diferenças, perceberam que um interceptava o eixo-*y* no ponto (0,2) e o outro, no ponto (0,4), respectivamente. A percepção que, alterando o valor das constantes a uma mesma função, ocorrem translações foi claramente observada pelos estudantes.

Cabe ressaltar que o professor desenvolveu um papel de mediador, auxiliando na interpretação das idéias e conceitos, procurando instigar os educandos a discutirem e trabalharem em grupo, para construírem os conceitos envolvidos. Dessa forma, houve a intervenção do professor, mas apenas no sentido de sugerir que realizassem novas visualizações gráficas e observassem o que estava sendo proposto.

Como o objetivo proposto era analisar a equação r=a+bcos(θ) em coordenadas polares, foi sugerido que os gráficos fossem convertidos para tal coordenada. Seguiu-se uma discussão sobre como construir um sistema coordenado polar, indicando pontos no mesmo. Para a resolução do problema, os estudantes utilizaram as seguintes estratégias:

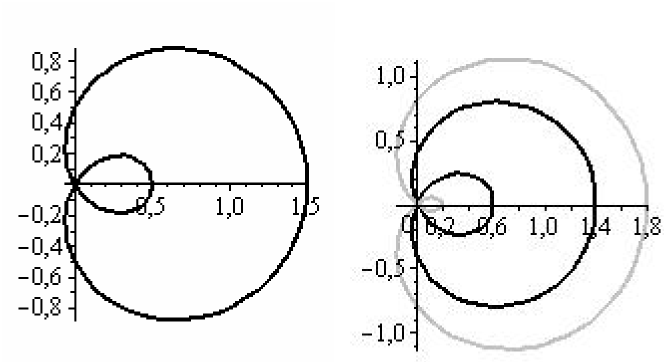
- primeiramente, mantiveram o valor de *b* constante e alteraram apenas o valor de *a* construindo o gráfico das equações $r=1+\cos(\theta)$, $r_1=2+\cos(\theta)$, $r_2=0{,}5+\cos(\theta)$, conforme observado nas Figuras 7 e 8, mais especificamente 7-(a), 7-(b) e 8-(a), respectivamente. Em um mesmo sistema de coordenadas polares, construíram o gráfico das equações $r_3=0{,}4+\cos(\theta)$ e $r_4=0{,}8+\cos(\theta)$, conforme observado na Figura 8-(b);
- em seguida, foi feito o contrário: mantiveram o valor de *a* constante e alteraram apenas o valor de *b,* construindo o gráfico das equações $r_5=1+0{,}1\cos(\theta)$, $r_6=1+0{,}6\cos(\theta)$ em um mesmo sistema de coordenadas polares, conforme a figura 9-(a). Cabe ressaltar que os gráficos foram construídos no intervalo de variação $[0, 2\pi]$.



(a) (b)

Figura 7: Equação $r = 1 + \cos(\theta)$ e $r_1 = 2+ \cos(\theta)$

Após essas primeiras construções, os estudantes conjecturaram que, quando o valor de *a* é igual ao valor de *b,* tem-se uma figura parecida com um "coração", conforme a Figura 7-(a). Quando o valor de *a* diminui, obtém-se uma Figura com laço, conforme a figura 8-(a) e 8-(b). À medida que o valor de *a* aumenta, a figura vai tomando a forma de um "coração". Instigados a analisar com mais cautela as conclusões acima, outras conjecturas surgiram, conforme exemplificado: "Para $a > 1$ não tem laço. O laço se forma quando $0< a < 1$". "Não tem coração, se $0 < b < 1$".



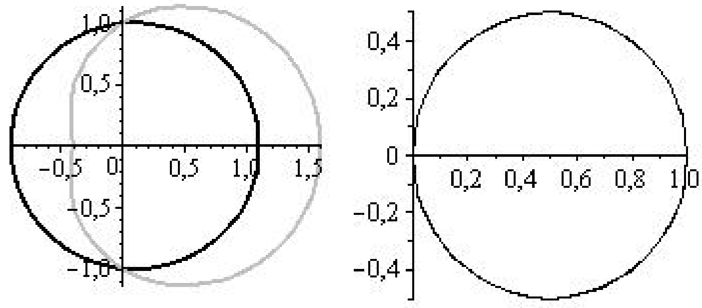
(a) (b)

Figura 8: (a) Equação $r_2 = 0,5 + \cos(\theta)$ e (b) Equações $r_3=0,4+\cos(\theta)$, $r_4=0,8+ \cos(\theta)$

Observou-se que a preocupação dos estudantes estava em analisar o que acontecia ao gráfico das equações quando fixavam uma das constantes e variavam a outra, o que permitia apenas conclusões restritas. Sugeriu-se que colocassem valores aleatórios nas duas constantes *a* e *b* e buscassem estabelecer relações entre as mesmas. Após muitas construções e discussões, surgiram outras conclusões do grupo:

- Quando o valor de *a* é igual ao valor de *b*, obtém-se uma figura parecida com um "coração", estabelecendo a relação $\frac{a}{b} = 1$.
- Quando $\frac{a}{b} < 1$, tem-se uma figura com laço.
- Quando $1 < \frac{a}{b} < 2$, tem-se uma figura sem laço.
- Quando $\frac{a}{b} \geq 2$, tem-se uma figura semelhante à anterior, porém, achatada.

Outras observações propostas pelos estudantes foram: "Se a < b, o gráfico consiste em um laço menor dentro de um laço maior", conforme figura 8-(b), e "se a > b, o laço é único", conforme observado na Figura 9-(a).



(a) (b)

Figura 9: (a) Equações r_5 =1+0,1cos(θ), r_6=1+0,6cos(θ) e (b) Equação r_7 = cos(θ)

Um grupo ainda testou o que acontecia ao gráfico da equação quando o valor de *a* é igual a zero, encontrando um círculo com centro sobre o eixo do x em (0.5, 0) e tangente na origem ao eixo-y, o que foi confirmado pela solução analítica ao problema, no caso, a conversão da equação $r_7 = \cos(\theta)$ em coordenadas polares, para a equação, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ em coordenadas cartesianas. Concluíram que, "no caso de *a = 0* a figura formada é um círculo com centro sobre o eixo-x e tangente na origem ao eixo-y", conforme Figura 9-(b).

A partir da construção gráfica, análise das equações e verificação analítica, as famílias de cardióides e limaçons ficaram bem definidas. Ao longo do processo de aprendizagem, surgiram fatos novos, que envolveram outros aspectos, que não os solicitados pelo professor, o que propiciou a reflexão e a discussão entre os alunos, como o caso do círculo encontrado na figura 9-(b).

Análise *a posteriori*

Com a utilização do Maple como recurso na disciplina de Cálculo, constatou-se grande interesse e uma significativa participação dos alunos. Os trabalhos foram realizados em pequenos grupos, o que propiciou a investigação das atividades, a análise do *software* e o questionamento entre os envolvidos.

No transcorrer das primeiras aulas, surgiram dificuldades com relação à utilização dos comandos, especialmente por parte dos alunos que não conheciam, ou conheciam pouco o *software*. No entanto, como o Maple apresenta uma interface amigável, na terceira aula, o domínio dos comandos era evidente e as dificuldades em relação ao *software* foram superadas.

Quando solicitados a apresentarem uma proposta de solução para as atividades, houve uma resistência inicial. Foram comuns perguntas como “O que eu tenho que fazer?”, “Que comando preciso usar?”. Aos poucos, foi se atingindo o amadurecimento dos alunos em relação à proposta de trabalho.

O desenvolvimento das atividades permitiu que a potencialidade do *software* fosse descoberta. No decorrer do processo foi possível perceber uma mudança: o foco da aprendizagem passou a ocorrer no domínio do processo matemático e não na mecanização do processo ou, exclusivamente, na solução algébrica ou gráfica, e o grupo passou, efetivamente, a utilizar o *software* como ferramenta.

Os avanços no processo de aprendizagem ocorreram quando as soluções obtidas com a utilização do Maple iam além dos conhecimentos do aluno. Por exemplo, analisando graficamente uma função, em um primeiro momento os alunos concluíram que a função que não intercepta o eixo das abscissas, não tem raízes. No entanto, o *software* encontrava algebricamente as raízes dessa função. Alguns alunos achavam que estava errado; outros justificavam que o *software* encontrara raízes complexas. Surgiu a preocupação com a definição dos conceitos, com a análise e reflexão sobre os resultados algébricos e geométricos encontrados e com a maneira de expressá-los corretamente.

Com relação às equações polares os estudantes, com muita familiaridade, passaram a reconhecer as equações polares e associá-las a sua representação gráfica, bem como, as relações entre as constantes de uma equação polar que determinam as diversas curvas.

Cabe ressaltar que essas experiências foram possíveis devido à flexibilidade do Maple e ao enfoque não analítico adotado. Percebeu-se que o conhecimento foi construído a partir do envolvimento na solução dos problemas propostos, nas discussões realizadas nos pequenos e no grande grupo e através das ações e intervenções do professor. O ambiente informatizado foi o diferencial, porque possibilitou um substrato de ação que a aula convencional não propicia.

Conclusão

O desenvolvimento do projeto mostrou que explorar *softwares* matemáticos, identificando o potencial de utilização dos mesmos no ensino da Matemática é um trabalho fascinante e promissor. Levar esse trabalho para a sala de aula motiva os alunos, possibilita um trabalho autônomo, aumentando o interesse e a participação, o que leva a uma melhor compreensão dos conteúdos.

Contudo, incorporar tecnologia às aulas de Matemática vai muito além de proporcionar os instrumentos tecnológicos aos estudantes. A aprendizagem deve desenvolver-se em um ambiente apropriado e em situações que favoreçam a construção sólida dos conhecimentos, transformando a maneira como se resolvem problemas teóricos e práticos, como se faz e como se percebe a Matemática (Silva, 2003).

Cabe ressaltar que a continuidade das pesquisas envolvendo ferramentas computacionais é de grande importância, pois se constitui em estudo atual e necessário, não só em termos de aplicações específicas, mas como base para a discussão dos efeitos da sua utilização no ensino.

Referências

Artigue, M. et al. (1995).*Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica

Brasil, Ministério da Educação. (2006) *Orientações Curriculares para o ensino médio. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Secretaria de Educação Básica: Brasília

Cabral, T. C. B. e Baldino, R.R. (2004) O Ensino de Matemática em um Curso de engenharia de sistemas digitais. In: disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas. Helena Noronha Cury (Org.) Porto Alegre: EDIPUCRS, 139-186.

Cantoral, R. U.e Farfán, R. M. M. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo.* México, Thomson Learning,

Flemming, D. M.. (2004) O ensino de cálculo nas engenharias: Relato de uma caminhada. In: disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas. Helena Noronha Cury (Org.) Porto Alegre: EDIPUCRS. p. 271-292.

Kaiber, C. T. e Renz, S. P.(2005) Uma proposta metodológica para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral. In: V Congresso Ibero-americano de educação matemática, 2005, Cidade do Porto. *Anais***.** Cidade do Porto: Associação de Professores de Matemática,.

Nogueira, C. M. I; Andrade, D. (2004).Você quer discutir com o computador. *Educação Matemática em Revista,* São Paulo, n. 16, maio, 25-29.

Rivaud, J. J. M.(1996) Del Cálculo al Análisis: Desarrollo del concepto de función. In: Trigo, Luz Manuel Santos e Sánchez, Ernesto Sánchez. *Perspectivas en Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica S. A., P117-133.

Santos, A. R. dos e Bianchini, W. (2002). *Aprendendo Cálculo com Maple – Cálculo de uma variável.* Rio de Janeiro, LTC,

Silva, C. K. (2003) Informática e Educação Matemática. In: V Simposio de Educación Matemática, 2003, Chivilcoy. *Memorias.* Buenos Aires: Edumat

Taneja, I. J. (1997) *MAPLE V – Uma Abordagem Computacional no Ensino de Cálculo.* Florianópolis: Editora da UFSC.

LAS AUTORAS:
C**armen Teresa Kaiber**
Doctora Professora Titular do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil -ULBRA
Línea de Investigación: Ensino e Aprendizagem em Ensino de Ciências e Matemática
Miembro del Cuerpo Editorial de Educação Matemática em Revista (Rio Grande do Sul)
kaiber@ulbra.br

Sandra Pacheco Renz
Mestrado em Matemática Aplicada
Línea de Investigación: Novas Tecnologias para o ensino de Ciências e Matemática
Universidade Luterana do Brasil, Campus Canoas
sp_renz@yahoo.com.br