INTRODUCCIÓN A LAS TESELACIONES: EXPERIENCIA DE UN TALLER

Ilse Domínguez Alemán, Itzel Domínguez Alemán, Esbeidy Abigail García Espinal, Gema Rubí Moreno Alejandri

Resumen

En el marco del programa "Atención educativa a niñas, niños y jóvenes con aptitudes sobresalientes y talentos específicos de jóvenes guerrerenses" la Secretaría de Educación Guerrero, en la fase de "enriquecimiento extracurricular", la Unidad Académica de Matemáticas ofertó una serie de talleres para dar atención a este programa. Los participantes fueron 16 jóvenes de educación secundaria. En este trabajo se presenta los fundamentos, la actividades desarrolladas y los resultados de uno de los talleres denominado Explorando Teselas".

Palabras Clave: Teselaciones, Ángulos interiores de un Polígono, Movimientos isométricos, Enseñanza Problémica.

Es ampliamente aceptada la visión de la Geometría Euclidiana como una fase insustituible en el desarrollo de la racionalidad humana, considerando que constituye un paso obligado en el proceso que, del lenguaje ordinario, conduce al formalismo matemático (Camacho y Morales, 1994). De manera que, la Geometría Euclidiana, es considerada como la disciplina más adecuada para desarrollar la capacidad de razonamiento del alumno y despertar su interés por las Matemáticas en todos los niveles.

En la escuela, la enseñanza de la geometría está presente desde los inicios de la formación académica de los estudiantes. En los primeros niveles educativos, es preferente poner énfasis en la argumentación informal, apoyada fuertemente en la visualización. Sin embargo, resulta conveniente proponer actividades que encaminen a una argumentación formal que haga alusión a las propiedades geométricas que sustentan la relación percibida.

En particular, respecto al concepto teselación Domínguez, García, y Moreno (2013) sostienen que "contribuye al desarrollo del pensamiento geométrico, la creatividad y, por otro lado, posibilita el reconocimiento de la relación entre este concepto y la vida cotidiana, generando así interés por parte de los alumnos".

Cerrone (2006) argumenta que los niños no aprenden acerca de la geometría y el espacio mediante la observación pasiva, sino interactuando con formas y su entorno. Los niños deben investigar conceptos por sí mismos para determinar las propiedades básicas relacionadas con las formas y perspectiva.

Por otro lado, la capacidad de argumentación, validación y proposición que se evidencia al momento de la construcción del patrón de teselación y la posibilidad de creación de diferentes patrones que conducen al recubrimiento del plano de forma geométrica. Herrera, Montes, Cruz, y, Vargas, (2010), a este respecto comenta: "El maestro debe propender por generar un ambiente de interacción constante entre las construcciones realizadas por los estudiantes y las nociones geométricas que se pretenden abordar mediante el desarrollo de la actividad."

Cerrone (2006), en su propuesta, utiliza el tema de los mosaicos para guiar a los estudiantes de nivel medio superior en el desarrollo de una relación entre la geometría, el sentido espacial, la simetría y el álgebra abstracta. Defiende que el tema de teselaciones no está atado a cierto rango de edad. De modo que ofrece una serie de lecciones propuestas para abordar el tema de Teselaciones, dirigidas a estudiantes desde el nivel preescolar hasta el universitario.

Dos aspectos clave que deben ser incluidos en una secuencia didáctica sobre teselaciones son: la necesidad y el razonamiento fundamental (Cerrone, 2006). Cuando éstos se establecen creativamente y de manera apropiada, un estudiante tendrá la oportunidad óptima de retener la materia y desarrollar plenamente los conceptos representados.

Ahora bien, en los materiales curriculares de la Educación Básica en México, el contenido relativo a *Teselaciones* no está catalogado como un aprendizaje esperado. Más bien está al servicio de otros aprendizajes esperados (Suma de los ángulos interiores de un polígono en segundo grado y Transformaciones Isométricas en el plano en tercer grado) con el fin de ejemplificar, ejercitar, aplicar o profundizar en otros contenidos más directamente relacionados con los estándares curriculares (Martínez, 2014). Esto se desprende la revisión a materiales curriculares disponibles al profesor para la planificación y el desarrollo de actividades.

En vista de lo anterior, se diseñaron una serie de actividades que conformaron un talle denominado "Explorando Teselas" dirigido a estudiantes de Secundaria. Éste taller, se centró en la introducción del concepto *Teselación* explotando su cualidad como potente aliado a la hora de abordar contenidos tales como suma de ángulos interiores de un polígono y transformaciones isométricas en el plano. A continuación se describe la concepción teórica, los aspectos metodológicos y algunos resultados de la implementación del taller.

Concepción teórica

El enfoque didáctico que se asumió en este taller es la Enseñanza Problémica como una alternativa para activar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Si se parte de la premisa de que el hombre comienza a pensar sólo cuando aparece la "necesidad de comprender algo", entonces el momento inicial del pensamiento es generalmente una situación problémica.

La enseñanza problémica busca la "asimilación no solo de los resultados del conocimiento científico, sino también de la vía, del proceso de obtención de dichos resultados; incluye , asimismo, la formación de la independencia cognoscitiva del alumno y el desarrollo de sus capacidades creativas" (Majmutov, 1983). De modo que, coadyuva al "desarrollo de las necesidades cognoscitivas y a la formación de una personalidad intelectualmente activa" del alumno.

La Enseñanza Problémica posee categorías fundamentales: la situación problémica, el problema docente, la pregunta problémica y las tareas problémicas. A continuación se presenta una descripción de ellas (Ballester y otros, 1992).

Una *situación problémica* "es un estado psíquico de dificultad intelectual que surge en el hombre cuando en una situación objetiva no puede explicar el nuevo hecho mediante los conocimientos que tiene o los métodos que ya conoce sino que debe hallar un nuevo método de acción".

Es necesario aclarar que la pregunta, condiciones o medio diseñado por el profesor no ha de confundirse con la situación que se propone provocar en el alumno, que es un estado psíquico interno, contradictorio, de insatisfacción entre lo conocido y lo que está por conocer, es decir, la propia situación problémica. Estos estados de conflicto congnitivo son propiciadores de la actividad intelectual denominada actividad de aprendizaje.

En el análisis de la situación problémica, donde se separa lo conocido y lo buscado y se determinan sus relaciones se realiza la formulación del *problema docente*.

Después, comienza el proceso de búsqueda de su solución, la *tarea problémica*, que consiste en una actividad conducente a encontrar lo buscado, a partir de la contradicción que surgió durante la formación de la situación problémica.

Las *preguntas problémicas* expresan, de forma concreta, la contradicción entre los conocimientos y los nuevos hechos. Componen un impulsor directo del movimiento del conocimiento. No cualquier pregunta es problémica. Para alcanzar este estatus, la pregunta debe tener un carácter heurístico, y por tanto, compromete a cuidarse en su formulación de no descubrir el paso siguiente. Es un estímulo a la reflexión del sujeto que enfrenta el problema en la búsqueda independiente de la solución del mismo.

En este enfoque, las situaciones problémicas son consideradas la principal fuente de generación del conocimiento matemático. Este concepto de enseñanza implica la necesidad de que el profesor diseñe o seleccione actividades que promuevan la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas, en las que los alumnos puedan observar, explorar, conjeturar, interactuar entre ellos y con el profesor. Esto ocasionará que los alumnos conciban a las matemáticas como un conjunto de herramientas funcionales y flexibles que son útiles para entender y resolver diversos problemas.

Aspectos Metodológicos

En el marco del programa "Atención educativa a niñas, niños y jóvenes con aptitudes sobresalientes y talentos específicos de jóvenes guerrerenses" la Secretaría de Educación Guerrero, en la fase de "enriquecimiento extracurricular", solicitó a la Unidad Académica de Matemáticas que diseñara una serie de talleres para dar atención a este programa. Uno de los talleres es el antes enunciado, "Explorando Teselas".

Los participantes fueron 16 jóvenes de educación secundaria de la zona escolar 002 de Educación Especial de Acapulco, Guerrero. Estos participantes aún no habían tenido contacto con el contenido de este curso.

Las actividades del taller se realizaron en dos sesiones. La primera sesión tuvo la intención de centrarse en el contenido relativo a la suma de los ángulos interiores de un polígono y se dividió en dos etapas: "Teselación Regular" y "Teselación Semiregular". Para ello, se les proporcionó a los equipos una cantidad suficiente de piezas de cartulina con forma de distintos polígonos regulares (de tres a doce lados).

En la primera etapa, "Teselación Regular", se les invitó a explorar cada tipo de pieza con el fin de que descubrieran con cuáles (de un solo tipo) es posible cubrir el plano siguiendo las reglas: sin traslapes y sin huecos. En la segunda etapa, "Teselación Semiregular", se modificó la cantidad de tipos de piezas que podían usar (2 o más) pero se conservaron las mismas reglas. La intención fue que descubrieran con cuáles combinaciones de polígonos (Teselas semirregulares) es posible cubrir el plano.

La segunda sesión también se conformó de dos etapas: "Quita y Pone" y "Teselando una superficie". Las actividades propuestas se centraron en el contenido relacionado con movimientos isométricos en el plano. Un método sencillo, para fabricar teselados, consiste en partir de un teselado regular, luego deformar los lados y luego trasladarlos o simetrizarlos al opuesto (Boule, 2005). Esta técnica es también conocida como "mordisco" o "quita y pon". Consiste básicamente en dibujar segmentos o curvas en una figura base, y aplicarle las transformaciones isométricas adecuadas.

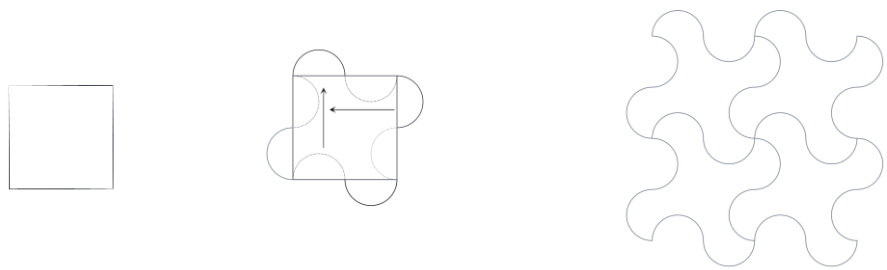
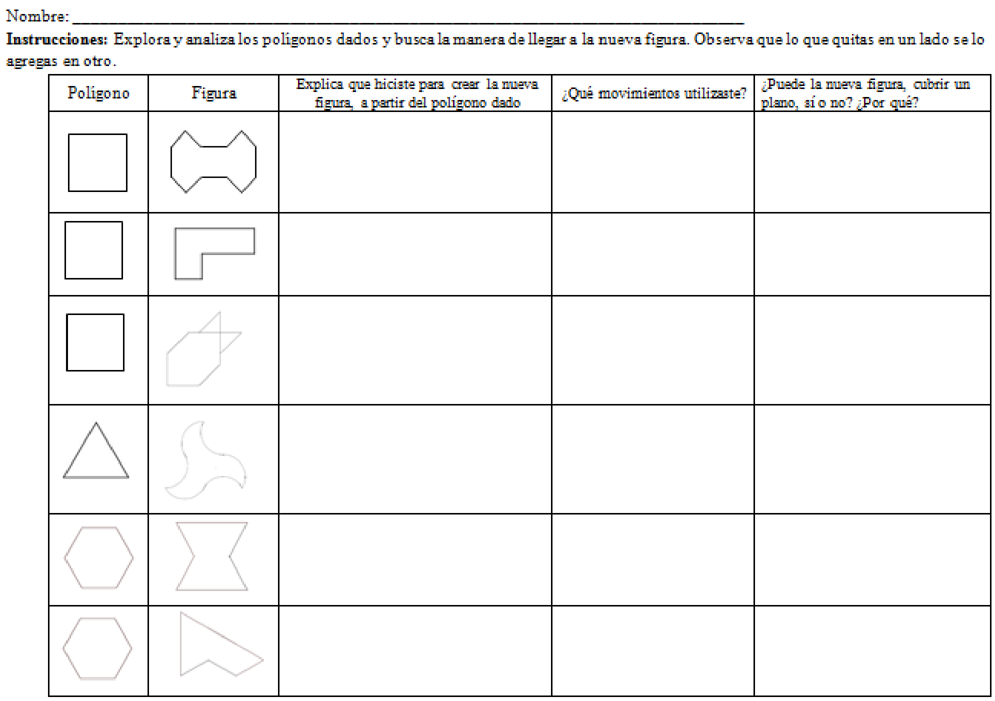


Figura 1. Método "Quita y Pone"

Ahora bien, este método no se hizo explícito sino que se planteó la problemática a la inversa: se les presentó 6 pares de piezas de los cuales cada par estaba constituido de la siguiente manera: primero una de las que ya se conocía que podía cubrir el plano (cuadrado, rectángulo, triangulo y hexágono) y, luego, otra que resulta de la transformación de la primera (usando el método quita y pone).

En la primera etapa, "Quita y Pone", se les invitó a reflexionar de qué manera es posible transformar la figura original en la transformada y qué movimientos usarían para lograrlo.



Nombre: ______________________________

Instrucciones: Explora y analiza los polígonos dados y busca la manera de llegar a la nueva figura. Observa que lo que quitas en un lado se lo agregas en otro.

Polígono	Figura	Explica que hiciste para crear la nueva figura, a partir del polígono dado	¿Qué movimientos utilizaste?	¿Puede la nueva figura, cubrir un plano, sí o no? ¿Por qué?

Figura 2. Hoja de trabajo del participante en la etapa "Quita y Pone"

Posteriormente, en la segunda etapa, "Teselando una superficie", se les solicitó que comprobaran sus conjeturas mediante recorte y reacomodo. A continuación, se planteó la cuestión de si las piezas transformadas cubrirían el plano respetando las reglas antes ya mencionadas. Finalmente, se les pidió que eligieran una de las piezas y recubrieran una superficie plana.

Algunos resultados

En la etapa "Teselación Regular", en equipos, se les invitó a explorar cada tipo de pieza con el fin de que descubrieran con cuáles (de un solo tipo de polígono) es posible cubrir el plano siguiendo las reglas: sin traslapes y sin huecos. A partir de la experimentación empezaron a trabajar con las características esenciales del concepto teselación. Se les pidió que buscaran la razón por la que sólo se podía cubrir el plano con sólo los polígonos ubicados (triángulo, cuadrado y hexágono) y se les solicitó que escribieran sus conclusiones.

Tres de los equipos (3, 4 y 5) encontraron los polígonos con los que es posible cubrir el plano argumentando a un nivel visual la ausencia o no de huecos al "juntar" las figuras. El equipo cuatro observó que, más allá del material utilizado, "entre más lado tenga el polígono [refiriéndose más de 12 lados] menos se puede!" cubrir la superficie.

El equipo 2 también hizo observaciones a un nivel visual pues argumentó que los polígonos que no sean el triángulo, el cuadrado ni el hexágono, "no funcionan porque siempre sobran espacios que no tienen la misma forma de las figuras utilizadas". Sólo en el caso del cuadrado, hizo alusión a la medida de su ángulo interno, especificó "puede cubrir una superficie plana […] porque el cuadrado tiene todos sus lados iguales y rectos". Ahora bien, es interesante que respecto a los polígonos con un mayor número de lados y haciendo uso de su intuición, argumentaron que “son figuras que se parecen a los círculos y todos sabemos que los círculos no pueden juntarse y hacer que no sobre espacio”.

En la discusión que se dio dentro del equipo 1, se concluyó que para cubrir la superficie se pueden utilizar el triángulo, el cuadrado y el hexágono porque “al unirlos siempre queda un espacio donde encaja la figura, para que esto se pueda la suma de sus ángulos internos al unirlos debe dar un total de 360°”. El resto de las figuras “no es posible porque al unirlas siempre queda un espacio demasiado pequeño para que una figura igual entre, además de que la suma de ellos no da 360°”. Con ello, mostraron ir más allá de lo puramente visual y revisaron los ángulos interiores de los polígonos y buscaron una relación con lo que significa “sin huecos ni traslapes”, es decir, polígonos con ángulo cuyo uno de sus múltiplos sea 360°. Por ejemplo, su argumentación era del tipo: “el ángulo del cuadrado es 90°, así 90°+90°+90°+90°= 360°. Esta explicación fue aceptada por el grupo en la discusión grupal.

Figura 3. Exploración de recubrimientos con sólo un tipo de polígonos

En la etapa “Teselaciones semi-regulares” se tuvo como objetivo que los alumnos a través de la experimentación con dos o más tipos de polígonos detectaran las distintas combinaciones posibles que permitieran cubrir una superficie plana, siguiendo las mismas siguientes reglas de no dejar huecos, ni traslapes.

Al equipo 5 le ganó el deseo de construir otras figuras con las piezas, dejando de lado las reglas para colocar las figuras.

Los equipos 1, 2, 3 siguieron con la conclusión asumida en la etapa anterior y, teniendo en cuenta que “la suma de los ángulos, aunque ahora son diferentes sigue siendo de 360°”, lograron encontrar algunas de las teselaciones semi-regulares. Los equipos 1 y 2 encontraron todas la teselaciones semi-regulares, el equipo 3 encontró cinco de ellas y el equipo 4 sólo tres.

En la discusión general, los equipos que o habían encontrado todas estuvieron al pendiente de cuáles les había hecho falta y verificaron su pertinencia. Fue de interés que en la exploración encontraron teselaciones no uniformes (con variación en los puntos de unión de los polígonos) y se dio una discusión sobre su pertinencia o no, según las reglas proporcionadas.

Figura 4. Algunas combinaciones propuestas

En la etapa “Quita y Pone” se buscaba que los alumnos, usando un polígono regular lo transformaran a la figura indicada en las hojas de trabajo, de tal manera que lo que le “recortaran” al polígono lo tenían que reutilizar, cambiándolo de lugar, para formar la nueva tesela.

En esta actividad, en un inicio de forma individual, 10 estudiantes lograron identificar para la mayoría de los casos la transformación que había de hacerse para obtener la figura modificada. Además, hicieron uso de los conceptos rotación y traslación de manera explícita (usando la terminología) en las descripciones de la transformación que sugerían. Sin embargo, se les complicó identificar composición de movimientos, de hecho, sólo prevaleció la identificación de sólo un movimiento (por ejemplo, obviando la traslación al referirse a una rotación).

Sólo un estudiante no distinguió las diferencias entre los movimientos al referirse como movimientos utilizados “movimientos de la manos”.

Figura 5. Transformando los polígonos iniciales

También fue interesante cómo surgieron diferentes formas de fragmentar el cuadrado para formar el hexágono en forma de “L” (fragmentando en cuadrados o en rectángulos), así como sus consecuentes diferentes movimientos necesarios para lograr la transformación deseada. También al fragmentar el cuadrado para formar el dodecágono en forma de "hueso" surgieron dos alternativas.

En la última etapa "Teselando una superficie", se les solicitó que comprobaran sus conjeturas mediante recorte y reacomodo. A continuación, se planteó la cuestión de si las piezas transformadas cubrirían el plano respetando las reglas antes ya mencionadas.

Finalmente, se les pidió que eligieran una de las piezas y recubrieran una superficie plana, logrando excelentes resultados. Incluso hubo jóvenes que fueron más allá y crearon sus propios diseños.

Figura 6 Algunos de los teselados hechos por los participantes

Algunos resultados de las actividades que conformaron el taller son:

a. Las actividades propuestas lograron que los alumnos entraran en Situación Problémica, lo que llevó a los participantes a asumir el problema como suyo.

b. Al trabajar en equipo y con un material concreto se logró una comunicación y argumentación de ideas matemáticas desarrolladas a partir de la exploración y manipulación de los mismos.

c. Se promovió la elaboración de conjeturas y verificación de las mismas.

d. Se logró la apreciación de las expresiones artísticas y creativas de los jóvenes.

En conclusión, la introducción del concepto *teselación* mediante este taller mostró el potencial que tiene este concepto para el desarrollo del pensamiento geométrico, la creatividad y, por otro lado, posibilita el reconocimiento de la relación entre este concepto y la vida cotidiana, generando así interés por parte de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Ballester, S., y otros (1992) *Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo 2*. Pueblo Educación. Cuba

Boule, F., (2005) *Reflexiones sobre la Geometría y su Enseñanza.* Capítulo 8 "Teselados". Correo del Maestro Ediciones la Vasija.

Camacho, M., & Morales, A., (1994) Algunas características del currículum de geometría en la enseñanza secundaria obligatoria. Sugerencias didácticas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, No. 21, pp. 83-94.

Cerrone, K., (2006) *Tessellations: Lessons for every age.* Thesis's Degree Master of Science. University of Akron.

Domínguez, I., García, A., & Moreno, G., (2013) *Una experiencia de un taller: Explorando teselas.* Cartel presentado en el Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana.

Herrera, V., Montes & Cruz, A., y, Vargas, P., (2010) Teselaciones: Una Propuesta para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría a Través del Arte. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.*

Hidalgo, L., (2007) *Mosaicos*. Temas de Matemáticas para bachillerato. Tomo 7. México: Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Majmutov, M., (1983) *La enseñanza problémica*. Pueblo y Educación. Cuba

Martínez, A., (2014) *Propuesta Didáctico-Metodológica para la elaboración del concepto "Teselación" en Educación Secundaria*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero.

Autores

Ilse Domínguez Alemán; UAGro. México; idmgzal@gmail.com
Itzel Domínguez Alemán; UAGro. México; idomn.20@gmail.com
Esbeidy Abigail García Espinal; UAGro. México; eag.espinal@gmail.com
Gema Rubí Moreno Alejandri; UAGro. México; alejandrigemath@gmail.com