GEOMETRÍA DINÁMICA: EL CASO DE LAS CURVAS TRASCENDENTES

Marcela Ferrari Escolá, Cira Saligan Pérez, Gustavo A. Meneses Cisneros

Resumen

Para nuestro laboratorio proponemos trabajar con actividades de aprendizaje diseñados con geometría dinámica, en particular con GeoGebra. La construcción geométrica de diferentes curvas será el disparador de una red de modelos que conllevará reflexionar sobre covariación. Percibir y estudiar la covariación, es decir, la simultaneidad de dos variaciones diferentes que se afectan mutuamente nos permitirá fortalecer nuestro acercamiento al concepto de función. La socioepistemología es la visión teórica en la que basamos los diseños de aprendizaje así como la gestión del taller. Trabajaremos principalmente con funciones trascendentes, es decir, funciones como la exponencial, la logarítmica y las trigonométricas.

Palabras clave: funciones trascendentes – covariación – geometría dinámica

La apropiación de “función”, en el ámbito escolar, ha sido estudiada desde diferentes miradas teóricas (e.g. Dubinsky & Harel, 1992; Olimpio Junior, 2007; Falcade, Laborde & Mariotti, 2007; Trigueros & Martínez, 2010; Tall, 2012) y se ha constituido como eje central del estudio del Cálculo en cuanto al desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional. Un primer acercamiento escolar a la noción de función se percibe en la Educación Básica Mexicana donde se introducen las funciones lineales y cuadráticas incentivando el diálogo entre sus expresiones algebraicas, la tabulación de sus datos y su gráfica. En el nivel medio superior y superior, se fortalece el estudio de diferentes funciones así como de sus operaciones. Cada uno de estos acercamientos ha sido tópico de variadas investigaciones, varias de las cuales introducen la noción de covariación para abordar el concepto de función (Saldhana & Thompson, 1998; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002; Oehrtman, Carlson & Thompson, 2008; Moore, Paoletti & Musgrave, 2013; Nagle, Moore-Russo, Viglietti & Martin, 2013; Weber & Thompson, 2014; Johnson, 2015).

Varios investigadores, interesados en estudiantes de nivel medio superior, coinciden en la necesidad de propiciar un acceso intuitivo al concepto de función desde la noción de covariación, privilegiando las representaciones gráficas antes de presentar expresiones algebraicas. Hitt y González (2015) trabajan con representaciones gráficas de funciones mediante material manipulable; Hoffkamp (2011) propone un acercamiento cualitativo estructural al cálculo escolar utilizando geometría dinámica mientras que Saldhana y Thompson (1998) exploran sobre cómo describir el movimiento de un objeto respecto a dos puntos fijos. Estos investigadores sostienen que la comprensión de gráficas, que representan un continuo donde covarían estados de cantidades, no es trivial y no debe darse por sentada.

En el nivel superior, Carlson *et al.* (2002) y Johnson (2015) usan el llenado de botellas para estudiar la variación y el cambio en eventos dinámicos. Por su parte, Moore *et al.* (2013) analizan la representación gráfica de funciones en los sistemas de coordenadas cartesianas y polares. Weber y Thompson (2014) abordan funciones de dos variables y sus representaciones gráficas mientras que Nagle *et al*. (2013) analizan la conceptualización de la pendiente. Todas estas investigaciones han sido realizadas con estudiantes universitarios y tienen como fin encontrar evidencias sobre el razonamiento covariacional en diferentes actividades matemáticas que, si bien coinciden en la complejidad de desarrollar el razonamiento covariacional en estudiantes, lo consideran un prerrequisito para construir la noción de función.

En general, se reflexiona sobre la noción de "función" partiendo del hecho que conocer sus características mediante su lenguaje algebraico, numérico y gráfico, permite a los estudiantes comprender cualquier función específica. Se reporta a la comunidad de matemáticos educativos todo tipo de acercamientos, discusiones, propuestas y explicaciones acerca de función, pero pocos son los que reflexionan sobre funciones particulares tales como funciones cuadráticas (Ellis, 2011), funciones periódicas (Dreyfus & Eisenberg, 1983; Buendía, 2010), funciones exponenciales (Confrey & Smith, 1994 y 1995; Castillo-Garsow, 2010), funciones trigonométricas (Martínez-Sierra, 2012; Moore, 2014), función logarítmica (Ferrari & Farfán, 2010; Park & Choi, 2013; Kenney & Kastberg, 2013) entre otras. Vemos así, que se va desdibujando el paradigma imperante años atrás sobre el estudio global de función dando lugar al estudio de funciones específicas.

En este laboratorio proponemos compartir y explorar diseños de aprendizaje, pensados para estudiantes de bachillerato o de licenciatura, algunas de las funciones trascendentes que propicien la reflexión sobre covariación, es decir, sobre aquella simultaneidad de dos variaciones diferentes que se afectan mutuamente y cuya abstracción fortalece el acercamiento al concepto de función.

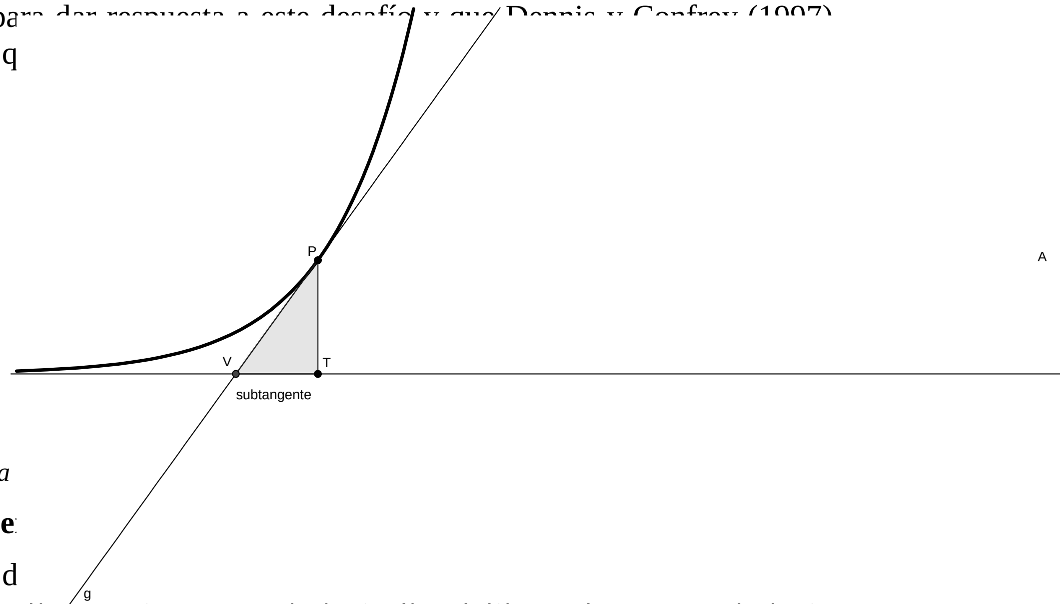
Marco teórico

Como socioepistemólogos partimos de la necesidad de realizar estudios sistémicos, donde se entremezclan las prácticas escolares inherentes a la transmisión del saber, las prácticas de referencia que reflejan el desarrollo de ese saber, las prácticas sociales que hablan de interacciones y herramientas así como las prácticas discursivas que evidencian la significación y consensos adoptados todo lo cual nos anuncia, en definitiva, comunidades que entrelazan sus producciones, donde el tiempo y el lugar, los sujetos y sus interrelaciones, los argumentos y herramientas, los avances y retrocesos, van construyendo el conocimiento.

La socioepistemología, sustento teórico de los diseños de aprendizaje que proponemos para este laboratorio, propicia la confluencia y relación dialéctica de aspectos que consideramos fundamentales al abordar un fenómeno didáctico. Contemplar y analizar el devenir de una noción a un objeto de saber; caracterizar las concepciones de los alumnos; dar cuenta de cómo vive una noción en las aulas y el discurso matemático escolar que se genera, ser conscientes que la matemática es un bien cultural inmerso en una sociedad y tiempo determinados que condiciona su comunicación y apropiación (Cantoral, 2013) conlleva profundizar en la reorganización de la obra matemática, en la reconstrucción de significados y en la matemática como actividad humana (Cordero, Cen & Suárez, 2010).

En nuestro trabajo, coincidimos con Confrey y Smith (1995) respecto a que: "*the construction of a counting and a splitting world and their juxtaposition through covariation provide the basis for the construction of an exponential function*" (p.80), idea que extendemos a la función logarítmica y que se percibe en la obra de Huygens (1678/1981) y de Agnesi (1748) cuya cuidadosa revisión nos dio luz para el diseño de las actividades de aprendizaje.

Efectivamente, consideramos importante reflexionar sobre la epistemología de las curvas logarítmicas del siglo XVII y su modelación. Rastreamos entonces, los argumentos que utilizó Huygens (1678/1981) en su intento por describir la caída de un objeto en un medio viscoso, así como los utilizados por Agnesi (1748) al dar un giro didáctico a la resolución que propone Leibnitz, en 1684 (Hairer & Wanner, 1996) para "*Encontrar una curva y(x) tal que, para cada punto P, la distancia entre V y T, puntos donde la vertical y la línea tangente cortan al eje x, sean siempre iguales"* (ver Figura 1), desafío que Debeaune lanza a principios del siglo XVII. Retomamos también el análisis de construcciones geométricas propuestas por Descartes para dar respuesta a este desafío y que Dennis y Confrey (1997) discuten desde una mirada q



Figura

Desde el trabajo de Huyge

En el análisis del trabajo d
logarítmica es aquel isomorfismo entre un crecimiento lineal (tiempo) y un crecimiento exponencial (velocidad-espacio). Es decir, se articula el movimiento en el fenómeno de la caída en un medio viscoso con el cambio de sus cambios. Descubrir ciertas regularidades y percibir algunas proporcionalidades, que cobran vida al reconocer progresiones, nos permite predecir distancia y velocidad (ver Figura 2) de un objeto en cierto medio.

La práctica de multiplicar sumando, característica insoslayable de los logaritmos, nos regresa a lo numérico, a lo cuantificable. La forma de la curva se complejiza al desear unir los puntos construidos geométricamente o calculados numéricamente, pues entra en juego la continuidad de la función, aceptada con naturalidad al describir la caída de cuerpos en un medio viscoso y que Huygens soluciona suponiendo que las resistencia son como las velocidades.

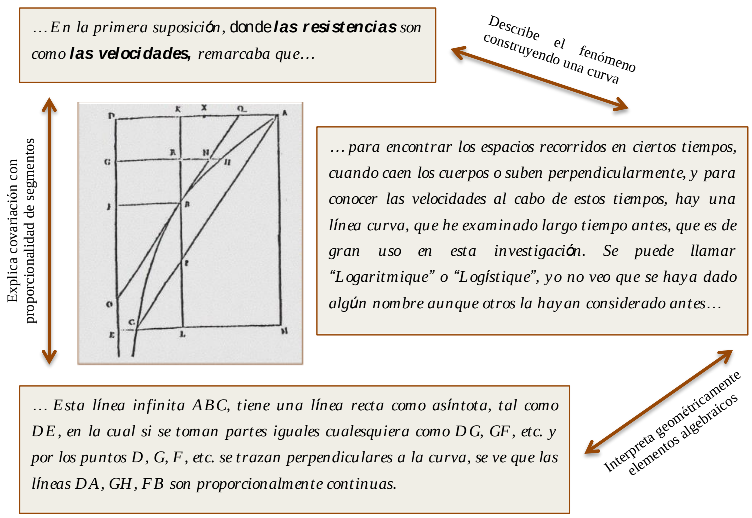


Figura 2: Esquema de elementos presentes en la obra de Huygens (1678/1981, pp. 1-2)

Desde el trabajo de Agnesi

Agnesi (1748) por su parte, modela un fenómeno particular descrito no por la observación de un cuerpo cayendo, práctica frecuente en la comunidad de los físicos, sino por un desafío geométrico, típica actividad de la comunidad de matemáticos. Es aquí donde la semejanza de triángulos, que se percibe, conforma la herramienta principal del modelo geométrico. Descubrir otras regularidades, que cobran vida al reconocer progresiones en la construcción de los catetos de los triángulos rectángulos, nos permite predecir el siguiente segmento sin construirlo, sino calculándolo. Nuevamente la práctica de multiplicar sumando nos regresa a lo numérico, a lo cuantificable, en tanto que la forma de la curva nos desafía a unir los puntos construidos geométricamente o calculados numéricamente, y nos cuestiona sobre su crecimiento o decrecimiento, que Agnesi soluciona desde lo infinitesimal (Figura 3).

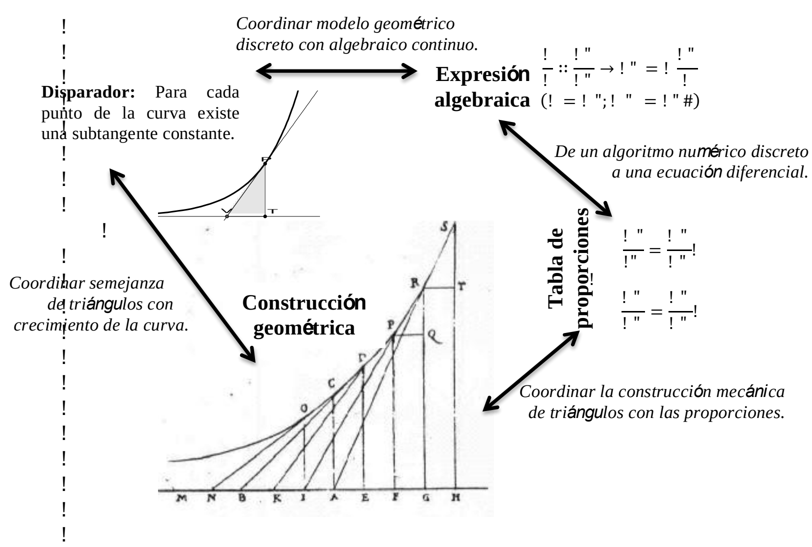


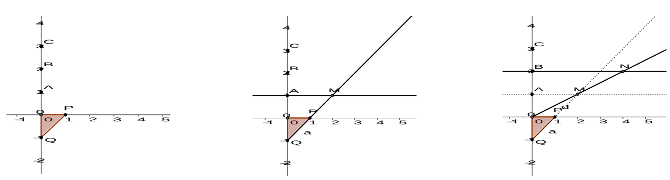
Figura 3: Esquema de elementos presentes en la obra de Agnesi (1748)

Tanto Huygens como Agnesi se afanan en describir formalmente fenómenos que se imbrican en una *covariación logarítmica*, es decir, aquella coexistencia entre una variación regida por diferencias constantes y otra por razones constantes; una donde se puede reconocer una progresión aritmética y en la otra una progresión geométrica, es decir, una, respondiendo a un crecimiento lineal y la otra a un crecimiento exponencial. Lo complejo no radica en cada una de estas variaciones, sino justamente en su co-existencia, su co-dependencia, su co-construcción, dando vida a una función logarítmica o a una función exponencial dependiendo de qué variación juega como independiente y cual como dependiente. En su empresa, utilizan ciertas herramientas matemáticas conocidas, crean otras, articulan los modelos logrados, actividades que constituyen el basamento de nuestros diseños de aprendizaje.

Ejemplificando los diseños de aprendizaje

Las actividades parten de una construcción geométrica, desafiando a los participantes a construir más puntos y describir la curva utilizando distintos modelos. Uno de los diseños que presentamos ha sido probado con estudiantes de bachillerato (Ferrari, 2008) y es el que compartimos en este apartado para ejemplificar el tipo de actividades que proponemos trabajar en el laboratorio.

Presentamos la construcción geométrica de la función logarítmica de base 2, adecuando la construcción geométrica de Agnesi la cual invita a construir una familia de semirrectas que al intersectarse con ciertas rectas horizontales genera puntos donde se percibe una progresión aritmética en sus ordenadas y una progresión geométrica en sus abscisas, emergiendo así la covariación logarítmica (ver Figura. 6).



1.- Construir el triángulo *OPQ* siendo *P* el punto $(0,1)$ de la curva y particionar el eje y usando el segmento como unidad.

2.- Construir el punto *M* como la intersección de la semirrecta *PQ* y una horizontal trazada por (0,)

3.- Construir el punto *N* como la intersección de la semirrecta *OM* y una horizontal trazada por (0,)

4.- Construir el punto *R* como la intersección de la semirrecta *AM* y una horizontal trazada por (0,)

5.- Construir más puntos. Trazar la semirrecta que pasa por el último punto construido y el punto (0,) utilizado para trazar la horizontal anterior. Por el punto (0, +) trazar la nueva horizontal que determina la ordenada del punto a construir. Etiquetar el punto de intersección de ambas rectas.

Figura 6: Construcción geométrica de una función logarítmica

En el laboratorio nos interesa replicar este diseño ya trabajado con estudiantes de bachillerato y discutirlo desde la construcción geométrica que proponen Dennis y Confrey (1997) basándose en el trabajo de Descartes y, por otro lado de las ideas de Rodríguez y Sarmiento (s/f) respecto a otras funciones usando GeoGebra. Los nuevos diseños implican también el uso de geometría dinámica siendo, en la construcción de una curva, el círculo unitario y ciertas rectas tangentes y secantes elementos importantes, sustentando la evolución de los puntos en la semejanza de triángulos. Ideas similares utilizaremos para la construcción de curvas especiales donde la covariación imperante emergerá de ciertas regularidades, haciendo hincapié en aquellas curvas geométricas que en el siglo XVIII las separaron de las funciones algebraicas.

Conclusiones

Es Euler quien distingue, en el siglo XVIII, entre funciones algebraicas y trascendentes en su obra *Introductio in analysin infinitorum*:

> "*Functiones dividuntur in Algebraicas & Trascendentes; illæ"sunt, quæcomponuntur per operationes algebraicas solas, hævero in quibus operationes trascendentes insunt"*. [Las funciones se dividen en algebraicas y trascendentes; las primeras están formadas únicamente a través de operaciones algebraicas y las segundas suponen, en su formación, operaciones trascendentes. (Tomado de Martínez, 2008, p. 77)]

Martínez (2008) advierte que "*lo que está en el fondo de esta definición es el hecho de que las funciones algebraicas son aquellas que se obtienen a través de un número finito de operaciones elementales y las segundas mediante un número infinito de operaciones elementales*" (p.78). Argumento que emerge del desarrollo en serie de potencias de funciones como la exponencial, la logarítmica y las trigonométricas, manteniéndose en el discurso matemático de la época y fortaleciéndose a la par del análisis matemático.

En los programas de Bachillerato Tecnológico (2013), por ejemplo, encontamos que en cuarto y quinto semestre se desarrollan los cálculos diferencial e integral, invitándonos a reflexionar sobre la variación y la acumulación, en tanto que en sexto semestre se espera articular los saberes matemáticos en la unidad de aprendizaje "matemática aplicada", ideas que se retoman y profundizan en el nivel superior que se extiende incluso al uso de varias variables.

En este Laboratorio nos interesa disparar las reflexiones sobre funciones trascendentes de una variable desde un pa geométrica (Figura 7) de la invitando así a los inter covariación y enriquecerno

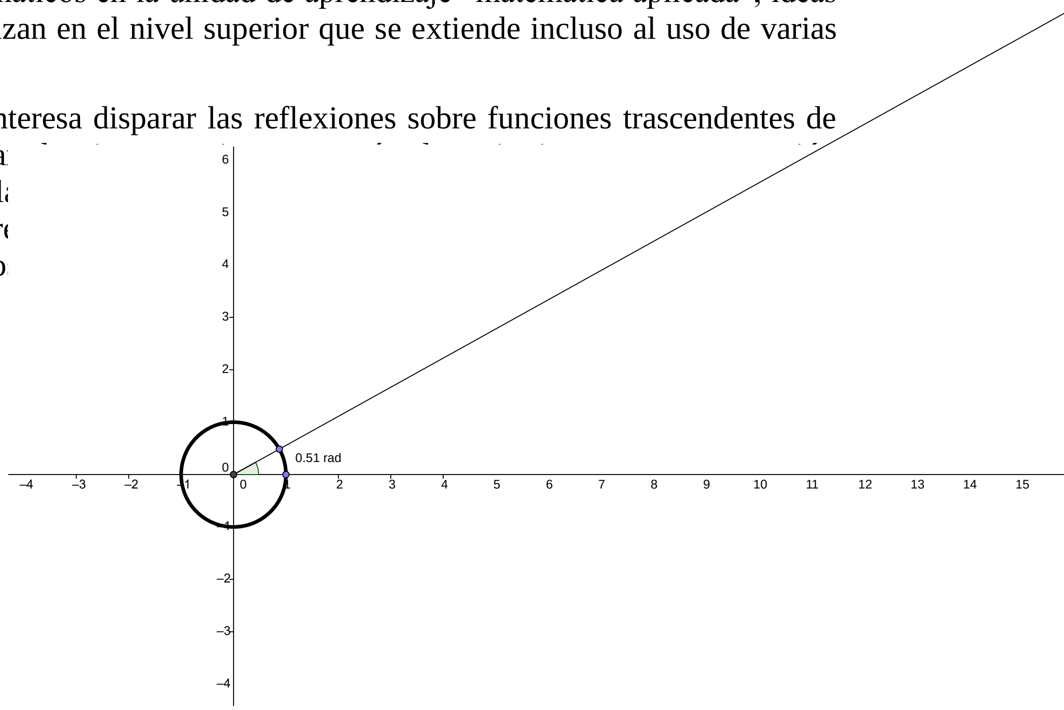


Figura 7: Esquema disparador de reflexiones

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana. Libro Secondo del Calcolo Differenziale.* Milano, Italia: Nella Regia Ducal Corte.

Buendía Abalos, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-1), 11–28.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Castillo-Garsow, C. C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth*. (Tesis de doctorado no publicada). USA: Arizona State University.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics 26*(2-3), 135-164.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86.

Codero, F., Cen, C. & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 13*(2), 187-214.

Dennis, E. & Confrey, J. (1997). Drawing Logarithmic Curves with *Geometer's Sketchpad*: A Method Inspired by Historical Sources. En J. King & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Washington D.C., USA: Mathematical Association of America.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: Linearity, Smoothness and periodicity. *Focus on learning problems in mathematics 5*(3-4), 119-132.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992)(Eds.) *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Washington, DC, USA: MAA Notes 25.

Ellis, A. (2011). Middle school algebra from a functional perspective: A conceptual analysis of quadratic functions. En L. R. Wiest, & T. Lamberg (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Reno, NV: University of Nevada Reno.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics 6*(3), 317-333.

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), 53-68.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva*. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Hairer, E. & Wanner, G. (1996). *Analysis by Its History*. New York, USA: Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process : The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics 88*(2), 201–219.

Hoffkamp, A. (2011). The use of interactive visualizations to foster the understanding of concepts of calculus: Design principles and empirical results. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *43*(3), 359–372.

Huygens, C. (1981). *Discours de la cause de la pesanteur*. Reeditado por IREM de Dijon, Francia. [Original publicado en 1678].

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics 89*(1), 89-110.

Kenney, R. & Kastberg, S. (2013). Links in Learning and Transferable Skills. *Australian Senior Mathematics Journal*, *27*(1), 12–20.

Martínez, C. (2008). El concepto de función en la obra de Euler: un recorrido a través de la constitución del Análisis Matemático Moderno. *Revista Miscelánea Matemática 46*, 73-91.

Martínez-Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15*(1), 35-62.

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 461–473.

Moore, K. C. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102–138.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus Students' and Instructors' Conceptualizations of Slope: a Comparison Across Academic Levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*, 1491–1515.

Oehrtman, M., Carlson, M. P. & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understanding of functions. En M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 150-166). USA: Series: MAA.

Olimpio Junior, A. (2007). Primeiro Ano num Curso de Matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de Cálculo. *Bolema 20*(28), 39-67.

Park, E. J., & Choi, K. (2013). Analysis of student understanding of science concepts including mathematical representations: pH values and the relative differences of pH values. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(July 2012), 683–706.

Rodriguez, Y. & Sarmiento, B. (s/f). *Construcción geométrica de las funciones trigonométricas*. Universidad Pedagógica Nacional. Disponible en: http://www.matvirtual.com/articulos/Cons-

Truccion_Trigonometricas.pdf

Saldanha, L. & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking convariation from a quantitative perspectivie: Simultaneous Continuous Variation. En W. N. Berensah y S. B. Coulombe (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America.* Raleigh, N.C: North Carolina State University.

Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics. 73*(1), 3-19.

Tall, D. A. (2012). Sensible approach to the Calculus**.** En F. Pluvinage & A. Cuevas (Eds.) *Handbook on Calculus and its Teaching.* **Disponible en:** http://www.davidtall.com/, **Consultado en enero de 2012.**

Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics 87*(1), 67–85.

Autores

Marcela Ferrari Escolá; UAGro. México; mferrari@uagro.mx
Cira Saligan Pérez; UAGro. México.

Gustavo A. Meneses Cisneros; UAGro. México.