

# EL USO DE LA GRÁFICA A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN-GRAFICACIÓN CON SENSORES DE MOVIMIENTO

*Fredy de la Cruz Urbina, Hipólito Hernández Pérez*

## **Resumen**

Con la Modelación-Graficación de fenómenos de movimiento se provoca el uso de las formas de representación numérico, gráfico y algebraico de un fenómeno, por medio de las cuales es posible visualizar y reconocer patrones o comportamientos, analizar la variación y establecer reglas que permitan comprender e influir en la situación. Por tanto, desarrollar argumentos y significados sobre las formas de representación de un fenómeno es una tarea imprescindible para entender la funcionalidad de los objetos matemáticos y poder usarlo con intención. En esta propuesta se favorecen estos constructos a partir de la Resignificación de la función cuadrática.

**Palabras claves: Modelación-graficación, gráfica, funcionalidad, movimiento**

## **Propósito y alcance**

Se propone desarrollar argumentos y significados sobre *el uso de la gráfica* a partir de la Modelación-graficación como práctica social, con la finalidad de utilizarla como una herramienta de argumentación del fenómeno. Desde la mirada socioepistemológica se articula la situación y la participación de los asistentes en la construcción del conocimiento. Estos elementos no se soslayan como en el discurso escolar dominante sino se favorecen con la intención de provocar el *uso* del conocimiento matemático.

El propósito del taller es dar a conocer el diseño de una secuencia didáctica que tiene como fundamento la Modelación-graficación de fenómenos de movimiento para resignificar las formas de representación de la función cuadrática, concepto que debe estudiarse en el tercer grado de nivel secundaria y el primer semestre de bachillerato. Con esta puesta en escena se pretende que los participantes desarrollen elementos para hacer uso de la gráfica como herramienta de argumentación.

El taller está dirigido a profesores de nivel secundaria y bachillerato que en su quehacer docente deben favorecer estos constructos, además, atendiendo a la Reforma Integral para la Educación Media Superior (RIEMS) considera a la Modelación como estrategia de enseñanza y la inclusión de la tecnología para proporcionar un escenario pertinente que favorezca de acuerdo con el plan de estudios en comento:

El desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven al despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas que en sus aplicaciones

trasciendan el ámbito escolar (Secretaría de Educación Pública, 2013, p. 6).

De manera general el taller considera y favorece estos elementos a partir de la práctica social que es la generadora del conocimiento matemático y el referente para rediseñar el discurso matemático escolar donde deviene la funcionalidad del conocimiento matemático (Morales y Cordero, 2014).

### Marco teórico

El presente trabajo está enmarcado bajo la Teoría Socioepistemológica (TS), desde esta perspectiva se asume que las Matemáticas es producto de una construcción social y que por ello no deben soslayarse los problemas sociales y culturales que acompañan a la actividad humana. “Cada época en la historia de la enseñanza produce, mediante sus prácticas sociales cotidianas, conocimiento” (Cantoral, 2013, p. 105).

La Socioepistemología, como sistema teórico para la investigación en Matemática Educativa, se ocupa específicamente del problema que plantea la conformación del saber matemático. Es importante precisar que en este enfoque asumimos la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues en su conjunto constituyen la sabiduría humana (Cantoral, 2013, p. 26).

La TS considera a la actividad humana como la fuente de reorganización de la obra matemática y del Rediseño del Discurso Matemático Escolar (RDME), “Para ello, se construye la situación donde la práctica se transforma en el argumento, como el eje o núcleo para generar el conocimiento matemático que responda a la situación” (Cordero, 2003, p. 77).

Las investigaciones de Cantoral (2001), Arrieta (2003) y Suárez (2008), constituyen un referente con base a la investigación de Oresme para hacer uso de la gráfica en la modelación de fenómenos de movimiento (modelación-graficación) para resignificar el *aspecto funcional* de las funciones con *el cambio y la variación*, es por ello que nos valemos de esta práctica como medio para generar conocimiento matemático partiendo desde la situación.

Habiendo realizado una revisión histórica-epistemológica de la función cuadrática, nos dimos cuenta que a lo largo de la historia han existido conceptos que fueron abonando a la idea de función. Cantoral menciona que la utilización del *Teorema del grado medio* en forma reiterada para el estudio de la variabilidad, el cambio y la dependencia inició el proceso de consolidación de la noción de *función analítica* (Cantoral, 2001).

El estudio del concepto de Función Cuadrática (FC) en el discurso escolar se desarrolla en el tercer grado de educación secundaria y en el primer semestre de bachillerato según los planes de estudio (SEP, 2013). Una revisión de estos planes sugiere para favorecer el estudio de este concepto matemático el tratamiento analítico de ecuaciones (utilización de despejes y factorizaciones), elaborar e interpretar gráficas y tablas a partir de situaciones diversas, identificar la variación de parámetros, obtener la ecuación de la función y propone realizar ejemplos de situaciones reales que impliquen el uso de la FC y de la tecnología, en otras palabras la “modelación” de situaciones.

Para desarrollar y articular estos constructos nos apoyamos del estudio epistemológico, en el cual sobresale la contribución de los babilonios y de Al-khuwarizmi en el tratamiento gráfico de las expresiones algebraicas, porque aluden “formas de representación” que infieren un nuevo uso de las figuras geométricas y que ayudan a comprender y desarrollar propiedades del fenómeno que sin el uso de ellas es más difícil o no es posible visualizarlas y construirlas, por tanto, la REPRESENTACIÓN GRÁFICA constituye un elemento primordial en la resignificación de la Función Cuadrática.

Por otro lado es trascendente desde este planteamiento, la noción de conceptualización de número de los pitagóricos y desde esta perspectiva el uso que se le puede dar, partiendo que para ellos los números no eran ideas abstractas sino puntos o partículas. Y como ejemplo hablaban de números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc. como colecciones de puntos colocados en esas formas geométricas (Kline, 2006). Visualmente pueden observarse relaciones y variaciones con esta conceptualización de donde deviene un ANÁLISIS NUMÉRICO.

Finalmente de estas relaciones, identificación de patrones y comportamientos, surge el *síntoma de la razón de cambio* y la necesidad de *Establecer Reglas* que encapsulen o representen estas propiedades provocándose con esta intención la REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA.

Estas “formas de representación” (Gráfica, numérica y algebraica) con base a estos elementos epistemológicos y a las prácticas sociales favorecen la *resignificación* del concepto de función cuadrática; en la figura 1 se presenta de manera esquemática estas ideas que se sustentan con los elementos epistemológicos antes mencionados.

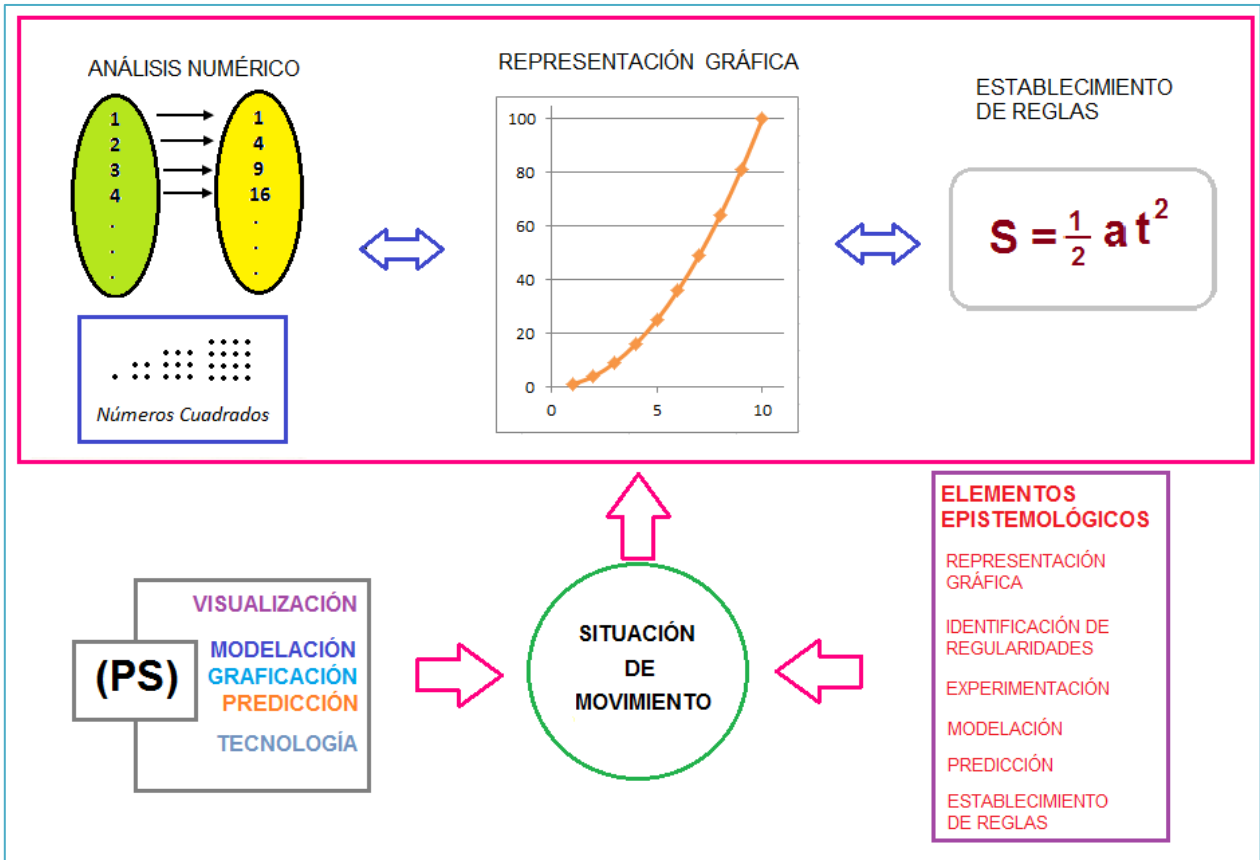


Figura 1: Elementos históricos epistemológicos

## Método

La propuesta didáctica que se presenta tiene como fundamento la Modelación-graficación inicialmente documentada en los trabajos de Suárez y Cordero (2005) y Suárez (2008), en las cuales se sustenta que la **graficación** es la *categoría* que articula la **modelación** con la **tecnología**.

Por otro lado, conviene mencionar que el concepto de **función** desde la perspectiva Socioepistemológica y tomando como base las investigaciones de Cordero (2001) es vista como una *instrucción que organiza comportamientos*. En este sentido, Solís (2012) trabaja con una función prototipo y su gráfica en la cual se hacen variar sus parámetros ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ) y se observan los efectos de estos sobre su gráfica; la expresión  $y = af[(bx + c)] + d$ , se puede ver como un conjunto de instrucciones. Por su parte Suárez (2008) argumenta considerando el análisis epistemológico de la obra de Oresme sobre la “Figuración de las cualidades” que *la gráfica antecede a la función y es argumentativa*.

Con estos elementos se plantea de entrada que la gráfica es más que la representación de una función, expresa en sí misma un modelo, ya que la Graficación es vista como una forma de modelación. Se espera que esta nueva visión proporcione un uso de la gráfica asociado al fenómeno y que sirva de herramienta para entender e interpretar

comportamientos y retomando la postura de Arrieta (2003)... que además sirva para transformarlo.

Con esta propuesta se articula la situación con la participación del estudiante a través de la modelación de situaciones de movimiento, por lo que se necesitan dispositivos que permitan “recopilar y visualizar datos” para que a partir de ellos se tomen decisiones, se visualicen patrones, se identifiquen variaciones y se propongan nuevas situaciones que produzcan resultados deseados a través de la variación de parámetros de las situaciones a modelar, el proceso se realiza las veces que sean necesarias, este argumento justifica el porqué de la inclusión de la *tecnología*.

La idea de modelar el movimiento es retomar una “situación real” y vincularla o llevarla a un “escenario escolar” para dar cuenta que el conocimiento que existe en la escuela responde a situaciones de lo cotidiano como lo es una caminata o el simplemente movernos de un lugar a otro y cómo las diversas formas que implica el movimiento como “quedarse parado” “avanzar más rápido” “avanzar menos” origina cambios en la estructura de la gráfica considerada como una *forma de representación o modelo* de la situación.

Tomando como referentes las investigaciones de Cordero (1998, 2001), Arrieta (2003) y Suárez (2008); encontramos evidencias del uso de la modelación en los fenómenos de movimiento abordados desde el marco de la Socioepistemología donde la componente social es relevante en el diseño de las secuencias, de allí que se pretende resignificar la función cuadrática en su *aspecto funcional* en una situación de modelación-graficación del movimiento teniendo como referente la TS.

Retomando estas ideas conformamos el esquema metodológico, figura 2; donde el alumno se involucra en un escenario de Modelación- Graficación partiendo de una situación de movimiento (SDM) y el uso de la tecnología (sensores de movimiento, emulador, proyector, computadora), donde se favorece el tránsito entre las formas de representación del fenómeno a través de las *Realizaciones múltiples, Identificación de patrones, Ajustes y Desarrollo del Razonamiento*; desarrollándose así, argumentos y significados que servirán de herramientas para la construcción de un “nuevo” modelo matemático que representa la situación, desde nuestra perspectiva es un “nuevo modelo” porque ha pasado por un proceso de *resignificación*.

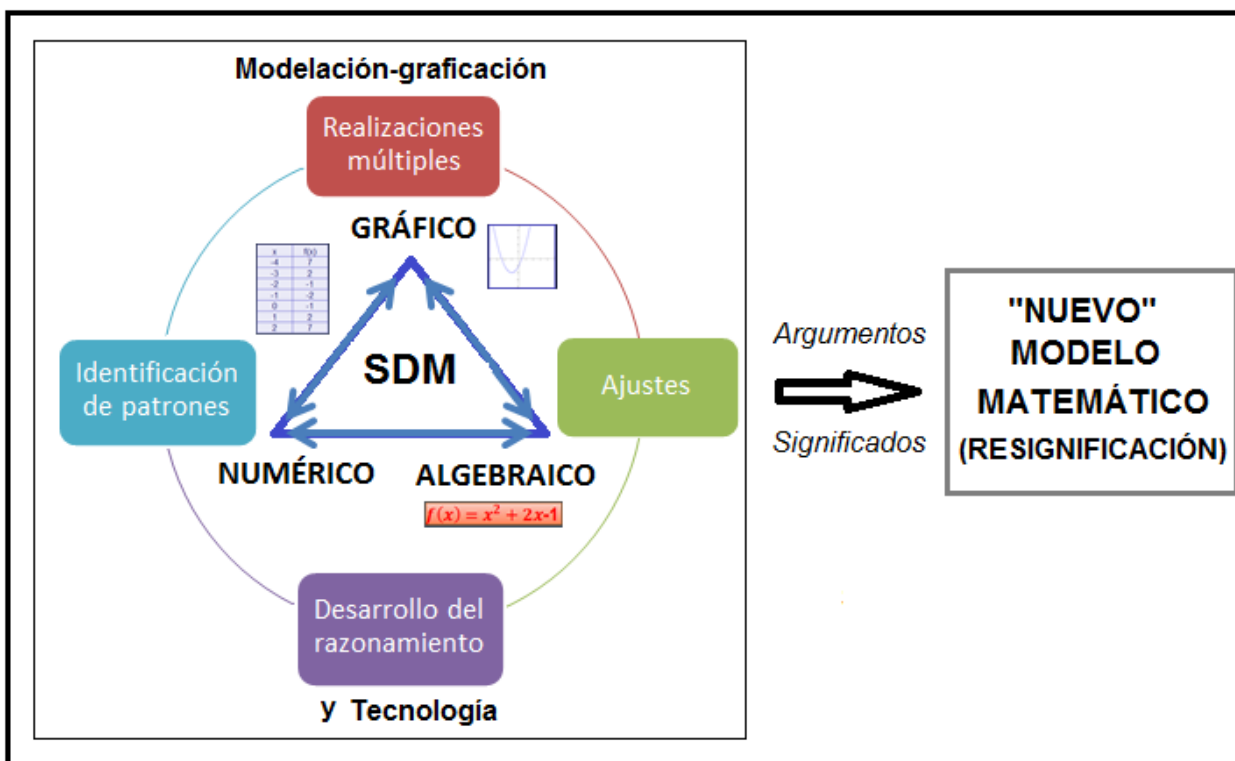


Figura 2: Esquema metodológico

### Diseños didácticos

El diseño de la secuencia didáctica contempla las siguientes fases:

**Fase de inducción:** Esta etapa tiene como propósito inducir al alumno en la búsqueda de “*patrones o reglas*” que están presentes en una situación, donde ponga en uso el análisis numérico. Se pretende que el alumno *identifique patrones y variables* de una tabla numérica, se provoca que los alumnos establezcan relaciones entre variables y le conduzcan a formular expresiones que representan dicha situación. Se favorece la relación entre las formas de representación: numérico, algebraico y gráfico. Se proponen también ejercicios de visualización para la identificación de patrones y relaciones entre variables presentes en situaciones que implican lo lineal y lo cuadrático.

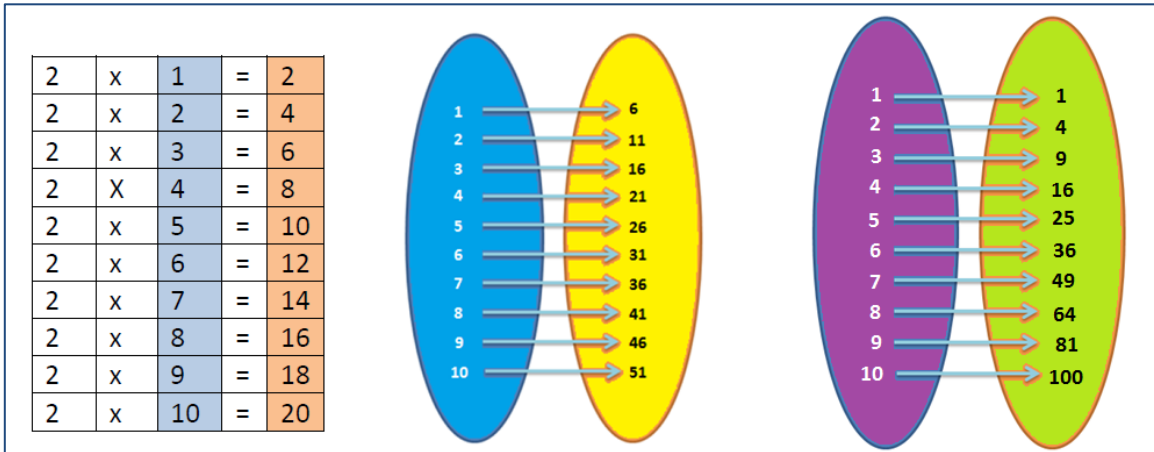
**Fase de modelación-graficación I:** Se modela una situación de movimiento haciendo uso de la tecnología (sensores de movimiento, emulador o software, proyector, computadora) para obtener y visualizar datos sobre el fenómeno en términos de la gráfica posición-tiempo. Con ello pretendemos que el alumno *visualice comportamientos* en términos de variación de parámetros tanto en la gráfica como numéricamente. Se *realizan ajustes* para construir la gráfica que modela una situación específica y se identifica lo que hace que varíe. Se favorece también la relación entre las tres formas de representación comentadas.

**Fase de modelación-graficación II (Resignificación):** En esta etapa se construye con el uso de la tecnología diferentes tipos de gráficas (realizaciones múltiples) en torno a la función cuadrática, se espera que el estudiante proponga escenarios considerando la *variación de patrones* en los fenómenos de movimiento para construir una gráfica deseada (Realización de ajustes). Se espera que el alumno visualice cómo la gráfica cambia al

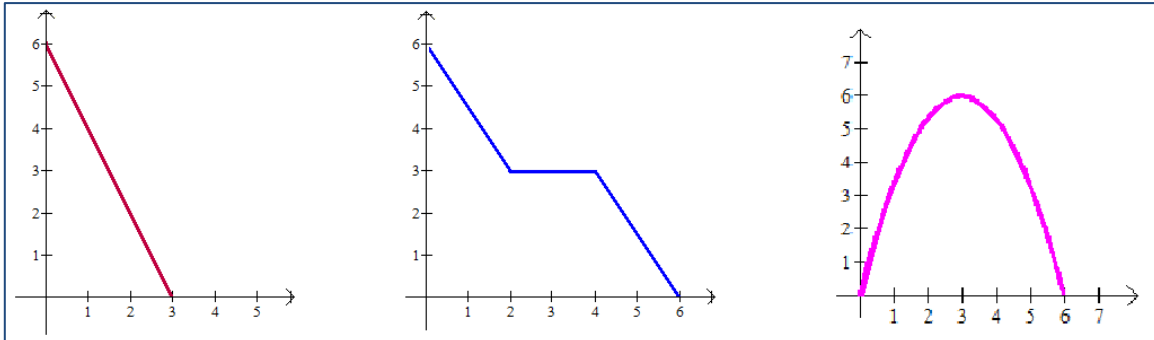
modificar los parámetros y realice ajustes para construir el modelo matemático que representa una situación específica. Se analizarán qué argumentos construyen sobre lo cuadrático y las herramientas que usan para validar sus respuestas (Desarrollo del razonamiento). Finalmente se propone una actividad donde se propicia la interacción entre los tres contextos (gráfico, numérico y algebraico).

A continuación se describe de manera general la clase de tareas a realizar.

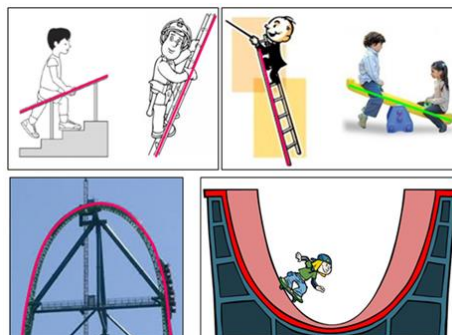
1. Actividades de inducción: Identifica la regla o patrón presente en las siguientes situaciones



2. ¿Qué información interpretas de las siguientes gráficas?



3. Actividad de Visualización: Observa las situaciones, compara y argumenta

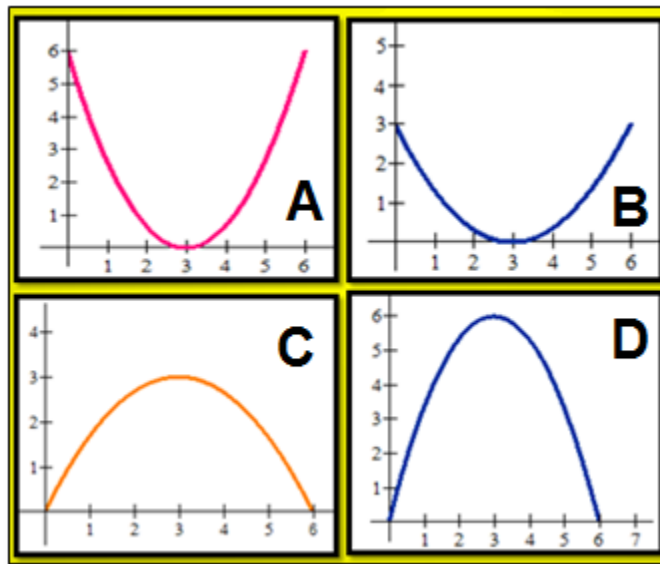


4. Actividad de Modelación: Apoyados de la tecnología (sensor de movimiento, emulador) registra el movimiento de una persona, observa lo que sucede en la

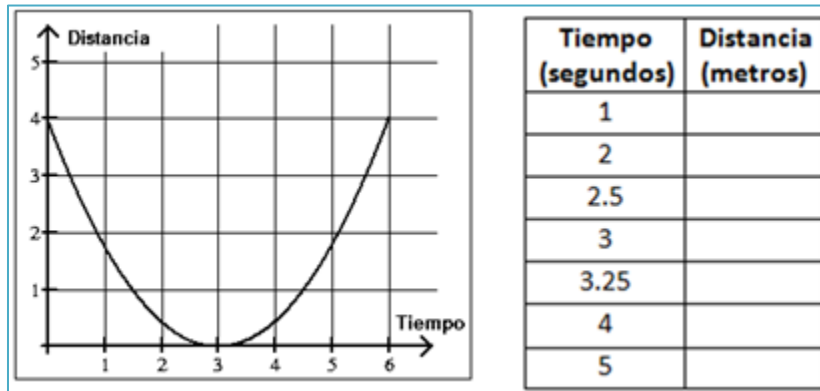
representación gráfica. ¿Cómo crees que sería la gráfica si la persona se desplaza más rápido? ¿Cómo sería la gráfica si la persona se desplaza más lento? Con los datos numéricos recopilados por el sensor completa la tabla, identifica la regla o patrón de la situación-fenómeno.

| Tiempo (segundos) | Distancia (metros) |
|-------------------|--------------------|
| 0.5               |                    |
| 1                 |                    |
| 1.5               |                    |
| 2                 |                    |
| 2.5               |                    |
| 3                 |                    |

5. Plantea la situación para construir las siguientes gráficas:



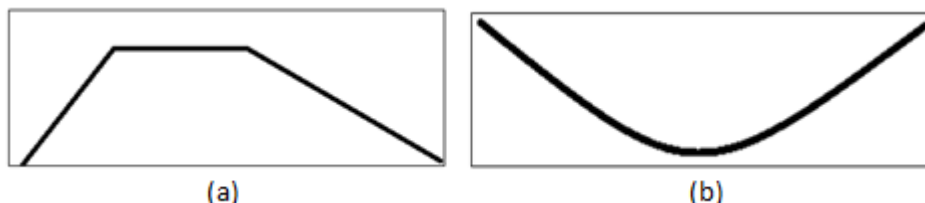
6. Considera la siguiente situación, completa la tabla con la información de la gráfica, identifica el patrón y calcula la distancia para un tiempo de 10 segundos.



7. Contesta las siguientes preguntas: ¿De qué depende que...?



- i) La gráfica sea más abierta o cerrada
  - ii) Abra hacia arriba o hacia abajo
  - iii) Esté más arriba o hacia abajo
  - iv) Sea más alta o más baja
8. ¿Qué hace que varíe la gráfica?
  9. ¿Cuál sería el valor de la distancia para un tiempo de  $t$  segundos?
  10. ¿Que representan las siguientes gráficas?



### Consideraciones finales

Las actividades abordadas en la secuencia favorecen el desarrollo de habilidades al transitar de un ambiente a otro (numérico, gráfico y algebraico) permitiendo contar con más herramientas para construir argumentos y significados sobre el concepto de función. A través de estas actividades los participantes conocieron el proceso de construcción de una recta y una curva (parábola), en dónde la situación participa en el discurso y las formas de representación gráfica y numérica tienen sentido y significado en términos de la situación de movimiento.

Con respecto a los planes de estudio de bachillerato (Matemáticas I) pudo lograrse desde el papel del profesor proponer ejemplos pertinentes e innovadores donde destaca el uso de la tecnología y la modelación como estrategia de enseñanza, en cuanto al currículo los alumnos construyen, identifican e interpretan la gráfica de una función cuadrática, visualizan la variación de parámetros, elaboran e interpretan gráficas y tablas a partir de una situación real que involucra el uso de la función cuadrática y el uso de la tecnología en la modelación de la función cuadrática.

De estas actividades de Modelación-Grficación que proponemos emergieron dos cosas muy interesantes: La necesidad de contar con referentes o puntos de apoyo para argumentar y el uso de símbolos que surgen como apoyo en la argumentación. El uso de estos referentes y símbolos van cargados de la intencionalidad de transmitir “un significado”, expresa también la funcionalidad de los objetos matemáticos que son usados con intención y en una situación específica. En la figura 3 se observa la interpretación de dos gráficas considerando las actividades de modelación-grficación trabajadas.

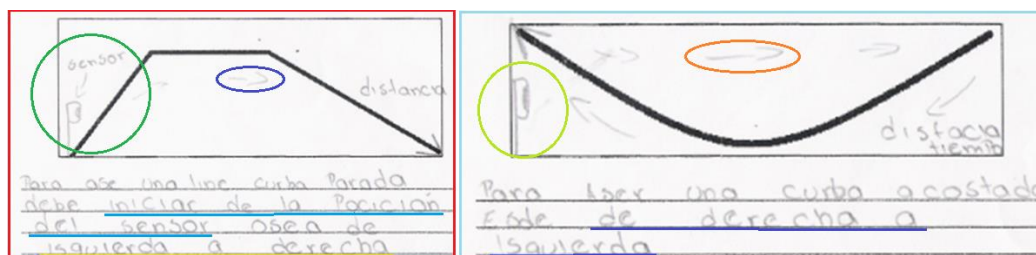


Figura 3: La interpretación de la gráfica a partir de la situación

La Modelación-Graficación juega un papel muy importante como medio para contrastar las propuestas de los participantes (“hipótesis”) con la situación real, de donde surgen “nuevos modelos” siguiendo el proceso de la categoría de M-G (Realizaciones múltiples, identificación de patrones, realización de ajustes y desarrollo del razonamiento), estos “nuevos modelos” se resignifican cada vez que se ponen en escena permitiendo construir un patrón o modelo deseado así como la construcción del conocimiento. De allí que la M-G como práctica social implícita en una SDM, es la que guía el proceso, es la que provoca que surjan estos constructos y la que nos mueve a actuar.

Por otro lado la visualización es una herramienta que ayudó mucho en el proceso, permitió identificar elementos que caracterizan al objeto matemático (recta y parábola) y que sirvieron de base para comprender las actividades de la fase de modelación-graficación. Favoreció también en el reconocimiento de patrones e intervalos en la gráfica, así como de causar el “síntoma” de la *razón de cambio* al identificar la cantidad que varía y observar comportamientos en términos gráficos donde ésta es la misma, esta evidencia puede verse en la figura 4.

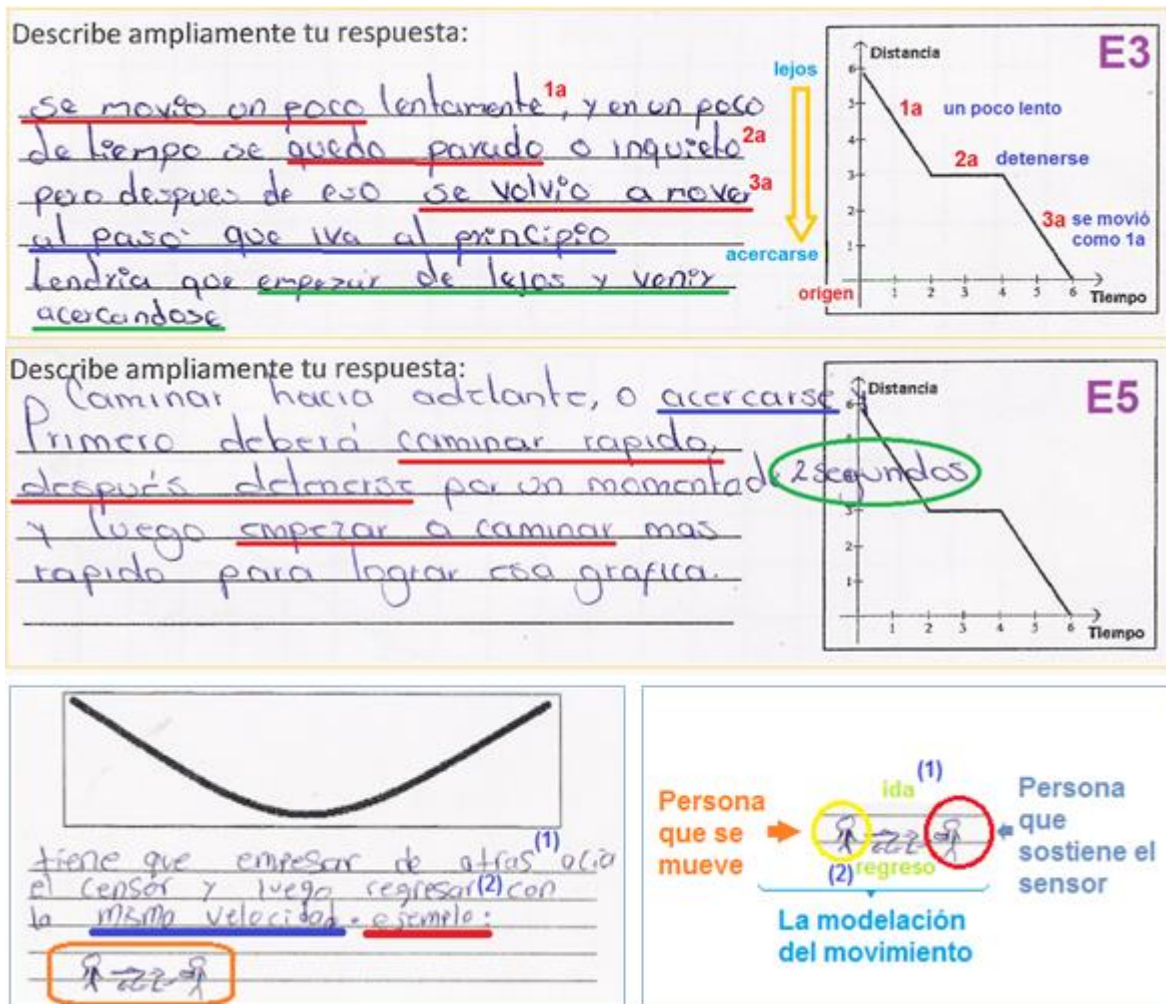


Figura 4: Reconocimiento de intervalos, patrones y evidencia del “síntoma de la razón de cambio”

Los argumentos construidos con la secuencia permitieron a los participantes interpretar una gráfica en términos del movimiento, la situación se hace presente en la argumentación, la

gráfica tiene significado y sentido para ellos. Identifican cambios en la forma de la gráfica con relación al movimiento (velocidad, aceleración), desarrollan un nuevo uso de la gráfica a través de la resignificación del movimiento con los elementos de la categoría de M-G. Con respecto a lo numérico permitió identificar la cantidad que varía, sirvió de apoyo para predecir estados futuros y a través de esta inquietud *establecer la regla* que representa la situación aunque solo se lograron en algunos casos, comprendieron la relación que existe entre la tabla numérica y la gráfica y cómo una puede construirse a partir de la otra, pero sobre todo que provienen de una situación de lo cotidiano, no son conceptos abstractos sino que *son usados con intención*.

Se produjeron acercamientos interesantes a la conceptualización de la función cuadrática y a sus elementos que lo caracterizan tales como la concavidad, el vértice, el lado recto, así como el punto de intersección de la curva con el eje vertical; es importante señalar que estos conceptos se desarrollaron teniendo como sustento la SDM. La situación se hace presente en la argumentación, de allí que estos conceptos son entendidos a partir de su aspecto funcional, de manera que la concavidad depende del cómo se produce el movimiento a partir del sensor (que representa un punto clave o bien identificado también como centro del sistema de referencia), el lado recto de la parábola es entendido cotidianamente como qué tan ancha o cerrada es la curva y eso depende de la forma en que se mueve la persona (relación tiempo- distancia) y así cada concepto es interpretado con relación a la SDM; de manera que los alumnos pueden interpretar una gráfica a través de la SDM y gracias a la M-G.

Finalmente se observó que la tecnología ayuda a desarrollar los contextos gráfico, numérico y algebraico de un fenómeno, permite establecer relaciones entre ellos a través de la visualización de la gráfica y el análisis numérico, así como obtener el modelo algebraico de la situación. Básicamente permite recopilar información en tiempo real y hacer múltiples realizaciones de las propuestas de la SDM que posteriormente es analizada a través de la gráfica y la tabla numérica, en la que es posible identificar patrones, hacer ajustes y desarrollar el razonamiento a partir de las confrontaciones que suceden entre las propuestas y las situaciones de modelación-graficación (SDM-G), en este sentido el papel de la tecnología es relevante.

En general se presentó a los alumnos una nueva propuesta de aprender matemáticas, una propuesta que toma en cuenta sus conocimientos, sus experiencias y sus intenciones; que no excluye a la situación y que toma en cuenta al alumno en la construcción de su conocimiento, creemos que esa es la esencia de la Socioepistemología y que ha llamado la atención de los alumnos al involucrarlos y ser parte de la situación, de manera que *sin humanos no hay conocimiento*.

### **Referencias Bibliográficas**

- Arrieta, J. L. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.
- Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

- Cordero, F. (1998). El entendimiento del algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 2(1), 56-74.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.
- Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: Reconstrucción de argumentos y de significados. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 73-78.
- Kline, M. (2006). *Matemáticas la pérdida de la certidumbre*. D. F., México: Siglo veintiuno editores.
- Morales, A., y Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la serie de Taylor. Una Socioepistemología del cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3), 319-345.
- Secretaría de Educación Pública. (2013). *Documento Base del Bachillerato General*. Recuperado el 11 de Noviembre de 2014 de <http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/programasdeestudio.php>
- Solís, M. (2012). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. Caso de la predicción y la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.
- Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio Socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.
- Suárez, L. y Cordero, F. (2005). Modelación en Matemática Educativa. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 639-644. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

### **Autores**

Fredy de la Cruz Urbina; UNACH. México; [frecu@hotmail.com](mailto:frecu@hotmail.com)

Hipólito Hernández Pérez; UNACH. México; [polito\\_hernandez@hotmail.com](mailto:polito_hernandez@hotmail.com)