

# EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN APOYADOS CON TECNOLOGÍA Y EL PAPEL QUE JUEGAN LOS DISTINTOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

*Erick del Refugio de Lira Lozano, Elvira Borjón Robles*

## **Resumen**

Una de las preguntas más frecuentes que los estudiantes hacen al profesor de matemáticas es: ¿y esto para qué me va a servir?. Generalmente en el programa de cálculo diferencial del nivel medio superior, el tema de optimización se ubica al final, razón por la que en muchas ocasiones debido al tiempo no se le pone la atención necesaria, trayendo como consecuencia el poco o nulo aprendizaje del tema. Para atender lo anterior se diseña una secuencia didáctica que promueve el tránsito entre representaciones semióticas (Duval, 1998) y puesta en escena a través de la programación de problemas en representación verbal, representación analítica, representación gráfica y apoyados de espacios de tabulación. Con esto se promueven los conceptos de máximos y mínimos, teniendo como premisa la afirmación de Duval (1998) que dice que para que haya noesis se requiere la semiosis, es decir que para que al alumno adquiera un concepto se requiere que transite entre dos o más representaciones.

**Palabras clave:** Optimización, representaciones semióticas, secuencia didáctica, máximos y mínimos

## **Introducción**

El tema de optimización es de interés entre distintos autores, en particular queda de manifiesto que existen distintos factores que acontecen dentro y fuera del aula, siendo uno de los más citados el tiempo que se le dedica a su abordaje debido a la manera en la que están estructurados los programas de estudios. Por otro lado hay coincidencia en que el cálculo diferencial en bachillerato generalmente se vuelve un proceso algorítmico y con falta de significado.

Basándonos en esta última afirmación se diseña una secuencia didáctica que considera diversas representaciones semióticas, cuyo objetivo es promover significados del tema de máximos y mínimos involucrando en este proceso al tema de derivada, procurando con esto, que los alumnos dejen de considerar la derivación como un proceso algorítmico y carente de significado y a la vez promover el aprendizaje de los conceptos de máximo y mínimo ya que según Duval (1998) "la coordinación de varios registros de representación semiótica aparece como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos" (p. 176).

De acuerdo con Duval (1998), la comprensión de los conceptos se da cuando los alumnos logran transitar de un registro a otro, haciendo más fácil la identificación y aplicación del concepto. Sin embargo, en la enseñanza tradicional se enfatiza, casi siempre, en abordar los

conceptos en un solo registro y de manera algorítmica, esto crea la necesidad de formular propuestas didácticas para una formación sólida de conceptos en los alumnos y con ello una mejor comprensión de los mismos. Este trabajo de investigación tiene el objetivo de contribuir a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial en relación a la formación de conceptos matemáticos, específicamente en el proceso de formación del concepto de máximo y mínimo de una función en alumnos del nivel medio superior.

Por otra parte existen huecos en la literatura que fundamenten como, con ayuda de las representaciones semióticas, el estudiante puede mejorar su comprensión hacia la resolución de problemas de optimización. Camacho y González (1998) realizan una propuesta para abordar el tema de optimización haciendo uso de la calculadora TI-92 para que así el estudiante pueda trabajar con las diferentes representaciones con las que puede abordar la solución a estos problemas; finalmente los autores hacen invitación a seguir investigando sobre la ventaja que las calculadoras gráficas ofrecen al momento de resolver problemas de optimización.

Tomás (2002) afirma que a la enseñanza de los problemas de optimización no se le hace demasiado hincapié al momento de llevar a cabo el programa de estudios y que en muchas de las ocasiones las clases se encaminan a la derivación de funciones cada vez más complejas y eso hace que el estudiante pierda interés al momento de introducir máximos y mínimos, lo que conlleva a un tedio al momento de abordar los problemas aplicados de optimización de funciones.

En un estudio realizado por Malaspina (2007) se analizan las soluciones de 38 estudiantes de ingeniería a dos problemas de optimización. Los resultados a los que se llegan no son alentadores en el sentido de que "se perciben capacidades para intuir las respuestas correctas a los problemas propuestos, mas no han sido fortalecidas con experiencias previas en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado" (p. 391). Es en este sentido donde podemos aventurarnos a pensar en que con la ayuda de las representaciones semióticas los estudiantes poseerán y podrán dar argumentos válidos y de rigor para defender sus soluciones.

Por su parte Moreno y Cuevas (2004) muestran que, con base en un estudio realizado a profesores de nivel medio y superior y a estudiantes de maestría e ingeniería, "debido a una interpretación errónea que los estudiantes hacen sobre el tema de máximos y mínimos, cuando se les propone resolver problemas de optimización proporcionan respuestas inverosímiles..." (p. 94).

En Tall (1997) se mencionan las bondades que tiene el uso de la tecnología como apoyo para la clase de matemáticas, "la computadora proporciona un nuevo entorno para explorar el concepto de función" (p. 300). También hace mención de que cuando el software es utilizado para representar el concepto de función generalmente se hace de manera gráfica y en ocasiones de forma tabular. Fey (1989) citado en Tall (1997) menciona que "la función de las computadoras que ha causado recientemente más entusiasmo entre los educadores matemáticos es la facilidad de pasar de una forma de representación de la información (numérico, gráfico y simbólico) a otra..." (Fey, 1989, p. 225).

Por último, en Arcavi y Hadas (2000) se menciona que debido al surgimiento de diferentes software para la enseñanza de las matemáticas, su implementación en el salón de clases exige al profesor que introduzca conceptos de las matemáticas apoyándose en el uso de la

computadora, “la existencia de la computadora plantea a los educadores matemáticos el reto de diseñar actividades que tomen ventaja de aquellas características con potencial para apoyar nuevos caminos de aprendizaje” (p. 41).

De las investigaciones revisadas se puede concluir que:

- La resolución de problemas de optimización utilizando el criterio de la primera derivada se enseña como un proceso mecánico.
- Cuando los estudiantes llegan a la solución de un problema de optimización no “cuentan” con las herramientas para argumentar y justificar por qué su solución es óptima.

Por lo que surge la siguiente pregunta de investigación:

¿En qué medida el uso de tecnología y las representaciones semióticas pueden mejorar el aprendizaje de los temas de derivada, máximos y mínimos y criterio de la primera derivada para resolver problemas aplicados de optimización en alumnos de bachillerato?

El objetivo de la investigación es construir un diseño apoyado con software con el que se promuevan las representaciones semióticas en el tema de optimización. Esta investigación intentará ser un parte aguas en la enseñanza del tema de optimización en la materia de cálculo diferencial en el nivel medio superior pues, de cumplirse el objetivo planteado muchos serán los profesores que puedan llevar esta actividad al aula y así abordar de manera distinta y novedosa el tema.

### **Marco teórico**

Se trabajará con la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1998), basándose en el supuesto de que mientras más representaciones se tengan de un objeto, mejor será la comprensión o aprehensión del concepto en juego; se trabajará con un software programado en la plataforma de desarrollo y ejecución de aplicaciones .NET Framework y lenguaje C# para promover en el estudiante el uso de distintas representaciones para aproximarse y, en la medida de lo posible, llegar a la solución de los problemas aplicados de optimización de funciones. De ahora en adelante llamaremos OptiProb al software producto de mi trabajo.

Duval (1998) afirma que sólo por medio de las representaciones es posible una actividad sobre los objetos matemáticos y caracteriza a un sistema semiótico como un sistema de representación, el cual puede ser un registro de representación si permite las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis:

- La formación de un signo o un conjunto de signos perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
- El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
- La conversión que es la transformación de la representación en otra de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Una de las hipótesis que se mencionan en Duval (1998) referente a la noesis es que “la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos

registros de representación, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión” (p. 186).

En la actualidad el uso de la tecnología es atractivo para los alumnos del nivel medio superior; la utilización de un software con interfaz amigable y sencilla nos permite trasladar un problema dado de manera tradicional en los libros de texto, a diversas representaciones (entre ellas, representación verbal, representación analítica, representación tabular y representación gráfica) permitiendo, por ejemplo, que el alumno interactúe con un programa de computadora que pueda manipular fácilmente y que a la vez le permita transitar entre las diferentes representaciones. Es importante resaltar la importancia del uso de la tecnología debido a que se ahorran cálculos y el alumno no pierde de vista el objetivo, es decir, el alumno se centra en la parte visual y no se centra en realizar operaciones en su calculadora, hacer tablas de datos, graficar puntos, hacer dibujos, etc. sino que simplemente concentrará su atención en reportar en un formato de Microsoft Word previamente elaborado todo aquello que observe y que le ayude a responder a las cuestiones marcadas en dicho documento. Esto con el fin de manejar toda la evidencia en formato digital aprovechando las potencialidades del uso de la computadora en el diseño.

### **Método**

- Diagnosticar de qué manera los estudiantes resuelven los problemas de optimización.
- Promover el uso de la tecnología, en concreto el software OptiProb, para aproximarse a la solución de problemas de optimización.
- Percibir la diversidad de representaciones semióticas que puede tener un problema de optimización.
- Diseñar una secuencia didáctica a través de la cual el estudiante logre aproximarse a soluciones de problemas de optimización mediante las distintas representaciones semióticas que el software OptiProb le puede proporcionar.
- Observar el impacto del diseño en los alumnos del nivel bachillerato.
- Evaluar si se están aprendiendo o no los temas que involucran la resolución de problemas de optimización usando el criterio de la primera derivada.

Esta situación se implementará a un grupo de estudiantes que se encuentren cursando la materia de Cálculo Diferencial, es decir, la situación se implementará de manera tal que sustituya sus clases. Posteriormente se hará un test para comprobar la funcionalidad de la situación. Se aplicará un examen a dos distintos grupos de estudiantes, el primero será un grupo de estudiantes que hayan trabajado los problemas de optimización con el uso de tecnologías y bajo la implementación de la situación didáctica, y el segundo grupo estará conformado por estudiantes que hayan llevado un curso tradicionalista para así poder comparar si realmente la situación diseñada es funcional o proponer cambios para ello.

### **Resultados**

Con la puesta en escena del diseño realizado se espera que a través del uso de las representaciones semióticas el alumno aprenda de una mejor manera el tema de máximos y mínimos de una función, y que a la vez se promueva el uso y aplicación de la derivada

(criterio de la primera derivada) a problemas de la vida cotidiana y de la geometría. Debido a que la puesta en escena se llevará a cabo con alumnos que aun no han visto los temas de máximos y mínimos de una función, criterio de la primera derivada y optimización de funciones, se espera que, al salirnos un poco de la enseñanza tradicional, los alumnos tengan una mejor comprensión del concepto de máximo y mínimo y puedan, como menciona Malaspina (2007), justificar con rigor sus soluciones por medio de distintas representaciones semióticas de la solución del problema y que no solamente se queden con la parte algorítmica y carente de sentido.

## Reflexiones

A través del análisis de las investigaciones se evidencia, en primer lugar, que existe una gran preocupación por atender y mejorar el aprendizaje de los alumnos en el tema de optimización. Más aun, en las investigaciones se hace uso de tecnología (Calculadoras TI-92 y Derive); el presente trabajo se realizará con el apoyo del software propio OptiProb, debido a que se considera que tanto profesores como estudiantes tiene más posibilidad de acceder a este software que a calculadoras gráficas u otro dispositivo. Además se propone trabajar a través del uso de representaciones semióticas (Duval, 1998) los de temas de la derivada, máximos y mínimos y criterio de la primera derivada en la solución de problemas aplicados.

Con este diseño de secuencia didáctica se espera desarrollar una buena herramienta tanto para el aprendizaje como para la enseñanza del tema máximos y mínimos haciendo uso del criterio de la primera derivada para resolver problemas aplicados de optimización de funciones en el nivel medio superior.

## Referencias

- Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 25-45. Recuperado de [http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/images/stories/documents/visualizacio/arca\\_vi\\_computer.pdf](http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/images/stories/documents/visualizacio/arca_vi_computer.pdf)
- Camacho, M. y González, A. (1998). Una aproximación a los problemas de optimización en libros de bachillerato y su resolución con la TI-92. *Didáctica de la matemática*, 10, 137-152. Recuperado de [http://campus.usal.es/~revistas\\_trabajo/index.php/0214-3402/article/viewFile/3553/3573](http://campus.usal.es/~revistas_trabajo/index.php/0214-3402/article/viewFile/3553/3573)
- Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. pp. 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Relime*, 10(3), 365-399.
- Moreno, S. y Cuevas, C. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. *Educación matemática*, 16(2), 93-104.
- Tomás, F. (2002). Método de determinación de máximos y mínimos previo a la enseñanza del cálculo diferencial. *SUMA*, 47, 87-90.

Tall, D. (1997). Functions and Calculus. En Bishop A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education, Países Bajos, pp. 289-325. Recuperado de <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997a-functions-calculus.pdf>

### **Autores**

*Erick del Refugio de Lira Lozano*; UAZ. México; [erickdillma@gmail.com](mailto:erickdillma@gmail.com)

*Elvira Borjón Robles*; UAZ. México; [borjonrojo@hotmail.com](mailto:borjonrojo@hotmail.com)