LA INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO DESDE LAS PRÁCTICAS SOCIALMENTE COMPARTIDAS

Oscar Alejandro Cervantes Reyes

Resumen

Con base en la investigación "La Construcción de un Lenguaje Simbólico desde las Prácticas Socialmente Compartidas" donde analizamos un estudio de caso de la albañilería (Cervantes, 2015), diseñamos una propuesta de intervención didáctica sustentada en la correlación hallada entre los modelos del pensamiento proporcional y el lenguaje algebraico en su primeras fases. Nuestra hipótesis es que si en la historia de la humanidad el lenguaje algebraico fue evolucionando a través de diferentes fases hasta llegar a la fase simbólica que hoy conocemos, entonces, es posible reconstruir lo vivido en la actualidad, a partir de una propuesta centrada en las prácticas.

Palabras claves: Socioepistemología, prácticas, pensamiento proporcional, lenguaje algebraico.

Introducción

El *programa funcionalista* centrado en la *estructura sintáctica* del lenguaje algebraico si bien resulta adecuado para localizar los obstáculos didácticos que se han documentado en el aprendizaje del lenguaje algebraico y funciona para explicar las dificultades en su adquisición, no ha resuelto plenamente el problema del aprendizaje del Álgebra como muestran las evaluaciones internacionales; es decir, se continúa por la ruta de un simbolismo carente de sentido y significado (Filloy y Kieran, 1989). El modelo es adecuado para explicar los obstáculos en el aprendizaje del Álgebra, pero no lo es para las propuestas de intervención didáctica (problemática, dificultades, obstáculos en el aprendizaje del lenguaje algebraico). A sabiendas de que el problema del aprendizaje del Álgebra sigue sin resolverse, proponemos una estrategia centrada en *prácticas situadas*, prácticas socialmente compartidas, que "atraviesan la realidad de quien aprende", donde se asume al saber como un conocimiento en uso; tomando como base el modelo del *pensamiento proporcional* y *desarrollo del lenguaje algebraico*. A diferencia del programa funcionalista, consideramos la sintaxis algebraica en un segundo término, porque tal como se enuncia en la investigación de Cervantes (2015), aún antes de los símbolos existen significados. Nuestro programa sí pretende intervenir directamente en el sistema educativo, a través de propuestas de intervención didácticas, proceso al que obedece esta propuesta.

Fundamentación

La investigación de Cervantes (2015) base de esta propuesta, fue desarrollada desde la mirada de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, perspectiva teórica que a través de la construcción de la unidad de análisis socioepistémica correspondiente, permitió estudiar nuestro objeto de interés "el lenguaje algebraico", mediante una primera aproximación al examen del saber, amplio y sistémico; que considera las múltiples relaciones entre los vértices del triángulo didáctico, así como las restricciones institucionales pedagógicas, las múltiples dimensiones del saber y las restricciones específicas del saber matemático (Cantoral, 2013). El estudio de Cervantes (2015) reconoce la albañilería como práctica de referencia, que a su vez encierra diferentes prácticas socialmente compartidas tales como el revoco de paredes, el pegado de tabique, la construcción de cisternas, etc. Y en forma anidada, en estas prácticas socialmente compartidas encontramos diversas actividades y acciones intencionadas que las integran, que después del estudio podemos señalar que hay algo que las norma, que le hace hacer lo que hace al albañil, una práctica social que le hace buscar una especie de equilibrio en su práctica. Así mismo, piezas fundamentales en esta propuesta, son los modelos de pensamiento proporcional postulados por Reyes-Gasperini (2011) y el desarrollo del lenguaje algebraico señalado por Nesselman (citado por Malisani, p. 4) identificados también puestos en juego en la práctica de referencia antes mencionada y que son la base de nuestra ruta hacia la construcción del lenguaje algebraico, camino que no fue construido a modo, sino que es una ruta ya trazada, en uso, funcional inmersa en una práctica de referencia, que responde a la naturaleza del saber (Cervantes, 2015).

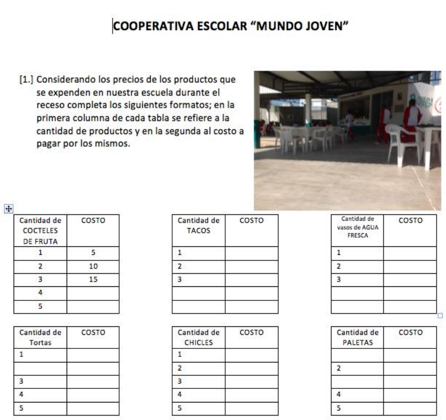
Método

El diseño de la propuesta de intervención didáctica obedece, en términos generales, a las orientaciones de una ingeniería didáctica sin que ello implique un total apego a la misma. Dicha secuencia estuvo integrada por 6 actividades enmarcadas en el contexto del cotidiano del alumno, mismas que requirieron del aprovechamiento de los recursos tecnológicos con los que cuenta la institución educativa donde se llevó a cabo la experiencia.

La población participante fue un grupo heterogéneo de 37 alumnos de primer grado del turno matutino de una escuela secundaria en la mixteca oaxaqueña . Para el diseño de las actividades se hizo un análisis *a priori* acorde al objetivo principal: la construcción de un lenguaje simbólico cercano a la noción de lenguaje algebraico, secuencia centrada en las prácticas y en la construcción de significados desde la perspectiva Socioepistemológica.

Secuencia de actividades

ACTIVIDAD 1



COOPERATIVA ESCOLAR "MUNDO JOVEN"

[1.] Considerando los precios de los productos que se expenden en nuestra escuela durante el receso completa los siguientes formatos; en la primera columna de cada tabla se refiere a la cantidad de productos y en la segunda al costo a pagar por los mismos.

Cantidad de COCTELES DE FRUTA	COSTO
1	5
2	10
3	15
4	
5	

Cantidad de TACOS	COSTO
1	
2	
3	

Cantidad de vasos de AGUA FRESCA	COSTO
1	
2	
3	

Cantidad de Tortas	COSTO
1	
3	
4	
5	

Cantidad de CHICLES	COSTO
1	
2	
3	
4	
5	

Cantidad de PALETAS	COSTO
2	
4	
5	

El objetivo se centró en que a través de la modelación los alumnos visualicen matemáticamente los procesos de compra venta que ocurren en su contexto escolar. La actividad se desarrolló sin ninguna dificultad, los alumnos llenaron las tablas de acuerdo con las indicaciones, se ubicaron en su contexto retomando los nombres y precios actuales de los productos que consumen en el recreo.

ACTIVIDAD 2

En esta actividad se le pide al alumno que observe detenidamente los números de las dos columnas, cada una por separado, posteriormente se le pregunta si identifica o reconoce alguna relación, patrón o comportamiento entre los números. El objetivo de la actividad fue que los alumnos pusieran en juego su pensamiento proporcional. En sus respuestas y participaciones, los alumnos evidenciaron los modelos aditivo simple y multiplicativo del pensamiento proporcional, en este último reconocieron una relación entre las columnas, es decir, que la segunda se obtenía multiplicando el valor de la primera columna por 5.

[2.] CONSIDERANDO EL CASO DE LOS COCTELES DE FRUTA

Cantidad de cocteles	Costo o total a pagar
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

Observa los números de la primera columna: 1, 2, 3, 4 y 5; ¿reconoces alguna relación entre estos números? ________ explica ______________________________
____

Observa los números de la segunda columna: 5, 10, 15, 20, y 25 ¿identificas alguna relación entre estos numeros ? ________ explica ______________________________
____

ACTIVIDAD 3

[3.] Observa cada una de las filas(renglones)¿reconoces alguna relación entre los elementos de la primera fila y los de la segunda?__________
describela______________________________
____
____

Cantidad de cocteles	Costo o total a pagar
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

¿cómo a partir de los números de la primera columna puedes obtener el correspondiente elemento de la segunda columna?, ¿que operación (sumar, restar, multiplicación o dividisión) le tengo que aplicar al "1" para obtener un "5"?

Escribe en la columna de en medio la(s) operación(es) necesaria(s).

Cantidad de cocteles		Costo o total a pagar
1	=	5
2	=	10
3	=	15
4	=	20
5	=	25

Considerando la relación entre las columnas, completa la expresión: el valor de la tercera columna es igual a ______________________________

De manera semejante a la actividad anterior, en esta actividad se pretendía que los alumnos pusieran en juego el modelo multiplicativo de pensamiento proporcional mediante el análisis de las dos columnas de la tabla. En efecto, en el desarrollo de la misma, los alumnos dispusieron del modelo multiplicativo, explicaron que: se puede obtener el valor de la segunda columna, al multiplicar el valor de la primera por cinco, donde cinco es el precio de un coctel de fruta. Así mismo completaron la expresión "el costo total a pagar es igual a: el número de cocteles por el precio del coctel", donde se evidencia además, el uso del lenguaje algebraico en sus fases retórica y sincopada, ya que antes de escribirlo lo pronunciaban, situación que se repitió a manera de reforzamiento con los demás productos.

ACTIVIDAD 4

Se retoma la actividad 3, pero ahora orientada a formalizar las expresiones de acuerdo con las reglas sintácticas del Álgebra, pero sin caer en lo dictatorial; porque los alumnos determinan y usan las abreviaturas o símbolos que ellos determinan o construyen, es decir, se orienta hacia la noción de lenguaje algebraico pero sin ser estricto. Cabe señalar, que no se busca una generalización temprana, sino más bien una simplificación, una forma más breve de explicar o representar (modelar) un fenómeno.

[4.] Retomando nuevamente el primer caso (cocteles de fruta) y la relación que se establece entre el número de cocteles y el costo a pagar por los mismos:

El costo total a pagar (tercera columna) es igual a: cantidad de cocteles X precio del producto

Lo cual resulta lo mismo reescribir como

El costo total a pagar (tercer columna) es igual a: precio del producto X cantidad de cocteles

En otras palabras

El costo total a pagar (tercer columna) es igual a: $5 X cantidad de cocteles

A fin de escribir de manera más simplificada la relación anterior, utiliza abreviaturas, contracciones o símbolos.

EXPRESIÓN	SIMPLIFICACION
Costo total a pagar	
Es igual a	=
Número de cocteles	

Abajo de la expresión escribe las simplificaciones que hayas determinado, de acuerdo a la expresión:

El costo total a pagar (tercer columna) es igual a : $ 5 X cantidad de cocteles

_______= _________

En esta actividad se fortalece o subraya el paso de la fase retórica a sincopada del lenguaje algebraico donde los alumnos usaron abreviaturas, contracciones, símbolos y dibujos, predominando los dos últimos. Situación que se repitió para todos los productos, y en cada uno de ellos utilizaban representaciones diferentes, dependiendo del producto, solo se repetía el símbolo # para representar la palabra número.

Posteriormente, con esta idea de simplificar aún más, se les preguntó de forma expresa si era posible representar el número de vasos y el costo total con solo una letra, la respuesta fue un rotundo ¡sí!. A pesar de esto, en el desarrollo, cinco alumnos siguieron utilizando dibujos en lugar de una letra, esta situación tenía la intensión de recrear o retomar el paso de la fase sincopada a la simbólica del lenguaje algebraico. A esta última expresión la denominamos "mínima expresión", en el sentido que se utilizará la mínima cantidad posible de letras, en la mayoría de los casos los alumnos utilizaron la primera letra del nombre del producto, por ejemplo "a" para representar el número de vasos de agua, "p" para representar el número de paletas, etc.

ACTIVIDAD 5

[5.] ACTIVIDAD: EN GEOGEBRA ACTIVA LA VISTA HOJA DE CÁLCULO Y CREA PARA CADA UNO DE LOS CASOS UNA GRÁFICA POLIGONAL

- Ya que activaste la vista hoja de cálculo, introduce los datos
- Selecciona los datos y le das un clic con el botón secundario (derecho), del menú que aparece eliges la opción, crear→ poligonal.

En un microsoft Word realiza un documento que contenga: las tablas de los productos y su respectiva gráfica poligonal.

De manera semejante a las actividades anteriores, la actividad 5 se llevó a cabo sin complicaciones, el objetivo consistía en que el alumno relacionara diferentes representaciones del fenómeno de compra – venta: el lenguaje natural, la modelación tabular y la representación gráfica. Situación que se repitió con todos los productos con la finalidad de fortalecer lo que Butto y Rojano (2004) refieren como el vínculo entre los campos aritmético y geométrico, que bien este último pudiésemos referirlo como gráfico, funcional o variacional.

ACTIVIDAD 6

[6.] ACTIVIDAD: REPITE LA ACTIVIDAD ANTERIOR, CONSIDERANDO UNA GRÁFICA POR CADA ARCHIVO, DESPUES DE GENERAR LA POLIGONAL, INTRODUCE LA MÍNIMA EXPRESIÓN EN LA BARRA DE ENTRADA, PARA ESTO, OMITE EL ASPECTO "COSTO TOTAL A PAGAR" Y EL SIGNO IGUAL, RECUERDA QUE "EL NÚMERO DE COCTELES" DEBEMOS DE REPRESENTARLO CON SOLO UNA LETRA.

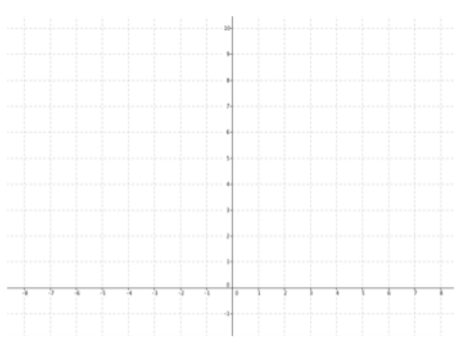
NOTA: SOLO ESCRIBE LO QUE SE REFIERE AL PRECIO DEL PRODUCTO POR EL NUMERO DE PRODUCTOS, ES DECIR, LO DEL LADO DERECHO DE LA EXPRESIÓN.

Mínima expresión

$t = 5c$

OBSERVA LAS GRAFICAS RESULTANTES EN GEOGEBRA Y REPRODUCELAS EN EL PLANO CORRESPONDIENTE, A LADO DE CADA "mínima expresión"

COCTELES DE FRUTA
Mínima expresión
________= ___________



Aquí se plantea realizar una aplicación en Geogebra a manera de ampliación de la actividad anterior, ya que además de generar la poligonal de cada tabla se pide que se introduzca la mínima expresión con el propósito de que el alumno relacione el fenómeno de compra – venta con sus diferentes representaciones tabular, poligonal, mínima expresión y funcional, en otras palabras se busca que el alumno relacione los diferentes dominios (Butto y Rojano, 2004), el dominio aritmético, el algebraico y el geométrico. Sin embargo, es importante señalar que en nuestro caso no se limita al análisis aritmético, sino que este apunta hacia la identificación de relaciones a través del uso de los modelos de pensamiento proporcional. Por otra parte, la mínima expresión no está sujeta a las reglas sintácticas del Álgebra, y respecto al dominio geométrico, nosotros apuntamos hacia nociones más complejas como la noción de función y el pensamiento variacional.

A partir de la generación de la primera gráfica se les pide a los alumnos que infieran cómo será la segunda donde cambia el coeficiente, antes de introducir la siguiente expresión a fin de que ellos traten de reconocer la relación entre los parámetros y el comportamiento de la gráfica. La introducción de los datos de las tablas y la generación de poligonales con el software, se realizó sin ninguna dificultad, sin embargo, al tratar de introducir la mínima expresión solo una alumna obtuvo la gráfica, a los demás alumnos el software les pedía su anuencia para generar un deslizador. Situación que aprovechamos para introducir las normas sintácticas del Álgebra, pero esto a partir del supuesto “error” generado intencionalmente en la secuencia de actividades. Al cuestionarle a la alumna respecto de la expresión mínima que introdujo en Geogebra, señaló que la expresión utilizada fue “$5x$”, ante esto, preguntamos ¿por qué utilizaste una “x” en tu expresión?, a lo cual respondió que en su vida cotidiana ha escuchado que los personas dicen la expresión “$x\ cosa$” para referirse a algo indeterminado, razón por la que utilizó la x para representar el número de cocteles.

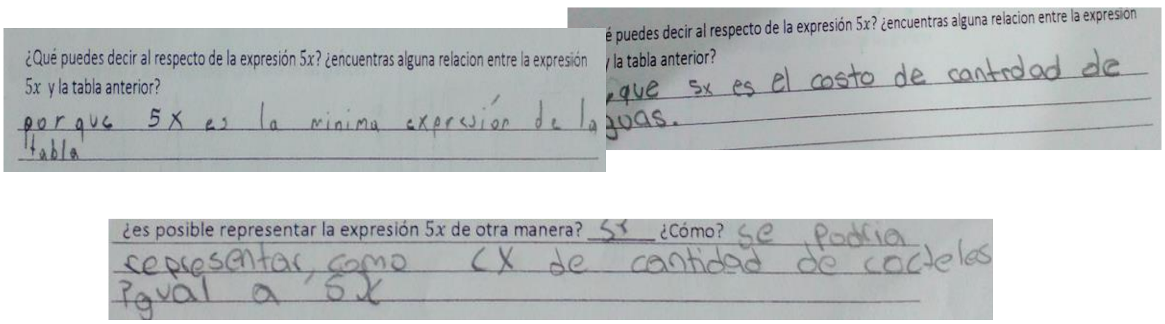
Los alumnos reconocieron las coincidencias o relaciones entre la tabla, la poligonal y la gráfica, donde nosotros enfatizamos que eran diferentes representaciones del mismo fenómeno. Al término de la puesta en práctica la secuencia de actividades, aplicamos una evaluación, a fin de constatar los logros alcanzados.

Resultados

Los alumnos aprovecharon adecuadamente las tablas para modelar la situación cotidiana de compra-venta de productos alimenticios, llenaron las tablas considerando los nombres y precios reales de los productos que se expenden en la escuela. Reconocieron además, que los datos de las tablas y sus relaciones son posibles de representar de diferentes maneras, a través de gráficas, de expresiones en lenguaje natural, expresiones con abreviaturas o símbolos, procesos en los que también, pusieron en juego su pensamiento proporcional. Por otra parte, los estudiantes relacionaron las expresiones algebraicas de la forma Ax (donde $A, x \in \mathbb{Z}, A$ es el precio del producto y x la cantidad de productos) con los procesos de compra-venta de la cooperativa escolar, situación donde puntualmente refieren los precios vigentes de los productos, el nombre de éstos y el total a pagar, reconocen además, que dichas expresiones pueden significar procesos de compra-venta en otros ámbitos, no solo en la escuela. En este sentido, reconocemos que las expresiones de la forma Ax construidas y utilizadas por los alumnos no están sujetas a normas, dado que utilizaron distintas abreviaturas, literales, símbolos o dibujos, sin perder el significado, lo que interpretamos cómo restitución al significado actual del conjunto de significados construidos a lo largo de la génesis conceptual, que la propia historia de las ideas y la costumbre didáctica eliminó, es decir recuperamos la *fenomenología intrínseca* del lenguaje algebraico (Cantoral, 2013, p. 130).

Todos los registros de evaluación muestran las diferentes fases de desarrollo del lenguaje algebraico ya sea de forma implícita o explícita, así mismo resulta importante mencionar que no hay un orden en la emergencia de las fases o en la puesta en juego de las fases del lenguaje algebraico, sin embargo es posible que esto obedezca a la forma en que se plantean las diferentes actividades, aspecto que tomaremos en cuenta para su modificación en lo sucesivo. De igual forma, consideraremos otras variables como el atender los diferentes productos que se expenden en la cooperativa, así como la incorporación de la cuadricula en las gráficas para facilitar la lectura de las gráficas.

Algunos de los significados y representaciones alternas de la expresión 5x utilizadas por los alumnos fueron:


¿Qué puedes decir al respecto de la expresión $5x$? ¿encuentras alguna relacion entre la expresión $5x$ y la tabla anterior?
porque 5x es la minima expresión de la tabla

é puedes decir al respecto de la expresión $5x$? ¿encuentras alguna relacion entre la expresion y la tabla anterior?
que 5x es el costo de cantidad de aguas.

¿es posible representar la expresión $5x$ de otra manera? 5x ¿Cómo? se podria representar como cx de cantidad de coctelas igual a 5x

Fig. 1: Evidencias de la evaluación

Es decir que $5x$, no tiene un significado específico, es relativo, pero justificable y verdadero para cada uno de los alumnos: en el primer caso, para el alumno significa el proceso de compra-venta de aguas frescas, en el segundo, se refiere al mismo proceso de compra-venta pero de cocteles, con la aclaración de que el precio unitario de las aguas frescas y de los cocteles es el mismo $ 5.00 (cinco pesos), uno lo representa $5x$ y el otro como $5c$, a pesar de usar símbolo diferentes, ambos son válidos, dado que tienen sentido y significado para ellos. Así mismo, el tercer caso no cambia la notación propuesta, pero explica que para él $5x$ "es la expresión mínima de los valores de la tabla".

Aunado a lo anterior, los alumnos representaron gráficamente expresiones de la forma Ax mediante el análisis de parámetros, lo que evidencia que en ellos está presente la relación entre los diferentes planos: aritmético, algebraico y gráfico, situación que además acerca al alumno a la noción de función y linealidad:

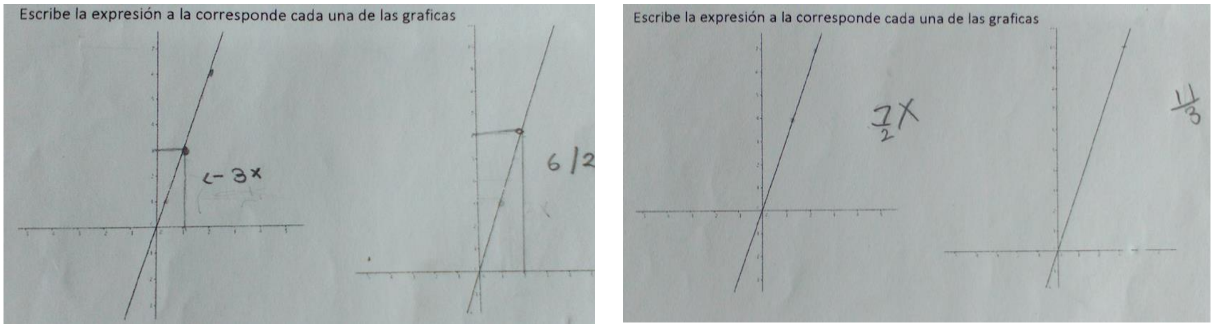


Fig. 2: Evidencias de la evaluación

Conclusiones

Entonces, dado que nuestro objetivo era construir el lenguaje algebraico desde las prácticas socialmente compartidas, aquí evidenciamos que es posible con base en los fundamentos teóricos de la Socioepistemología. El pensamiento proporcional y el lenguaje algebraico en sus fases retórica y sincopada, fundamentos que encontramos "vivos", en uso, en la práctica de referencia de la albañilería (Cervantes, 2015, pp. 130-132), base de la presente propuesta. Podemos afirmar que los alumnos lograron construir un lenguaje simbólico, con sentido y significado desde su contexto, dado que fueron capaces de construir, operar y representar expresiones de la forma Ax , llamándoles simplemente "expresiones", expresiones provistas de significado desde su marco de referencia, sin que estas estuviesen sujetas a las normas sintácticas del Álgebra, sin llamarles por su nombre a los diferentes elementos de las expresiones; sin que ello limitara su significado o representación, dado que ellos van de una representación tabular a una representación en lenguaje común, a representaciones donde utilizan abreviaturas, símbolos o dibujos, así como representaciones gráficas en el plano. Lo anterior, muestra que aún antes del simbolismo es posible la emergencia de significados que responden a la naturaleza del saber del lenguaje algebraico. Aspecto que atiende de forma directa la problemática que señala Malisani: el lenguaje algebraico ha venido evolucionando "gradualmente hasta que se llega a elaborar un simbolismo algebraico correcto sintácticamente y más eficiente operativamente, en este proceso se observa el abandono progresivo del lenguaje natural como medio de expresión de las nociones algebraicas" (1999, p. 19), y con ello la pérdida de significados. En nuestro caso, trabajamos en un proceso inverso: ir de los significados a los ajustes sintácticos. Donde, al final de las secuencias de actividades cuando el alumno ya es capaz de construir, interpretar y operar expresiones mínimas a partir de un fenómeno de su vida cotidiana, hasta entonces como algo secundario se realiza la formalización o institucionalización de dicho saber, mediante la señalización de los nombres de los elementos que integran dichas expresiones. Por otra parte, sostenemos la hipótesis que esta vía favorece la construcción de otras nociones o conocimientos, como la noción de función o más ampliamente la noción de linealidad.

Referencias

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. Educación Matemática, 16(1), 113-148.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Editorial Gedisa, S. A.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Cervantes, O. (2015). La construcción de un lenguaje simbólico desde las prácticas socialmente compartidas (*Tesis de maestría no publicada*). Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca, Oaxaca, México.

Filloy, E. y Kieran, C. (1989). El aprendizaje del Álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), 229-240.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista IRICE (Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación), 13*. Recuperado de http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 360-382. doi: 10.1590/1980-4415v28n48a14

Autor

Oscar Alejandro Cervantes Reyes; Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca. México; yuza_cero7@icloud.com