CONEXIONES MATEMÁTICAS ENTRE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL: UNA REVISIÓN DE LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO

Javier García-García, Crisólogo Dolores Flores

Resumen

En este documento se exponen los avances de un proyecto de investigación cuyo objetivo es identificar las conexiones que entre la derivada y la integral establecen los libros de texto de Cálculo del bachillerato. Para ello se propone una revisión de cinco de los libros de texto más *comunes* recomendados por la DGB (Dirección General de Bachillerato) y la UAGro (Universidad Autónoma de Guerrero) para los cursos de Cálculo Diferencial e Integral. A la fecha solo se han analizado dos, donde observamos que la conexión entre la derivada y la integral visto como un proceso reversible se aborda mediante la idea de primitiva y por el otro, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo.

Palabras claves: conexiones matemáticas, derivada, integral, libros de texto.

Introducción

El estudio de las conexiones matemáticas en el campo de la Matemática Educativa parece ser una perogrullada. Ya que son parte consustancial de la estructura misma de la matemática; sin embargo, una cosa es su estructura como disciplina científica y otra diferente es lo que sucede cuando es sujeta de enseñanza y aprendizaje. Es una idea generalizada entre profesores y estudiantes que la matemática que se enseña en la escuela se desarrolla desvinculada de la realidad, por ejemplo. Las conexiones matemáticas implican una relación entre distintos objetos matemáticos, permitiendo con esto ver a las Matemáticas como un campo integrado y no como una colección de partes separadas. Estas conexiones pueden darse entre contenidos matemáticos (transversalidad interna), entre éstos y otras disciplinas (transversalidad externa), así como entre los conceptos matemáticos y la resolución de problemas planteados en diversos contextos (físico, químico, biológico, económico, en la vida real, etc.). Esto permite comprender la importancia de las conexiones matemáticas, razón por lo que han sido consideradas un eje fundamental en los estándares de la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2014). Además, en el proceso de aprendizaje las conexiones matemáticas implican que el alumno relacione y articule diversas nociones, conceptos y procedimientos para resolver problemas, tanto matemáticos como de otras áreas de conocimiento y situaciones de la vida cotidiana.

Por otra parte, reconocemos como conceptos clave del Cálculo a la derivada y a la integral. El primero tuvo su origen en el problema de las tangentes y, la integral tuvo su origen en el problema del cálculo de áreas de superficies con lados curvos. La conexión entre estos problemas como procesos inversos la descubrió Isaac Barrow (1630-1677) [Stewart, 2010] y, en el plano matemático la relación entre ambos está cifrada por el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Este teorema unifica dos conceptos aparentemente inconexos que fueron desarrollados aisladamente durante casi dos mil años. Sin embargo, asumimos que esta conexión no se hace evidente en el proceso de aprendizaje, entre otras razones porque el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral se estudian de manera separada en bachillerato, incluso en el nivel superior.

En razón de lo antes expuesto, creemos importante estudiar las conexiones matemáticas entre los conceptos clave del cálculo: derivada e integral. En particular, los avances que se presentan en este escrito buscan responder al siguiente objetivo: identificar las conexiones que entre la derivada y la integral establecen los libros de texto de Cálculo de nivel bachillerato.

Elementos teóricos y metodología

Las conexiones matemáticas son el elemento teórico en el que se fundamenta nuestro trabajo. Businskas (2008) señala que el énfasis en hacer conexiones matemáticas proviene de los Documentos Curriculares de Norteamérica, que indican una prevaleciente creencia de que hacer conexiones es un aspecto importante y valioso para el aprendizaje de las matemáticas. Para Businskas (2008), las conexionas matemáticas son:

- Una relación entre ideas matemáticas (existe independientemente del alumno) o procesos que se pueden utilizar para vincular los temas de matemáticas. Es decir, es parte de la actividad de hacer matemáticas.
- Un proceso cognitivo para hacer o reconocer los vínculos entre las ideas matemáticas.
- Una asociación que una persona puede hacer entre dos o más ideas matemáticas; esto es, una construcción por parte del alumno, en nuestro caso.
- Una relación causal o lógica o interdependencia entre dos entidades matemáticas.

Asimismo, Businskas considera a una conexión matemática como una verdadera relación entre dos ideas matemáticas, A y B. Para ello, resalta algunas categorías como marco teórico para pensar sobre las conexiones matemáticas. De estas categorías, consideremos importante para nuestros propósitos las siguientes:

- Representación alternativa: A es una representación alternativa de B. Las dos representaciones son diferentes: simbólica (algebraica), gráfica (geométrica), pictórica (diagrama), manipulativa (objeto físico), descripción verbal (hablado), descripción escrita.

- Representaciones equivalentes: A es equivalente a B. Son los conceptos que están representados en diferentes formas dentro del mismo tipo de representación.

- Procedimiento: A es un procedimiento usado cuando se trabaja con el objeto B. Por ejemplo, un diagrama de árbol es utilizado para describir un espacio muestral.

En este escrito entendemos por *conexiones matemáticas* en el sentido de Businskas. Para ubicar los libros de texto a revisar, primero identificamos aquellos que son recomendados en los programas de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral de la Dirección General de Bachillerato (utilizado por la mayoría de los bachilleratos) y de la Universidad Autónoma de Guerrero. De esta exploración, elegimos los libros *comunes* que son sugeridos en ambos planes, pero optamos por revisar aquellos que abordan tanto el Cálculo Diferencial como el Integral al mismo tiempo (Tabla 1). De esta manera, obtenemos los siguientes:

Libros
Contreras, L., Martínez, M., Lugo, O. y Montes, M. A. (2009). *Cálculo diferencial e integral.* México: Santillana.
Mora, E. y Del Río, M. (2009). *Cálculo diferencial e integral. Ciencias sociales y económico administrativas.* México: Santillana.
Stewart, J. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: CENGAGE Learning.
Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y Contextos*. México: CENGAGE Learning.
Larson, R., Edwards, B. H. y Hostetler, R. P. (2002). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGraw-Hill.

Tabla 1. Libros comunes recomendados por la UAGro y la DGB

Los libros registrados en la Tabla 1 son recomendados para el nivel bachillerato y en los que vamos a centrar nuestra atención. Como categorías de análisis utilizamos las siguientes:

a) *El orden en el tratamiento de los contenidos y conocimientos previos para introducir al Cálculo Integral:* esto es, el orden secuencial de los temas; en particular cómo se presenta la derivada y la integral. Asimismo, interesan los temas precedentes al Cálculo Integral.

b) *La conexión que hacen los textos en la transición del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral*: en particular, la conexión entre la derivada y la integral. En este punto importa también identificar si existe la conexión entre ambos conceptos y cómo se da esa conexión.

c) *Representaciones alternativas y equivalentes utilizadas en la conexión entre la derivada y la integral:* estas representaciones pueden ser: visual, simbólica, verbal, contextual y física.

d) *Procedimientos utilizados:* es decir, identificar cómo se relacionan procedimientos de una representación con los procedimientos de otra representación alternativa o entre representaciones equivalentes (referentes a la conexión entre la derivada e integral).

e) *Usos de las conexiones matemáticas en la resolución de problemas:* identificar la utilización de las conexiones entre la integral y la derivada en la resolución de problemas matemáticos y de otros contextos.

Resultados preliminares

Hasta la fecha hemos revisado dos libros. Enseguida daremos los pormenores de la revisión del libro de Mora y Del Río (2009).

El orden en el tratamiento de los contenidos y conocimientos previos para introducir al Cálculo Integral

El libro se integra de cinco unidades temáticas: (I) progresiones, (II) funciones, (III) límites y derivada, (IV) integral y (V) matrices y determinantes. En ese sentido, primero se presenta la idea de derivada y después la de integral. Previo al tema de derivada, se presenta el concepto y la definición de límite, teoremas de límites y continuidad. Las aplicaciones de la derivada se centran principalmente para calcular el costo marginal y el costo marginal unitario. Al término de esto, los autores presentan una sección llamada *ejercicios adicionales*, una de *autoevaluación* y una de *ejercicios complementarios*. En fin, previo al tema de integral se presenta primero la derivada, las interpretaciones de ésta (física y geométrica) y algunos de sus usos en contextos: geométrico, físico y en las ciencias económico-administrativas.

La conexión que hacen los textos en la transición del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral

En la parte introductoria de la Unidad IV (La Integral), los autores refieren que la integral se vincula de manera natural con la derivada, de modo que con ambas es posible analizar profundamente un fenómeno. Con esto, reconocen la relación existente entre la derivada e integral, es decir, la *conexión* entre ambos conceptos; pero no lo declaran como un objetivo del bloque. Para fortalecer la necesidad de transitar del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral, en el primer tema (función integrable en un intervalo cerrado) los autores presentan un gráfico (Fig. 1):

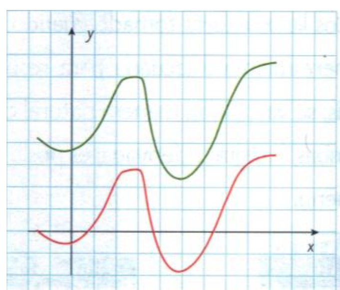

Fig. 1. Curvas que representan las ganancias de dos empresas (Mora y Del Río, 2009).

La explicación breve que subyace al gráfico es, que desde el punto de vista del Cálculo Diferencial, el comportamiento de ambas curvas es igual; sin embargo, para estudiar su diferencia representada por el área bajo la curva es necesario el Cálculo Integral. Por otra parte, en el tema *función integrable en un intervalo cerrado* la primera relación que se establece es con la geometría básica, se le hace explícito al estudiante cómo calcular el área bajo una función constante, sin realizar ni presentar el cálculo. Esta misma idea se sigue para indicar cómo calcular el área bajo funciones escalonadas y de una función lineal. Para ésta última se recurre al trazo de rectángulos y triángulos para determinar las áreas bajo ella. Posterior a esto, se representan aproximaciones de áreas –sin realizar cálculos, es decir, solo haciendo trazos- usando sumas de Riemann; tampoco se hace explicito este nombre, sino que se hace más adelante. Como ejemplo donde se utiliza la suma de Riemann, los autores se aproximan al área de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 10]$ trazando 5 rectángulos utilizando sólo el registro *simbólico*. Para puntualizar sobre la integral definida, los autores utilizan la noción de límite al infinito de las sumas de Riemann, sin profundizar en los procesos algorítmicos que llevan a esa igualdad.

Un aspecto a resaltar en la presentación de la integral es que primero se aborda la definida y después la indefinida. La conexión formal entre la derivada e integral que se observa está mediado por el primer Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), donde los autores señalan: *Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$. Sea una función G, definida como $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ para cualquier x en $[a, b]$; entonces G es una primitiva de f.* Los autores hacen explícito que este teorema indica el *sentido de reversibilidad* entre la derivada e integral y señalan que *la derivada de la integral de f es f misma*. Posterior a ello, presentan el segundo TFC en términos de una función primitiva F y, el tercer TFC referido al teorema del valor medio utilizando la idea de integral definida. Por otra parte, Mora y Del Río (2009) muestran ejemplos –recurriendo al registro simbólico- sobre el cálculo de primitivas de una suma de funciones, a la cual le añaden una constante para señalar que una función tienen una infinidad de primitivas. Enseguida en una tabla (Fig. 2) presentan ejemplos de funciones y sus respectivas primitivas.

Función F: primitiva de f	Función f: derivada de F
C	0
$kx+C$	k
$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	x^n
$\operatorname{sen} x+C$	$\cos x$
$\cos x+C$	$-\operatorname{sen} x$
$\ln x+C$	$\frac{1}{x}$
e^x+C	e^x
$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\frac{a^x(\ln a)^2}{(\ln a)^2}=a^x$

Fig. 2. Funciones primitivas (Mora y Del Río, 2009)

En la figura 2 se relaciona, al menos en el registro simbólico, el paso del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral mediante la idea de primitiva. Después de ello, los autores presentan como ejemplo la primitiva de la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$ cuando pasa por el punto (1, 2) utilizando el registro simbólico. Otros ejemplos corresponden a funciones de tipo: polinomial, racional, irracional y trigonométrica, una de cada una. En todas ellas usan el registro simbólico.

Representaciones alternativas y equivalentes en la conexión entre la derivada y la integral

La conexión entre la derivada y la integral en el libro de Mora y Del Río, se presenta en dos momentos: cuando se usan las primitivas y cuando se presenta el TFC. En ambos casos, sólo se usa el registro simbólico. Asimismo, sólo se muestran representaciones equivalentes cuando se expresan las primitivas de una función. Por ejemplo, $F(x) = x^2 - x^3$ y $F(x) = x^2 - x^3 + k$ vistas como primitiva de $f(x) = 2x - 3x^2$ son equivalentes en el registro simbólico. En el tránsito del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral no se utilizan las representaciones alternativas.

Procedimientos utilizados

En la conexión entre la derivada y la integral se observan dos procedimientos utilizados. Primero, se utilizan operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división, potencias, radicación) para encontrar primitivas entre representaciones equivalentes (simbólico-simbólico). Segundo, los autores se apoyan de la tabla mostrada en la *Figura 2* como un procedimiento para encontrar más fácilmente una primitiva, aunque no se puede decir que explícitamente sea entre registros alternativos, sino que sigue siendo entre representaciones equivalentes. Esa tabla (Fig. 2) es utilizada para encontrar primitivas de funciones particulares.

Usos de las conexiones matemáticas en la resolución de problemas

Los problemas que plantean Mora y Del Río (2009) para evidenciar la reversibilidad entre la derivada y la integral están referidos al campo de la economía, administración y finanzas. En el primer ejemplo, los autores explican brevemente lo que es el costo marginal ($C'(x)$) y enseguida plantean la integral que ayuda a calcular el costo total (CT), definido por la expresión $CT = \int C'(x)\,dx = C(x) + k$, donde la constante de integración es el costo fijo asignado al producto. Asimismo, usando ideas análogas presentan la forma de calcular el ingreso total (IT) en función del ingreso marginal ($IM = I'(x)$), es decir $IT = \int I'(x)\,dx = I(x) + k$. Aclaran que para calcular la constante de integración en este caso, puede ser usada la condición inicial de que el ingreso es nulo cuando la cantidad de demanda es nula. Finalmente, explican la forma de calcular la ganancia o beneficio marginal (GM) en función del beneficio total ($G(x)$). Ellos presentan la expresión $G(x) = \int_0^{x^*} [I'(x) - C'(x)]dx$, donde x^*representa el valor para el que $I'(x) = C'(x)$, que es donde se obtiene el valor máximo de beneficio.

Lo anterior nos indica que los problemas que Mora y Del Río presentan para reforzar la idea de la reversibilidad entre la derivada y la integral (utilizando el primer TFC), son referidos al cálculo del costo total y del ingreso total (en Economía), puesto que para el cálculo del beneficio total se requiere la idea de integral definida. Se presentan otros problemas de oferta y demanda como ejemplos, pero sólo utilizando la noción de integral definida. Los autores no presentan más problemas para reforzar la idea de reversibilidad entre la derivada y la integral en las lecciones. Aunque en las secciones de *ejercicios adicionales, autoevaluación* y *ejercicios complementarios,* se ubican problemas que requieren el cálculo de primitivas. Por ejemplo, encontrar la función que describe la posición de un objeto, la función que predice la recuperación de un paciente, para predecir el estado de ánimo de una persona bipolar, en ambos casos se dan unas condiciones iniciales, entre otros. Estos problemas, desde nuestro punto de vista, favorecen la conexión entre la derivada y la integral a partir de la idea de antiderivada o primitiva. Es necesario notar que los problemas planteados como ejercicios corresponden principalmente a los campos de la física, química, medicina, biología, economía y finanzas.

***Revisión del libro de Stewart* (2010)**

El orden en el tratamiento de los contenidos y conocimientos previos para introducir al Cálculo Integral

El libro se integra de ocho unidades: (I) Funciones y modelos, (II) Límites y derivadas, (III) Reglas de derivación, (IV) Aplicaciones de la derivada, (V) Integrales, (VI) Aplicaciones de la integración, (VII) Ecuaciones diferenciales y (VIII) Sucesiones y series infinitas.

La conexión que hacen los textos en la transición del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral

En Stewart (2010) la conexión entre la derivada e integral, vistos como procesos reversibles, se aborda en diferentes momentos. En la Unidad II, destaca el tema titulado *¿Qué dice f'acerca de f?* Donde presenta dos ejemplos utilizando el registro gráfico. En ese mismo bloque, el autor presenta la noción de *antiderivada;* "[…] una antiderivada de f es una función F tal que $F' = f$ (Stewart, 2010, p. 160)". En la Unidad IV, presenta el tema 4.8 titulado: *antiderivadas*, donde se presenta la conexión entre la derivada y la integral nuevamente, usando en este caso representaciones simbólicas. Asimismo, similar a Mora y Del Rio (2009) presenta una tabla donde expone algunas fórmulas de antiderivación (similar al de la Fig. 2) y ejemplos recurriendo a esa tabla. En un segundo plano, el autor resuelve dos problemas donde se requiere el uso de la antiderivada. Ambos corresponden al campo de la física.

En la Unidad V (Integrales) nuevamente se hace explícita la relación entre derivada e integral. Después de presentar la definición de integral definida y una parte del TFC, se expone la integral indefinida, donde se introduce la notación para la antiderivada y se dice que: $\int f(x)dx = F(x)$ significa $F'(x) = f(x)$. Luego de esto, se presenta una tabla con las principales integrales indefinidas, sus respectivos ejemplos recurriendo al registro simbólico y posteriormente algunos ejercicios. Creemos que lo que podría permitir al estudiante concebir la reversibilidad entre la derivada y la integral, es cuando se le pide que después de resolver cada integral indefinida verifique su resultado derivando la función antiderivada que ha encontrado. Con este procedimiento podrá obtener nuevamente la función integrando.

Representaciones alternativas y equivalentes utilizadas en la conexión entre la derivada y la integral; y procedimientos utilizados.

A diferencia de Mora y Del Rio (2009), Stewart utiliza tanto representaciones alternativas: simbólico-gráfico y verbal-simbólico, como equivalentes: gráfico-gráfico y simbólico-simbólico. Estos se presentan en distintos momentos. Por otra parte, en la conexión entre derivada e integral se observa a las: representaciones gráficas, operaciones básicas y, el apoyo en una tabla donde se registran algunas antiderivadas generales como procedimientos para obtener algunas primitivas

Usos de las conexiones matemáticas en la resolución de problemas

El autor sólo presenta como ejemplo dos problemas (ambos en el contexto físico) para apoyar la conexión que nos ocupa. En ese sentido, sólo retomamos el siguiente:

> Una pelota es lanzada hacia arriba con una rapidez de 48 ft/s desde el borde de un acantilado a 432 ft del suelo. Encuentre su altura sobre el suelo t segundos después. ¿Cuándo alcanza su máxima altura? ¿Cuándo cae al suelo? (Stewart, 2010, p. 320).

Se presentan otros problemas en el apartado de ejercicios donde se utilizan las primitivas; sin embargo, todos están en el contexto físico.

Reflexiones finales

A la fecha sólo hemos revisado dos libros (Mora y Del Río, 2009; Stewart, 2010), faltan tres más. De esta revisión, a manera de síntesis tenemos lo siguiente (Tabla 1).

Categorías \ Libro	**Mora y Del Río (2009)**	**Stewart (2010)**
El orden en el tratamiento de los contenidos y conocimientos previos para introducir al Cálculo Integral	Se integra de cinco unidades temáticas. Primero se aborda la derivada y después la integral. En el tema de integral, primero se presenta la definida y posteriormente la indefinida.	El libro se estructura de ocho unidades. Sin embargo, el tema que nos ocupa se presenta en diversas partes del libro. Los temas de Cálculo Diferencial siguen siendo los conocimientos previos para introducir la idea de antiderivada.
La conexión que hacen los textos en la transición del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral.	La conexión se presenta en dos momentos: primero en lo que ellos denominan primer TFC; y segundo, utilizando la noción de primitiva (registradas en una tabla) sin mencionar que implícitamente la idea de fondo es el TFC.	Similar a Mora y Del Río (2009), se utiliza la idea de primitiva y el TFC. El autor resalta en repetidas ocasiones el sentido de reversibilidad entre derivada e integral.
Representaciones alternativas y equivalentes utilizadas en la conexión entre la derivada y la integral.	Se utilizan representaciones equivalentes y sólo referidas al registro simbólico.	Las representaciones alternativas que utiliza Stewart para favorecer la conexión entre la derivada y la integral son: simbólico-gráfico y verbal-simbólico. Las representaciones equivalentes que utiliza son: gráfico-gráfico y simbólico-simbólico. Estos se presentan en distintos momentos.
Procedimientos utilizados.	Se recurre al uso de operaciones básicas (cuando se emplea el TFC) y de una tabla (con primitivas generales) como procedimientos para obtener algunas antiderivadas.	Las representaciones gráficas, las operaciones básicas y, el apoyo en una tabla (que registra algunas antiderivadas generales) son utilizados como procedimientos para obtener algunas primitivas.
Usos de las conexiones matemáticas en la resolución de problemas.	Como ejemplos, se presentan problemas al campo de la economía, administración y finanzas. En la sección de ejercicios, se recurre a problemas de la física, la química, economía, finanzas, entre otros.	Los problemas presentados como ejemplos sólo se plantean en el contexto físico, incluso los que se plantean como ejercicios también son del campo de la Física.

Tabla 1. Resultados de la revisión de dos libros de bachillerato

Los resultados indican que en ambos libros (Mora y Del Río, 2009; Stewart, 2010) se hace explícito la conexión entre la derivada y la integral a través del TFC y la noción de antiderivada o primitiva (Tabla 1). En Mora y Del Río (2009) sólo se utilizan representaciones equivalentes, a diferencia de Stewart (2010) donde también se emplean las alternativas. Destaca también que Stewart presenta la antiderivada en diferentes momentos, en cambio Mora y Del Río (2009) lo hace en una sola unidad (IV), después del TFC y la integral definida. Un aspecto en común es que en ambos libros se plantean pocos problemas donde se favorece la conexión que nos interesa; en cambio, donde se utiliza la idea de integral definida observamos mayor variedad.

La siguiente fase de nuestra investigación es culminar con la revisión de libros de texto; pero creemos que los resultados serán similares. Es decir, prevemos encontrar la conexión entre la derivada y la integral vistos como procesos reversibles mediante la idea de primitiva o utilizando el TFC. Lo único que puede variar es el orden en el tratamiento de los temas, en las representaciones utilizadas, los procedimientos y en los problemas presentados como ejemplos para favorecer la conexión entre derivada e integral.

Referencias bibliográficas

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Tesis de doctorado no publicada. Simon Fraser University. Canadá.

Mora, E. y Del Río, M. (2009). *Cálculo diferencial e integral. Ciencias sociales y económico administrativas.* México: Santillana.

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all.* United State of America: Nacional Council of Teachers of Mathematics:

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y Contextos.* México: CENGAGE Learning.

Autores

Javier García-García; CIMATE, UAGro. México; libra_r75@hotmail.com
Crisólogo Dolores Flores; CIMATE, UAGro. México; cdolores2@gmail.com