

# LOS MATERIALES MANIPULATIVOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS OPERACIONES BÁSICAS CON RACIONALES

*Sara Henao-Saldarriaga, Catalina Navarro-Sandoval, Flor M. Rodríguez-Vásquez*

## Resumen

Desde una perspectiva experimental los juegos son una herramienta que movilizan conocimiento matemático mediante el uso de materiales manipulativos, pero más aún posibilitan transformar las concepciones negativas frente a las matemáticas, causantes de fracasos escolares. Esta propuesta, en curso, pretende intervenir y transformar las ideas negativas que subyacen en los estudiantes de primero de secundaria al momento de aprender matemáticas. Para ello se rediseñarán y se pondrán en escena los juegos de bingo y dominó en los cuales se trabajarán las operaciones aritméticas en el conjunto de los racionales.

**Palabras claves:** perspectiva experimental, materiales manipulativos, números racionales, juegos.

## Introducción

El campo de la *Educación Matemática* en las últimas décadas ha investigado diversas problemáticas que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, parte de estas investigaciones se han dedicado a estudiar una *visión experimental* de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que pone en evidencia el papel constructivista en el aprendizaje, lo cual conduce a aceptar que los estudiantes descubren y adquieren habilidades y conocimientos matemáticos mediante las actividades sociales en las que aprenden (Arce y Pabón, 2012). En consecuencia, desde esta perspectiva la enseñanza de las matemáticas se aleja de la metodología tradicional en la que predomina la trasmisión de información por parte del docente quien es el proveedor de conocimiento y habilidades matemáticas y los estudiantes sus receptores pasivos.

De igual modo, las investigaciones se han interesado por el diseño de contextos matemáticos significativos y auténticos que posibiliten integrar las producciones de los estudiantes con las estructuras y conceptos matemáticos que se van a aprender, en este sentido, es fundamental que los contextos en donde se encuentren los conceptos matemáticos representen la diversidad, complejidad y la ambigüedad de las problemáticas que enfrentan los estudiantes fuera del ambiente escolar.

En esta dirección, Arce y Pabón (2012) señalan que desde una *perspectiva experimental* uno de los contextos que ha cobrado más fuerza en los últimos años es el trabajo asociado con materiales y recursos manipulativos, admitiendo que la manipulación, el trabajo con modelos visuales, esquemas y diagramas pueden constituirse en un vínculo entre las nociones intuitivas de los estudiantes y los conceptos y procedimiento de las matemáticas formales, es así como mediante el uso de los recursos manipulativos se generan actividades similares a las que los matemáticos realizan, constituyéndose esto último en una

característica principal del trabajo con la experimentación. En este sentido, el papel de los estudiantes es análogo al del científico, puesto que el aula de clase es un laboratorio en el que se formula, prueba, construyen modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que deben compartirse con los demás pares y escoger cuales de los resultados son útiles y acordes a la cultura. De aquí que saber matemáticas no se reduce a memorizar definiciones y teoremas, como generalmente se trabaja en la escuela (Ramírez y Tamayo, 2012), sino que es necesario darle un papel fundamental a la formulación de preguntas que surgen en la solución de una actividad matemática.

En esta dirección, el aula de clase se constituye en un escenario para el trabajo experimental en matemática, en el que se vinculan las estructuras matemáticas y las nociones intuitivas de los estudiantes. Ahora bien, los juegos hoy en día, han cobrado una fuerza inusitada dentro de la perspectiva experimental, en tanto que exigen la manipulación de materiales que sirven como vínculo para el aprendizaje de las matemáticas y más aún logran transformar las ideas negativas que surgen en los estudiantes alrededor de esta disciplina.

En esta investigación (en curso) se propone una variación de los juegos bingo y dominó (ver apartado de propuesta) como una estrategia que moviliza el aprendizaje de las operaciones básicas de los racionales, y como herramienta que permite cambiar las concepciones negativas que tienen los estudiantes frente a la clase de matemáticas, conduciendo a los jóvenes a avanzar en sus estudios escolares y a adquirir un conocimiento que tiene sentido para ellos.

El objetivo de esta propuesta es transformar las ideas negativas que surgen en los estudiantes de primero de secundaria al momento de aprender matemáticas, pues generalmente la cultura ha promovido que el campo de las matemáticas es exclusivamente para personas inteligentes, siendo demasiado difícil su comprensión, además de aburridas. Estas y otras ideas circulan en el ámbito escolar y han sido las causantes de diferentes fracasos escolares (Ramírez y Tamayo, 2012), de aquí la necesidad de diseñar estrategias que transformen las anteriores concepciones.

### **Antecedentes**

Este trabajo surge a partir de la experiencia realizada por Ramírez y Tamayo (2012). En esta investigación los autores ponen de manifiesto la necesidad de diseñar estrategias de enseñanza que logren impactar en las ideas negativas emergentes en la cultura alrededor de las matemáticas. Bajo este criterio los investigadores proponen utilizar los juegos como un medio que permite dinamizar la clase y promover conocimiento matemático.

Ramírez y Tamayo (2012) parten de la idea de que diversas investigaciones han señalado que la enseñanza y aprendizaje de las propiedades y operaciones aritméticas mediante una manera formal, deductiva y secuencial, han causado dificultades en los estudiantes, puesto que exige que estos memoricen definiciones, propiedades y algoritmos para las operaciones, sin ningún sentido práctico de ello; conduciendo al desinterés de esta área de conocimiento.

Igualmente, ponen de manifiesto que un alto porcentaje de estudiantes durante su escolaridad, no disfrutan el proceso de aprender matemáticas, esto debido a que los docentes abordan el estudio de esta área de conocimiento mediante una presentación fría, inmutable, lejana, difícil, sin lugar para la creación y eventualmente alejadas de la realidad.

En consecuencia, los estudiantes no se interesan por aprender verdaderamente los conceptos e ideas, sino memorizan de momento para obtener éxito en una prueba.

En busca de una nueva metodología de enseñanza que involucre los aspectos formales de la matemática y a su vez aspectos lúdicos que motiven a los estudiantes, los citados investigadores proponen los juegos como un medio para vincular ambos aspectos, pues el diseño de actividades con juegos posibilita que los estudiantes aprendan conceptos e ideas matemáticas, al tiempo que se divierten y sienten placer mediante la ejecución del juego. En esta vía, argumentan que la discusión que se genera en la resolución de un juego permite que los estudiantes se acerquen a procesos de construcción del conocimiento matemático, logrando de esta manera fomentar actitudes positivas hacia el quehacer matemático. Asimismo Marín y Zomeño (2007) aseguran que el juego es necesario para el desarrollo cognitivo y afectivo del niño, pues favorece la maduración y el pensamiento creativo.

Ahora bien, los investigadores mediante los juegos del bingo y el dominó lograron que los estudiantes trabajaran propiedades y operaciones como la amplificación, simplificación de fracciones, el orden entre números enteros, decimales o fraccionarios, la aplicación de la ley signos, la conversión de un número decimal a fraccionario y viceversa, las operaciones de suma y diferencia, y la solución de polinomios aritméticos y fraccionarios, entre otras. Es importante mencionar que se realizaron algunas modificaciones a los juegos con el propósito de alcanzar los objetivos propuestos, entre estas se encuentra el cambio del conjunto de los naturales al conjunto de los racionales, enteros y decimales, además de algunas reglas que se aumentaron.

La relevancia de este trabajo radica en que la mayoría de las investigaciones sobre la incorporación de juegos en clase de matemáticas argumentan que son un medio para promover conocimiento matemático, olvidando que también impactan en las ideas negativas que pueden tener los estudiantes acerca de la matemática. En esta dirección, Caferino y Cú (2011) señalan que los juegos se constituyen en un medio de comunicación y enseñanza de las matemáticas, pero a su vez posibilita que los estudiantes se sientan motivados en la clase. Igualmente, Arredondo, Grisales, y Quintero (2010) ponen de manifiesto que el trabajo con juegos permite que los estudiantes comprendan las estructuras matemáticas. Sin embargo, en todas estas investigaciones no se estudia el hecho de que los juegos podrían impactar y transformar las ideas negativas de los estudiantes frente a las matemáticas, de aquí la importancia de desarrollar esta propuesta sustentada en la perspectiva instrumental.

### **Contextualización y formulación del problema**

En la actualidad existe un creciente interés en el campo de la Educación Matemática por buscar y diseñar nuevas propuestas de enseñanza que permitan vincular las estructuras matemáticas con los conocimientos informales de los estudiantes, ello se sustenta en la idea de promover unas matemáticas más humanas y menos formales pero, a partir de las cuales el conocimiento matemático cobre sentido para los estudiantes (Font, 2008).

Sin embargo, las numerosas investigaciones no han logrado impactar de manera contundente la enseñanza en las aulas de clase, a modo de ejemplo se puede citar el trabajo alrededor de la enseñanza de las operaciones aritméticas en el campo de los racionales, la cual continua centrada en los aspectos formales, exigiendo al estudiante la memorización

de definiciones propiedades, algoritmos para las operaciones, olvidando los procesos experimentales, inductivos y de lúdica mediante el uso de materiales manipulativos.

En esta dirección, una enseñanza sustentada en los procesos formales de la matemática se constituye en un obstáculo en el aprendizaje de la misma, puesto que no permite que los estudiantes les otorguen un sentido práctico a las matemáticas, convirtiéndose en un campo científico lejano a su cotidianidad, difícil y aburrido. De esta manera, se expone la necesidad de diseñar propuestas de enseñanza que transformen la idea de unas matemáticas sin sentido para los estudiantes, y más aún aburridas y difíciles. Con base en lo anterior la presente propuesta espera dar respuesta a la siguiente pregunta *¿De qué manera los materiales manipulativos en las clases de matemáticas pueden contribuir a la transformación de las ideas negativas frente al aprendizaje de esta disciplina, en el trabajo con las operaciones aritméticas en los racionales?*

Para dar respuesta a esta pregunta se realizará una variación a los juegos bingo y dominó, en los cuales se estudiarán las operaciones aritméticas en el conjunto de los racionales, de tal manera que el uso de materiales manipulativos implicados en los juegos posibilite la transformación de las ideas negativas frente al aprendizaje de las matemáticas.

A continuación se discuten algunos referentes teóricos que sustentan el trabajo con los materiales manipulativos, específicamente se retoman elementos de la *perspectiva instrumental* propuesta por Artigue (2002). Asimismo se enfatiza en la importancia de los juegos en la enseñanza de las matemáticas.

## **Marco conceptual**

### **Perspectiva instrumental**

Numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática se han preocupado por integrar las herramientas (materiales manipulativos, dispositivos electrónicos, las nuevas tecnologías de la información y comunicación) en el proceso de la enseñanza de las matemáticas, al respecto Artigue (2002) propone como una vía la teoría de la *instrumentación*.

Los orígenes de la citada teoría residen en los trabajos de Rabardel (1995) alrededor de su propuesta sobre la ergonomía cognitiva, y de las ideas de Vygotsky de cómo las herramientas influyen en el aprendizaje (Drijvers & Gravemeijer, 2005). En esta dirección, Rabardel (1995) señala una diferencia entre el artefacto o herramienta y el instrumento, argumentando que un artefacto es dado a un participante con la intención de desarrollar una cierta actividad, sin embargo puede no tener sentido para él si no sabe cómo utilizarlo. Ahora bien un instrumento es un artefacto en el que el participante es consciente del uso que se puede dar, es decir crea medios para usar la herramienta con un propósito específico. De este modo, es posible hablar de instrumento en la medida que exista una relación significativa entre artefacto y el participante que lo usa para desarrollar un cierto tipo de tarea.

En el campo de la Educación Matemática, la finalidad es que los estudiantes resuelvan ciertas tareas mediante el uso de herramientas que podrían convertirse en instrumentos a través de un proceso de apropiación que posibilite a la herramienta mediar la actividad. Durante la transición entre artefacto e instrumento, los estudiantes elaboran esquemas

mentales que organizan los métodos de resolución de problemas, los conceptos que hacen parte de la estrategia y los medios para usar la herramienta.

La aproximación instrumental acepta la distinción entre *artefacto* e *instrumento*, pero introduce la categoría de *génesis instrumental*, la cual da cuenta del proceso de surgimiento de un *instrumento*. De esta manera, la *génesis instrumental* involucra tanto el desarrollo de esquemas mentales, como la emergencia y evolución de esquemas de utilización por parte del estudiante. Ahora bien, durante el surgimiento de un *instrumento* es posible identificar dos procesos *instrumentación* e *instrumentalización*. El primero da cuenta de la apropiación del artefacto y de sus propiedades por parte de los usuarios, mientras que el segundo se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte de los estudiantes.

En este sentido, se espera que los juegos de bingo y dominó se constituyan en herramientas que podrían convertirse en *instrumentos* que medien el proceso de aprendizaje de las operaciones aritméticas en el campo de los números racionales.

### **Importancia del juego en la enseñanza de los números racionales**

Investigadores en el campo de la Educación Matemática (Ramírez y Tamayo, 2012) señalan la importancia de buscar nuevas propuestas de enseñanza que permitan vincular tanto las estructuras formales de las matemáticas que se enseñan, como aspectos lúdicos que contribuyan a la gratificación y agrado por partes de los estudiantes al momento de aprender. Logrando de este modo disminuir el fracaso escolar y las ideas negativas frente a las matemáticas.

Una posible vía que permite conectar los aspectos formales de las matemáticas con la lúdica son los juegos diseñados o rediseñados con reglas y propiedades que involucren los conceptos que se enseñan. Desde esta perspectiva, los estudiantes se involucran en actividades que exigen razonar matemáticamente, pero a su vez se divierten solucionando tareas de su vida diaria.

En esta dirección, los juegos no solo se constituyen en herramientas que motivan el aprendizaje de las matemáticas, sino que establecen un desafío para la acción personal y el trabajo en equipo (Ramírez y Tamayo, 2012), puesto que la discusión generada en la dinámica del juego posibilita la construcción de conocimiento matemático y permite un ambiente afectivo y social, en el que la formación integral del estudiante evoluciona.

Desde una perspectiva didáctica es posible afirmar que la evolución de las matemáticas siempre ha estado ligada al juego y la lúdica, esto se sustenta en el hecho de que la mayoría de resultados encontrados en este campo han sido producto de resolver acertijos y problemas ingeniosos.

A continuación se presenta el diseño y las modificaciones realizadas a los juegos de bingo y dominó.

### **Propuesta**

Se retomó el trabajo de Ramírez y Tamayo (2012) en el cual se estudiaron diferentes propiedades de los números racionales y decimales, mediante los juegos de dominó y bingo. Las modificaciones realizadas a los juegos por estos autores se retoman en este trabajo, sin embargo las fichas y las operaciones planteadas en cada juego difieren del trabajo planteado por Ramírez y Tamayo (2012).

## Dominó

La estructura de los dominós clásicos consta de 7 veces el 0, 7 veces el 1, y así sucesivamente hasta llegar a 7 veces el 6, completando 28 fichas de dominó mediante todas las combinaciones posibles de 7 resultados, tomados de dos en dos, y adicionando las 7 fichas dobles. A continuación se presenta el dominó de fraccionarios propuesto por una comunidad de práctica virtual, el cual conserva las mismas propiedades del dominó clásico.

1/8	1/8	1/4	2/16	6/16	4/32	1/2	5/40
1/4	2/8	6/16	4/16	1/2	8/32	10/16	10/40
6/16	3/8	1/2	6/16	10/16	12/32	3/4	15/40
1/2	4/8	10/16	8/16	3/4	16/32	14/16	20/40
10/16	5/8	3/4	10/16	14/16	20/32	1/8	25/40
3/4	6/8	14/16	12/16	1/8	24/32	1/4	30/40
14/16	7/8	1/8	14/16	1/4	28/32	3/8	35/40

Figura 1: dominó de fracciones, sacado de <https://anagarciaazcarate.wordpress.com/category/dominos/>

El juego está propuesto para estudiantes de sexto grado de primaria o primer año de secundaria. Las reglas del juego son exactamente las mismas que la del dominó usual, sin embargo se adicionaran otras con el fin de estudiar las operaciones de suma y resta de racionales.

El juego tiene como propósito general un polinomio aritmético con números racionales, el cual debe solucionarse para encontrar el ganador quien será el que mayor número obtenga en su polinomio. Para ello se seguirán las siguientes normas.

- El juego lo inicia la persona con mayor puntaje con los dados, puede utilizar la ficha que más le convenga para su juego.
- La persona que deje menor cantidad libre que la cantidad que hay libre en el otro extremo del juego, se suma esa cantidad en su polinomio, para el caso contrario deberá restarla.
- La persona que no tenga fichas para jugar, debe restarse  $\frac{5}{2}$  en su polinomio.
- La persona que deje una cantidad igual a la del otro extremo se suma una unidad a su polinomio.
- El juego inicia con un cantidad para cada jugador de una unidad en su polinomio algebraico (16/16 0 5/5).

## Bingo

El juego de bingo que se propone consta de 15 tarjetas (ver figura 2) en las que se encuentran operaciones con números racionales, los resultados que se obtienen de estas operaciones son números del 1 al 15.

Cada estudiante deberá crear su cartón mediante tablas de 3x3 en la que escribirá algunos números del 1 al 15 con bolígrafo para evitar trampas. Las reglas del juego se presentan a continuación

- El juego inicia con todo el grupo de estudiantes.
- Cada estudiante tiene un cartón de bingo.
- El docente es quien dirige el juego y escoge algunos estudiantes para sacar sucesivamente y sin reposición tarjetas.
- Cada vez que un estudiante saca una tarjeta, se escriben las operaciones a efectuar en el tablero, dejando un tiempo para su solución.
- Los alumnos van marcando en sus tarjetas de bingo los resultados que se obtiene al efectuar los cálculos.
- El ganador es la persona que rellene su cartón de bingo.

El juego está propuesto para estudiantes de sexto grado de primaria o para primer grado de secundaria.

$\frac{2}{3} \times \left( \frac{35}{4} - \frac{10}{8} \right)$	$\left( \frac{3}{4} - \frac{2}{8} \right) \div \frac{2}{16} + 2$	$\left( \frac{5}{15} + \frac{17}{3} \right) + 1$	$\left( \frac{15}{4} + \frac{2}{8} \right) \div \frac{1}{2}$
$\left( \frac{35}{4} - \frac{10}{8} \right) + \frac{3}{2}$	$\left( \frac{7}{6} - \frac{3}{9} \right) \div \frac{1}{12}$	$\frac{1}{2} \times \left( \frac{39}{2} + \frac{10}{4} \right)$	$\frac{43}{4} - \left( \frac{5}{2} - \frac{15}{4} \right)$
$\frac{25}{2} - \left( \frac{1}{2} - 1 \right)$	$\frac{29}{2} - \left( 1 - \frac{1}{2} \right)$	$-90 \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right)$	

Figura 2: bingo de racionales, sacado de <https://anagarciaazcarate.wordpress.com/category/dominos/>

## Metodología

Esta propuesta adopta un carácter de *investigación cualitativa*, puesto que permite estudiar la naturaleza de los fenómenos que ocurren en la clase de matemáticas, la estructura dinámica de estos, y posibilita la explicación descriptiva de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro de dichos fenómenos (Martínez, 2006). En esta dirección, la propuesta queda enmarcada dentro de la investigación de carácter cualitativo, la cual pretende fomentar escenarios en los se presente la interacción permanente entre pares y estudiante - docente.

De esta manera y en correspondencia con los intereses de la propuesta, se adopta un enfoque cualitativo de investigación, donde el método de *estudio de caso descriptivo* se presenta como el más adecuado. Para el caso de este trabajo se realizará en un primer

momento una encuesta alrededor de las concepciones que tiene los estudiantes de primero de secundaria sobre la clase de matemáticas y sobre la propia disciplina. En un segundo momento se pondrá en práctica los juegos de bingo y dominó con el propósito de intervenir en las concepciones de los estudiantes. Finalmente se realizará una encuesta con el objeto de estudiar las concepciones que emergen después de la actividad realizada, en particular interesa las asociadas a las matemáticas.

## Resultados

Esta propuesta pretende mostrar que la *perspectiva instrumental* se constituye en un marco teórico adecuado para el trabajo con materiales manipulativos, en tanto que describe el proceso que permite a un *artefacto* convertirse en un *instrumento*, el cual media los procesos de aprendizaje matemático. Ahora bien, los juegos como el bingo y el dominó son materiales que podrían convertirse en *instrumentos* que posibilitan la apropiación de las operaciones aritméticas en el conjunto de los racionales.

En este sentido, el uso de actividades lúdicas que involucran materiales manipulativos no solo contribuye a dinamizar la clase, sino que movilizan conocimiento matemático, en tanto que los materiales se constituyen en *instrumentos* que apoyan los aprendizajes de los estudiantes. De otra parte, el uso de juegos como el bingo y dominó podrían transformar las concepciones negativas de los estudiantes de primero de secundaria frente a las matemáticas, ya que generan un escenario de diversión y placer entre pares. Finalmente, este tipo de propuestas son una vía para disminuir el fracaso escolar y el desinterés por el conocimiento matemático.

## Referencias

- Arce, J., y Pabón, O. (2012). *Laboratorio de Matemáticas como estrategia de acompañamiento al diseño y uso de recursos pedagógicos en la formación de profesores de matemáticas*. Instituto de Educación y Pedagogía Universidad del Valle.
- Arredondo, J., Grisales, A., y Quintero, M. (2010). El juego de la casa de cambio como una estrategia didáctica en la construcción de un sistema de enumeración posicional. *Revista semestral digital*, 1, 14-28.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245–274.
- Caferino, L., y Cú, G. (2011). Materiales lúdicos para aprender y jugar con números con signos. *Revista de la asociación mexicana de metodología de la ciencia y de la investigación*, 1, 62-77.
- Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005) Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. In D. Guin., K. Ruthven and L. Trouche (Eds). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 163-196), Springer.
- Font, V. (2008). *Tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas*. Disponible en <http://www.slideshare.net/cartoni21/tendencias-actuales-en-la-enseanza-delamatematica>. Consultado el 5/09/2011.
- Marin, L., y Zomeño, T. (2007). *Propuesta didáctica de enseñanza a través del juego en las actividades acuáticas*. Disponible en <http://www.um.es/univefd/prodidac.pdf>. Consultado el 12/01/2015.



- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión*, 20, 165-193.
- Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies -approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: A. Colin.
- Ramírez, A., y Tamayo, C. (2009). La enseñanza de los racionales y sus propiedades a través de juegos como dominó y el bingo. *Memorias encuentro colombiano de matemática educativa*, San Juan de Pasto.

### **Autores**

Sara Henao Saldarriaga; CIMATE, UAGro. México; [saramarcelahenao@gmail.com](mailto:saramarcelahenao@gmail.com)

Catalina Navarro Sandoval; CIMATE, UAGro. México; [cnavarros@uagro.mx](mailto:cnavarros@uagro.mx)

Flor Rodríguez Vásquez; CIMATE, UAGro. México; [flor.rodrigez@uagro.mx](mailto:flor.rodrigez@uagro.mx)