REVISTA EMA
2003, VOL. 8, Nº 3, 322-334

MATEMÁTICAS PARA MAESTROS DE PRIMARIA: DAR SENTIDO AL "EXPLICAR POR QUÉ"[1]

SYBILLA BECKMANN

Para que los maestros desarrollen en sus futuros estudiantes habilidades de razonar y dar sentido a las matemáticas, los mismos maestros deben dar sentido y ser capaces de razonar acerca de las matemáticas que van a enseñar. Sin embargo, muchos de los futuros maestros sólo han vivido las matemáticas como la repetición memorística de procedimientos y no están al tanto de que el razonamiento puede ser usado para resolver problemas de maneras no convencionales, o que el razonamiento está en la base de los procedimientos convencionales en matemáticas. Una manera de ayudar a los futuros maestros de primaria a que le den sentido y razonen acerca de las matemáticas es comprometiéndolos a explicar las matemáticas. Este artículo plantea los obstáculos que surgen para lograr esto y recomienda caminos para superarlos. El artículo también da ejemplos y describe características deseables de problemas que exigen explicaciones. Finalmente el artículo proporciona lineamientos para ayudar a los estudiantes a producir buenas explicaciones.

In order for prospective teachers to develop the reasoning and sense-making abilities of their future students, the teachers themselves must make sense of and reason about the mathematics they will teach. However, many prospective teachers have only experienced mathematics as the rote following of procedures, and are not aware that reasoning can be used to solve problems in non-standard ways, or that reasoning underlies the standard procedures in mathematics. A way to help prospective elementary teachers make sense of and reason about mathematics is to engage them in explaining mathematics. This paper discusses obstacles that arise in doing so, and recommends ways to overcome these obstacles. The paper also describes desirable features of problems asking for explanations, and gives examples. Finally, the paper gives guidelines to help students write good explanations.

1. Traducción realizada por Juana Escobar, del original Beckmann, S. (2002). Mathematics for elementary teachers: Making Sense by "Explaining Why". Artículo presentado en el *Congreso Internacional de Maestros de Matemáticas - ICTM2* celebrado en la Universidad de Creta. Traducido con la autorización de la autora de la versión electrónica de las memorias distribuida por Wiley & Sons.

Educación Matemática, formación de maestros, razonamiento, aspectos conceptuales, comunicación, comprensión, primaria.

INTRODUCCIÓN

Recientes esfuerzos en las reformas en la Educación Matemática enfatizan que los estudiantes deben dar sentido a las matemáticas y comprometerse con un razonamiento matemático (NCTM[2], 2000). Para que los maestros en formación desarrollen en sus futuros estudiantes habilidades de razonar y dar sentido a las matemáticas, ellos mismos tienen que dar sentido y razonar acerca de las matemáticas que enseñan. Sin embargo, muchos de los maestros en formación sólo han vivido las matemáticas como la repetición memorizada de procedimientos y desconocen que el razonamiento sirve para resolver problemas de una forma no convencional, o que el razonamiento está en la base de los procedimientos convencionales en matemáticas. ¿Entonces cómo pueden los futuros maestros aprender a dar sentido y razonar acerca de las matemáticas en una forma que les ayude a lograr que sus futuros estudiantes den sentido y razonen acerca de las matemáticas? Este artículo gira entorno a este asunto, para futuros maestros de primaria.

Ciertamente dar sentido a las matemáticas y razonar matemáticamente, está íntimamente ligado a explicar las matemáticas. Todo maestro de matemáticas sabe que cuando explicamos matemáticas, mejoramos y solidificamos nuestra propia comprensión de las matemáticas. Y todo maestro de matemáticas sabe que cuando explicamos matemáticas (o nos preparamos para explicarlas), a veces descubrimos nuestras propias falencias de comprensión. Solamente cuando podemos explicar alguna parte de las matemáticas en una forma que tenga sentido tanto lógica como intuitivamente, es que sentimos que entendemos las matemáticas. Por lo tanto, los futuros maestros de matemáticas deben aprender a explicar matemáticas, no sólo porque ellos explicarán matemáticas a sus futuros estudiantes, si no porque también explicar matemáticas mejora su propio entendimiento de las matemáticas y sus propias habilidades de razonamiento matemático.

Para que la educación de los maestros sea efectiva, debemos escoger deliberadamente las explicaciones que queremos que los futuros maestros den. ¿Qué características debemos buscar en los problemas que pedimos a los futuros maestros explicar? ¿Y por qué? ¿Qué debemos esperar o preguntar a los maestros para que se inspiren al elegir sus explicaciones? ¿De qué manera se puede ayudar a los maestros a mejorar su habilidad de explicar?

2. NCTM corresponde a la sigla de National Council of Teachers Mathematics [N.T]

¿QUÉ TIPO DE EXPLICACIÓN?

¿Con qué tipo de explicación de las matemáticas deben comprometerse los futuros maestros? Desde luego existen diferentes opciones, incluso cuando el contenido se centra en las matemáticas que los maestros enseñarán.

Una posibilidad es ofrecer a los futuros maestros de primaria un desarrollo axiomático de los números y la geometría y esperar que establezcan diversas conclusiones en aritmética y geometría, realizando pruebas rigurosas que se basen en axiomas y teoremas previamente establecidos. Esto no es un mal objetivo y puede ser razonable en cierta medida, pero ¿serán capaces los maestros de usar este aprendizaje para ayudar a sus jóvenes estudiantes a razonar y dar sentido a las matemáticas? En términos reales, la conexión puede ser demasiado larga para que la mayoría de los maestros la alcance en la práctica.

The Mathematical Education of Teachers (2001) recomienda lo siguiente:

> Todos los cursos diseñados para futuros maestros deben desarrollar cuidadosamente el razonamiento y el "sentido común" matemático al analizar relaciones conceptuales y al resolver problemas. (Capítulo 2)

Esto sugiere entrelazar el razonamiento lógico con el sentido común. Entonces, el tipo de explicación que propongo aquí es más que aquella que es lógica y convincente para un escéptico; debe ser realmente explicativa y debe ayudar a dar sentido a las respectivas matemáticas.

Por ejemplo podemos usar inducción para probar que:

$$1 + 2 + 3 + \quad + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La prueba es lógica y debe convencer a quien entienda inducción, pero no muestra de donde viene la simple fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$. En este sentido, no explica realmente por qué la ecuación anterior es verdadera. En cambio, si imaginamos un "triángulo escalonado" hecho de n hileras de cuadrados, con un cuadrado en la primera fila, 2 cuadrados en la segunda fila, 3 cuadrados en la tercera fila, etc. entonces podemos visualizar por qué la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ tiene sentido: ponga dos triángulos escalonados juntos para hacer un rectángulo de n por $n + 1$ cuadrados.

"Hay varias diferencias entre explicar por qué" y probar. Al "explicar por qué", un examen cuidadoso de varios casos importantes es a menudo más esclarecedor, que un argumento que cubra todas las posibilidades. Por ejemplo, ¿cómo explicamos por qué el procedimiento de multiplicación convencional es válido? En lugar de una prueba, podemos examinar cuidadosamente algunos casos especiales, como el producto de pares de números de dos dígitos. Aun cuando una prueba establece la verdad, al "explicar por qué", debemos buscar varias explicaciones y tratar de coordinarlas. Para explicar por qué el procedimiento de multiplicación manual es válido, podemos usar la propiedad distributiva; también podemos dibujar un rectángulo y subdividirlo en partes correspondientes a los pasos del procedimiento. Mejor aún es conectar estas dos explicaciones.

Por lo tanto, propongo que los procesos de "explicación" que realicen los futuros maestros de primaria tengan las siguientes características:

- La explicación sea lógica.
- La explicación aclare con sentido común y sea convincente tanto para la persona que explica como para la audiencia (por ejemplo, colegas, instructores, niños).
- Si es posible debería haber varias explicaciones, por ejemplo, una utilizando ecuaciones y otra utilizando gráficos y las diferentes explicaciones deberían estar en coordinadas.

La literatura incluye ejemplos de profesores y futuros profesores comprometidos con dar sentido al explicar matemáticas. Por ejemplo Schifter (1998) describe un seminario de maestros en el que estos trabajaron con problemas como el siguiente:

> A Wanda le encanta el ponqué. Ella decidió que una porción debe ser 3/5 de un ponqué. Si encarga cuatro ponqués, ¿cuántas porciones puede servir? (p.67)

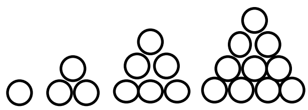
Los profesores razonaron ayudados por dibujos para explicar por qué la solución tenía sentido. Simon y Blume (1996) describen un curso en el cual futuros maestros de primaria trabajaron en varias explicaciones, como por ejemplo explicar por qué el área de una figura geométrica no puede determinarse por su perímetro.

Los futuros maestros deben aprender a "explicar por qué", pero, ¿cuáles son los puntos claves y los obstáculos que encontramos al tratar de sacar esto adelante? Este es el tema de las dos secciones siguientes.

OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DE "EXPLICAR POR QUÉ"

Muchos futuros maestros de primaria empiezan su formación profesional en matemáticas esperando aprender cómo dar a los niños directrices claras para llevar a cabo procedimientos matemáticos. Esto crea un obstáculo en un curso que trata de "explicar por qué" y no de "mostrar cómo". Por lo tanto, cuando dicto el primer curso de matemáticas para futuros profesores de primaria, discuto cuidadosamente por qué nos concentramos en "explicar por qué". Tomo en cuenta seriamente las preguntas de los estudiantes de "¿por qué necesitamos saber esto?" y lo trato en detalle. Muchos estudiantes ven pronto la validez de es este enfoque. Pero este no es el único obstáculo.

Inicialmente, muchos futuros profesores de primaria tienen una pobre concepción de lo que *significa* explicar por qué algo es cierto. A menudo, empezamos nuestro primer curso de matemáticas para maestros de primaria tomando arreglos triangulares de puntos como:



Cuando los estudiantes tratan de explicar por qué la formula $\frac{n(n+1)}{2}$ da el número correcto de puntos en el enésimo triángulo, siempre hay alguien que da una explicación como la siguiente:

> Aparece un $n+1$ en la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ por que usted está sumando 1 a cada fila en el triángulo.

Esta "explicación" es realmente un recurso nemotécnico que conecta la fórmula al problema de una manera superficial. Un estudiante que ofrezca esta "explicación" puede que no entienda qué significa explicar.

Hace un tiempo puse el siguiente problema al principio del semestre:

> Mary dice que $100 \times 3.7 = 3.700$. ¿Por qué Mary puede pensar esto? Debes explicar a Mary por

> qué su respuesta no es correcta y por qué la respuesta correcta es verdadera. Si le hablas a Mary de un procedimiento asegúrate de explicarle ¡por qué tiene sentido!

A pesar de las instrucciones y a pesar de haber discutido en clase acerca del lugar de los decimales, la mayoría de los estudiantes le dijeron a Mary que escribiera 3.7 = 3.700 y luego moviera el punto decimal dos lugares hacia la derecha. Cuando les pedí a los estudiantes que me explicaran por qué el procedimiento convencional tiene sentido, algunos respondieron con una explicación clara de cómo llevar a cabo el procedimiento. Desde entonces doy a mis estudiantes una mayor orientación acerca de "explicar por qué" al principio del semestre.

Del mismo modo, como lo informa el estudio de Ma (1999), cuando a maestros de primaria se les presentó una situación hipotética en la que los estudiantes erróneamente no movieron los productos parciales al calcular

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 645 \end{array}$$

muchos maestros norteamericanos sugirieron soluciones enfocadas a aclarar el procedimiento de multiplicación, tales como usar papel rayado en sentido horizontal (de manera que se formen columnas), o usar casillas resaltadas para captar la atención de los estudiantes (pp. 28-35). Los maestros norteamericanos tendían a "mostrar cómo" en vez de "explicar por qué".

Por lo tanto, los instructores de cursos para los futuros maestros de primaria no deben asumir que los futuros maestros saben que es posible dar explicaciones claras de los procedimientos y hechos matemáticos. La mayoría de los estudiantes necesitan tiempo y práctica para desarrollar la idea de que las matemáticas pueden ser explicadas y lo que esto significa.

Otro obstáculo inicial son las creencias de los estudiantes sobre lo que constituye la actividad matemática. Para algunos estudiantes los razonamientos del sentido común y el material gráfico no parecen "matemáticamente" suficientes. Propuse el siguiente problema al principio de un semestre:

> Susana debía usar $\frac{5}{4}$ de taza de mantequilla en su receta, pero sólo usó $\frac{3}{4}$. ¿Qué fracción de la mantequilla que debía usar, usó realmente Susana? Haz gráficos para ayudarte a

resolver este problema. Explica claramente tu respuesta. Para cada fracción en este problema y en su solución, describe el todo al que la fracción está asociada.

Un estudiante respondió haciendo gráficos que mostraban 5/4 y 3/4 de tazas de mantequilla y calculó:

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{4}, \text{ o } \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ de } \frac{5}{4}$$

Y explicó:

...Para encontrar qué fracción de la mantequilla que debía haber usado fue la que Susana usó, necesitas dividir 3/4 y 5/4. Al dividir fracciones puedes tomar el recíproco de la segunda fracción y multiplicarlo por la primera fracción: 3/4 × 5/4[3]. Si haces esto te darás cuenta que Susana usó 3/5 de los 5/4 de mantequilla...

A pesar de las instrucciones de utilizar gráficos para ayudar a resolver el problema, la estudiante mostró cálculos (correctos) y explicó esos cálculos. Tal vez la estudiante no sabía como usar un gráfico para solucionar el problema (a pesar de que habíamos usado tanto gráficos como cálculos en clase y que la estudiante era muy aplicada); o tal vez la estudiante no encontró un recurso gráfico que, junto con un razonamiento con sentido común, fuera lo suficientemente sofisticado matemáticamente y, por lo tanto, no creyó que necesitara un gráfico para explicar la solución. Si lo que ocurrió fue esto último, entonces es parecido a lo que Raman (2001) encontró en su investigación sobre estudiantes y profesores de cálculo a nivel universitario: los estudiantes veían el pensamiento matemático como aquel que contiene un lenguaje formal y trucos algebraicos. Raman encontró que los estudiantes eran más reacios que los instructores a aceptar una prueba gráfica acerca de que la derivada de una función par es impar.

Por lo tanto, los estudiantes necesitan tiempo y experimentación práctica para desarrollar la idea de que el *razonamiento* es uno de los pilares de las matemáticas y que este razonamiento no sólo involucra ecuaciones y fórmulas sino que también puede referirse a gráficos y experiencias.

3. Se dejo $3/4 \times 5/4$ como aparece en el original, a pesar de que debería decir $3/4 \times 4/5$ ó $3/4 \div 5/4$ [N.T]

¿SE TRASLADARÁ ESTO AL SALÓN DE CLASE?

Un reto mayor en la educación de maestros de matemáticas es ayudarlos a llevar a su salón de clase la cultura de: "expliquen" y "¿tiene sentido?".

El Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM) ha promovido una visión del razonamiento y de tener sentido en las matemáticas escolares (NCTM, 1989, 2000). Aún así, estudios en los que los maestros son entrenados de acuerdo a esta visión, muestran resultados diversos cuando se observa al maestro en el salón de clase (Wilcox, Lanier, Schram y Lappan, 1992; Frykholm, 1999). Frykholm (1999), en su investigación sobre estudiantes que pretendían ser futuros maestros de matemáticas de secundaria, encontró que la mayoría de ellos no eran capaces de poner en práctica la visión reformadora del NTCM:

> …los docentes reportaron que a pesar de que los estándares eran valiosos, en tanto que articulaban una visión convincente de lo que la instrucción en matemáticas podía ser, se les había dado muy poco en cuanto a consejos prácticos y ejemplos de una pedagogía innovadora que pudiera ser usada como un modelo para implementar tales estrategias pedagógicas. (p. 94)

La literatura describe que las clases de matemáticas enfocadas al razonamiento y a tener sentido son a menudo difusas e ineficientes. Uno se pregunta si al final los estudiantes serán capaces de conjugar estas ideas y si el tiempo de clase ha sido usado eficientemente. Por ejemplo, Simon y Blume (1996, pp. 10 -17) mencionan una clase para futuros maestros de primaria, donde el profesor y los alumnos discutían por qué el número de cartones rectangulares que cubren una mesa, se puede determinar usando la multiplicación. Hubo mucha búsqueda a tientas y mucha confusión. Al final, algunos de los estudiantes eran capaces de explicar claramente por qué es válido multiplicar; pero muestras de las notas de clase de otros estudiantes dejaban ver que muchos de ellos salieron de clase confundidos y dudosos. Aprender matemáticas es de por sí complicado e imperfecto; inevitablemente involucra búsquedas a tientas y salidas en falso. Pero no puedo dejar de preguntarme si la importante discusión académica descrita en ese artículo, no hubiera ayudado a los alumnos a aprender más efectiva y eficientemente si hubiera tenido lugar en un contexto más reducido. ¿Qué tal si el instructor le hubiera dado a la clase una definición de multiplicación y le hubiera pedido usar esa definición para explicar ¿por qué es válido multiplicar? En mi propia experiencia como maestra en diferente contextos he encontrado que ser demasiado un "guía al lado" lleva a que muchos alumnos se confundan y no sean capaces de conjugar las ideas de una manera coherente.

¿Podría ser que en nuestro interés por no dictar cátedra y en nuestro afán por ayudar a los estudiantes a que ellos le den sentido a las matemáticas para sí mismos, a veces les demos muy *poca estructura* para que aprendan *eficientemente*? ¿Si los futuros maestros ven el dar sentido como desestructurado e ineficiente, sentirán tal vez que no vale la pena comprometer a sus propios estudiantes en dar sentido? Después de todo, como maestros, son los responsables de que los alumnos logren objetivos específicos de aprendizaje en temas específicos, que serán evaluados en pruebas estatales o nacionales de alto nivel.

RECOMENDACIONES

A la luz de lo expuesto anteriormente, ofrezco las siguientes recomendaciones para que los futuros maestros de primaria opten por las explicaciones y se comprometan con este enfoque.

1) **Escoja varias explicaciones que estén relacionadas de cerca con la actual práctica de la enseñanza de matemáticas en la educación primaria.**
   Por ejemplo:

   Jaime piensa que si $30 \times 40 = 1200$, y $1 \times 1 = 1$, entonces
   $$31 \times 41 = 1200 + 1 = 1201.$$
   Haz un gráfico que te ayude a explicarle a Jaime como 30×40 y 31×41 están de hecho relacionados. (Beckmann, 2003)

2) **Escoja explicaciones que les permitan a los maestros organizar su pensamiento en torno a conceptos y principios claves.** En ciertos casos, establezca los principios o definiciones que se requieren para proporcionar estructura y contexto.

Ma (1999) en su investigación sobre maestros de primaria norteamericanos y chinos, encontró que algunos maestros chinos desarrollan lo que ella llamó *Entendimiento Profundo de Matemáticas Fundamentales* (EPMF). Un elemento clave del EPMF es el énfasis en ideas básicas. Como lo explica Ma:

> Los maestros con un EPMF adoptan actitudes matemáticas y están particularmente alertas de los "simples pero poderosos conceptos y principios básicos de las matemáticas" (e.g. la idea de ecuación). Tienden a revisar y reforzar estas ideas básicas. Enfocándose en estas ideas básicas, los estudiantes no son sólo **alentados** a abordar problemas, si no que son **guiados** a tener una actividad matemática real. (p. 122, énfasis en el original).

Estos conceptos claves incluyen definiciones fundamentales, tales como la definición de multiplicación y la definición de fracción. En algunos casos, el principio o definición puede explícitamente referirse a la necesidad de una explicación. Por ejemplo:

> Juan, Pablo y José quieren saber cuántos acrónimos hay de dos letras que no tengan una letra repetida. Es decir, quieren contar acrónimos como BA y AT pero no aquellos como ZZ o XX.
>
> Juan dice que hay $26 + 25$ porque no usa la misma letra dos veces, por esto el segundo número es 25.
>
> Pablo opina que es una multiplicación, no una suma: 26×25
>
> José dice que el número es $26 \times 26 - 26$ porque se deben sacar las letras dobles.
>
> Discuta las ideas de los muchachos. ¿Cuáles respuestas son correctas? ¿Cuáles no? ¿Y por qué? Recurriendo al significado de multiplicación, explique clara y a profundidad sus respuestas. (Beckmann, 2003)

o

> (Para este ejercicio es necesario un gráfico de triángulos dentro de una cuadrícula). Las líneas de la cuadrícula están separadas un centímetro. Para determinar el área exacta de cada uno de los triángulos use los principios de *movilidad* y *combinación* acerca del área. Explique por qué sus respuestas son correctas. *No* utilice una fórmula para determinar el área de los triángulos.

o

> Use el *significado de fracciones* para explicar por qué
>
> $$\frac{2}{3} = \frac{2 \quad 57}{3 \quad 57}$$
>
> (en otras palabras, explica porque $\frac{2}{3} = \frac{114}{171}$). *No* dé como explicación el que se multiplicó por 1.

Podemos pedir no sólo explicaciones de por qué las cosas son como son, si no también de porqué las cosas no son como no son. En estos casos, los principios subyacentes no están dados y deben ser descubiertos para llegar a una explicación plena. Por ejemplo:

Francisco piensa que para sumar fracciones es más fácil "sumar los de arriba y sumar los de abajo". Por ejemplo, Francisco quiere sumar $1/2$ y $3/4$, de esta manera:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4} = \frac{1+3}{2+4} = \frac{4}{6}$$

Francisco usa el gráfico de abajo para explicar por qué su método tiene sentido. ¿Por qué el método de Francisco no es válido para sumar fracciones? ¿Por qué el gráfico de Francisco no prueba que las fracciones se pueden sumar de esta manera? No expongas la manera correcta de sumar fracciones, más bien explica qué está mal en el razonamiento de Francisco.

X	O	+	X	X	X	O	=	X	X	X	X	O	O

Para explicar por qué el método de Francisco es incorrecto, los futuros maestros deben centrarse en el papel crucial del todo asociado a cada fracción, como en la siguiente explicación dada por un estudiante.

Aunque el razonamiento de Francisco parece ser correcto a primera vista, no está utilizando los mismos todos en las fracciones 1/2 y 3/4. Es muy importante considerar el todo cuando sumamos fracciones. El empezó con 2 bloques, 1 marcado con una X y el otro con un círculo O, que es igual a 1/2, pero después agregó dos bloques más para representar 3/4. Los todos (2 bloques y 4 bloques) no son iguales y por lo tanto no podemos sumar estas fracciones [todavía].

3) Proporcione a sus estudiantes guías específicas para escribir explicaciones matemáticas

Yo doy a mis estudiantes los siguientes lineamientos como las características de las buenas explicaciones en matemáticas:

A. La explicación es factualmente correcta, o casi, sólo con errores mínimos (por ejemplo una equivocación menor en un cálculo).

B. La explicación apunta a la pregunta específica o el problema propuesto. Es enfocada, detallada y precisa. No debe haber asuntos irrelevantes ni puntos de distracción.

C. La explicación es clara, convincente y lógica. Una explicación clara y convincente se caracteriza por lo siguiente:

a. La explicación puede ser usada para enseñar a un compañero de estudios, aunque éste no esté en la clase.

b. La explicación puede se utilizada para convencer a un escéptico.

c. La explicación no requiere de un acto de fé del lector.

d. Los puntos importantes se enfatizan.

e. Si es pertinente, el soporte de gráficos, diagramas y/o ecuaciones se usa en forma apropiada y acorde con las necesidades.

f. La explicación es coherente.

g. Se utilizan frases claras y completas.

Por ejemplo, podemos responder al problema "utilice el significado de fracción para explicar por qué $\frac{2}{3} = \frac{114}{171}$ " como sigue:

> Según el sentido de las fracciones, $2/3$ de un pastel es la cantidad formada por dos partes [sombreadas] cuando se ha dividido el pastel en tres partes iguales.[Muestre un gráfico del pastel]. Si divido cada una de estas 3 partes iguales en 57 partes iguales más pequeñas, el pastel estará dividido en $3 \times 57 = 171$ pedazos pequeños. Debido a que cada una de las 2 partes originales sombreadas que representan $2/3$ del pastel han sido subdivididas en 57 partes más pequeñas, estas dos partes sombreadas originales se han convertido en $2 \times 57 = 114$ partes pequeñas, como se ve en el gráfico. [Muestre otro gráfico del pastel que indique que cada pedazo ha sido subdividido en muchos pedacitos de igual tamaño]. Sigue siendo la misma cantidad de pastel sombreado en ambos gráficos. Así 2 de las 3 partes originales del pastel es la misma cantidad que $2 \times 57 = 114$ pequeñas partes del total de 3×57 pequeñas partes. Por esto $2/3$ de pastel es la misma cantidad que $\frac{2 \quad 57}{3 \quad 57} = \frac{114}{171}$ del pastel.

Note que aunque podemos también multiplicar por 1, en la forma $57 / 57$, para explicar por qué $\frac{2}{3} = \frac{2 \quad 57}{3 \quad 57}$; la anterior explicación apunta al problema expuesto, a saber, el uso del significado de las fracciones. La explicación está escrita de una forma natural y convincente y no solamente para establecer la verdad.

Es posible dictar un curso eficiente para que los futuros maestros aprendan a "explicar por qué" y den sentido a las matemáticas, poniendo atención a los asuntos tratados en este artículo.

REFERENCIAS

Beckmann, S. (2003). (en prensa). *Mathematics for elementary teachers*. (preliminary edition). Boston, MA: Addison-Wesley.

CBMS (2001). The mathematical education of teachers. *CBMS Issues in Mathematics Education, 11*.

Frykholm, J. (1999). The impact of reform: Challenges for mathematics teacher preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2,* 79-105.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Raman, M. (2001). Towards a characterization of proof views held by students and teachers in collegiate calculus. *Research Reports in Mathematics Education, 8,* Department of Mathematics, Umea University.

Shifter, D. (1998). Learning mathematics for teaching: From a teacher's seminar to the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1,* 55-87.

Simon, M. y Blume, G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* 3-31.

Wilcox, S. Lanier, P. Schram, P. y Lappan, G. (1992). *Influencing beginning teachers' practice in mathematics education: Confronting constraints of knowledge, beliefs, and context.* (Research Report No. 1992-1). East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education.

Sybilla Beckmann
Departamento de Matemáticas
Universidad de Georgia
Athens, USA
E-mail: sybilla@math.uga.edu