

# EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL MEDIANTE EL USO DE ESTRATEGIAS DE PREDICCIÓN

*Jesús Enrique Hernández Zavaleta, Ricardo Cantoral Uriza*

## **Resumen**

Este escrito es parte de una investigación en curso que pretende dar cuenta del carácter determinista del cambio ligado a sistemas con dinámicas aparentemente azarosas, en donde las interacciones de los individuos con éstos darán indicios de una forma de construir conocimiento matemático. El problema de los tres cuerpos tratado por Leonard Euler y el problema de la expresión fenotípica de la *Arabidopsis thaliana* son ejemplos en donde se encuentran presentes este tipo de dinámicas. Las singularidades en las actuaciones de las personas ante este tipo de sistemas serán caracterizadas por dos niveles de constantificación asociados a la variación y la predicción. Mostraremos indicios de la existencia de un principio que se encuentra ligado a estos dos niveles.

**Palabras clave:** cambio, variación, predicción, constantificación, Socioepistemología.

## **Introducción**

Desde hace tiempo la Matemática ha sido vinculada con diferentes disciplinas, comenzando por propuestas teológicas, pasando por la cultura y el arte y proponiéndose fundamental para la filosofía natural. En este sentido, a diferencia de otras áreas, ha permitido una vinculación, hasta cierto punto flexible. Hoy en día se estudian diversos fenómenos a través del paradigma de la Complejidad, para el cual la gran cantidad de elementos y variables en los fenómenos naturales da lugar a dinámicas no lineales que, en algunos casos, presentan cambios erráticos, que imposibilitan la predicción a largo plazo; estas dinámicas son conocidas como caóticas (Prigogine, 1999; Peitgen, Jürgens, & Dietmar, 2004; Shuster, 2005). Sin embargo, es posible abrir posibilidades a estados futuros| cercanos en el sistema, si se realizan las acciones necesarias y suficientes para ello. Se debe resaltar que los comportamientos de cambio y variación de estos sistemas son parte primordial para el desarrollo de esta investigación, debido a nuestro interés en las estrategias y prácticas promotoras de la predicción.

Un ejemplo particular de esta vinculación comienza con Isaac Newton, sentando las bases matemáticas para modelos de la dinámica celeste y proponiendo un programa de investigación que, desde entonces, ha guiado el desarrollo de la Física y la Matemática, conformando teorías sobre fenómenos como el calor, la luz, el sonido, la mecánica de fluidos y, posteriormente, la relatividad y la teoría cuántica, en las que el pensamiento matemático se ha vuelto parte fundamental. De esta forma el cálculo ha servido para el desarrollo de la ciencia y la sociedad, insertado en el sistema educativo como una asignatura del último año en los bachilleratos en México y como obligatoria en niveles universitarios, en la ingeniería y en carreras orientadas a la tecnología. Sin embargo, las investigaciones en Matemática Educativa han mostrado las dificultades que presentan los

estudiantes para la comprensión de los conceptos del análisis elemental, delimitando la problemática ligadas a aspectos como el concepto de límite y las dificultades ligadas a la necesidad de la ruptura con el pensamiento algebraico (Artigue, 1995).

Las perspectivas teóricas que tratan la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo son variadas y tocan la intuición, el rigor, el uso de la tecnología, la formación de profesores y el estudio de aspectos socioculturales, dando pie a la creación de propuestas que intentan facilitar su aprendizaje (Cuevas & Pluvinaige, 2013; Cuevas, 2014). Dentro del aspecto sociocultural la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) propone que el cálculo además de ser una asignatura en la que se combina la intuición con la precisión y el rigor, se asume al cálculo infinitesimal como un objeto cultural, tanto su enseñanza y su aprendizaje no pueden desvincularse de la práctica social que le dio sentido y significado, articulando el estudio de la variación y el cambio insertos. El programa de investigación de *Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar)* de la TSME considera básica la introducción de una visión sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción de conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural y las componentes cognitiva y didáctica (modos de transmisión del conocimiento). Lo que permitirá una investigación orientada a las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral 2013).

El cambio se encuentra presente en el entorno de todo ser vivo, por lo que trabajar con él se vuelve fundamental para sobrevivir; por ejemplo, los procesos adaptativos de las ranas han logrado desarrollar instintos para la percepción del movimiento tomando en cuenta el tamaño de objetos que se aproximan, si es de tamaño grande, supongamos el pie de un ser humano, la rana instintivamente salta y si el objeto es suficientemente pequeño la lengua es la que se activa para la caza de alimento. Análogamente, podemos encontrar un mecanismo que trabaja en los tigres al cazar un antílope en plena carrera, el tigre debe dar el salto justo para atrapar a su presa anticipándose a su posible trayectoria. En estos ejemplos se muestra como se perciben y procesan cambios, para posteriormente analizar su variación. El ser humano, también, se encuentran vinculado con el cambio en diversas situaciones, comenzando con el crecimiento y desarrollo de su cuerpo y el de sus seres allegados; por ejemplo, en los cambios de tono de la voz, cambios de humor y en la percepción de los sabores y sonidos. En otras palabras estamos inmersos en un mundo dinámico, para el cual se requiere de estrategias que le permitan cuantificar los cambios presentes. Si todo ser vivo es capaz de percibir el cambio de forma cotidiana ¿por qué no insertar su estudio en un programa educativo?

El programa de *PyLVar* se encarga del estudio de la evolución y desarrollo del lenguaje y pensamiento alrededor del cambio y su cuantificación. Teniendo como punto original la enseñanza del Cálculo asumiéndolo de carácter dinámico y argumentando que surge como necesidad de saber cómo los fenómenos cambian; es decir, tratando de clarificar fenómenos de velocidad y de acumulación, haciendo énfasis en los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral, 1990; Cantoral & Ferrari, 2004). Esta línea de investigación se fundamenta en el trabajo de Cantoral (1990) en donde se propone y justifica al *Prædicere* como una práctica social compartida por filósofos naturales,

ingenieros, físicos y matemáticos de los siglos XVIII al XX y posteriormente Cantoral y Farfán (2003) sustentan a la predicción en los siguientes términos:

La noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos, pues en ciertas ocasiones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado 1 al estado 2. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad, debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio; de tal forma que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente. (Cantoral & Farfán, 2003, pág. 40)

Recientemente en (Cantoral, 2013) se reúnen y presentan esquemas paradigmáticos que se encuentran asociados a esta noción teniendo, en todos, identificada la aparición de la serie de Taylor reforzando la normatividad que tiene la práctica social del *Prædicere*. La predicción de igual forma que el PyLVar se construye a partir de necesidades y experiencias entorno al contexto social de los individuos, de tal modo que se ha vuelto fundamental para el desarrollo de diversos resultados y conceptos matemáticos que nos permiten anticiparnos, algunos estados, al comportamiento de fenómenos que no son predecibles a largo plazo; por ejemplo, los sistemas caóticos deterministas. Desde un punto de vista complejo suponemos la existencia principios propios de la construcción social del conocimiento que mediante sus interacciones dan lugar a la generación de estructuras de saberes cada vez más complejas. El caso que nos ocupa es la búsqueda de uno de esos principios ( $P^*$ ) que suponemos se encuentra presente en la articulación entre la predicción y las actuaciones de los individuos que intervienen en el sistema que da lugar a singularidades que hacen posible predecir.

### **Momentos de constantificación en la búsqueda de la predicción**

Iniciaremos la caracterización del  $P^*$  vinculado a una *forma de estructurar saberes* que hemos comenzado a vislumbrar por su expresión invariante en las acciones, que llevan a cabo individuos o colectivos, para resolver una situación problemática en la que se encuentra involucrado cierto número de variables que imposibilitan su análisis, resolución y predicción. La situación en la cual iniciamos nuestro estudio es la solución propuesta por Euler (1775) para el Problema de los Tres Cuerpos (PTC) en donde logró proponer las restricciones pertinentes para dar soluciones particulares. En este caso centraremos nuestra atención en la búsqueda de acciones invariantes que nos permitan vislumbrar las singularidades propias de  $P^*$ .

Euler (1775) propone una versión en donde se considera el movimiento de dos masas grandes y el de una tercera que se puede tomar tan pequeña como se quiera y aún en el límite, siempre se ve afectada por las fuerzas gravitacionales de las otras dos. Al considerar la tercera masa casi despreciable logra tratar el problema como uno de sólo dos masas. A este proceso se le conoce como el problema restringido de los tres cuerpos, el cual se resuelve en una y dos dimensiones en configuración colineal y de triángulo rectángulo.

En este sentido el Sol y la Tierra toman el papel de las dos primeras masas y la Luna se toma como el tercer cuerpo de tamaño despreciable, respecto a las primeras. Aunque las soluciones propuestas por Euler son solamente una aproximación a las reales, han sido de gran ayuda en el desarrollo de la Mecánica Celeste de los siglos XIX y XX; además de ser utilizadas en el estudio de movimiento de satélites y naves no tripuladas enviadas a otros planetas. La elección de tamaños de masas adecuados, permitieron a Euler mostrar casos particulares del problema, sin llegar a dar una solución general de él, que permiten vislumbrar una franja de predicción en sus soluciones, en otras palabras, esta forma de actuar lo llevó a la clase de situaciones que promueven la predicción. De esta forma identificamos un antecedente de la expresión de  $P^*$ .

El problema de la búsqueda de la predicción comienza con la determinación de aquellas magnitudes que den una descripción suficiente de las leyes que rigen los cambios y describan satisfactoriamente el fenómeno estudiado, se trata del primer nivel de constantificación que Cantoral describe de la siguiente forma, “con esto queremos decir lo siguiente, de la gran cantidad de variables vinculadas con el fenómeno, se elige un pequeño subconjunto de ellas que efectivamente serán consideradas variables y al resto, la inmensa mayoría, las asumimos constantes” (Cantoral, 1990, pág. 103).

Es importante considerar que la adecuada selección de las variables que describen un fenómeno depende de la experiencia, del sentido e interpretación que se le quiera y del paradigma científico dominante. En todos los problemas ejemplo se enfatiza la búsqueda de dependencias funcionales del tipo:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$

Se debe considerar que en estos casos la relación  $F$  no se expresa necesariamente en términos de flujo, sino que también puede tomar la forma de cambios puntuales discretos. En el caso del problema restringido de los tres cuerpos propuesto por Euler, este nivel se expresa al proponer una configuración adecuada (colineal y de triángulo rectángulo) para la posición de los cuerpos que le permite proponer soluciones para una y dos dimensiones. En un segundo momento se busca reconocer las condiciones iniciales que le permitan determinar los estados estables del sistema, es decir, que le permitan mediante un *Segundo Nivel de Constantificación* sobre las variaciones de las variables una predicción del comportamiento del sistema.

Es en este Segundo Nivel en donde tiene sentido establecer la existencia de diferencias entre los estados del sistema (p. e. diferencias de posición y velocidad, de energía, de estados sucesivos de la iteración en una red, etcétera). En otras palabras, existe la diferencia fundamental:

$$F(x + dx) - F(x)$$

Donde se conoce el estado  $F(x)$  y se desea conocer el estado  $F(x+dx)$ . Tomando la expansión infinita en series de esta diferencia se tiene la siguiente expresión:

$$F'(x)dx + F''(x)\frac{dx^2}{2!} + \dots$$

Dicho lo anterior Cantoral caracteriza al *Segundo Nivel de Constantificación* como sigue:

[...] un segundo grado de constantificación, mediante el cual se pueden suponer constantes o cuasi constantes la inmensa mayoría de las sucesivas variaciones de la variable, y en tal caso se puede, por así decirlo, cortar la serie infinita en algún sitio. (Cantoral, 1990, pág. 107)

En otras palabras el segundo momento consta de deshacernos de los términos que no permiten la estabilidad del sistema, éstos por lo general son los *términos no lineales*, es decir, de orden dos o superior. Estos dos niveles forman parte fundamental de la práctica del *Prædicere* y se proponen como unidad básica para la construcción de conocimiento. De esta forma podemos considerar que más allá de la elección adecuada de las variables del sistema, debemos tomar en cuenta que las condiciones iniciales y las relaciones entre los cambios de las variables son lo que permite determinar estados futuros del sistema.

Nuestra hipótesis sustenta que es en el *Segundo Nivel de Constantificación* en donde  $P^*$  encuentra una expresión contundente de tal forma que en el PTC se expresa al momento de proponer tamaños de masas adecuadas (masa infinitesimal) y en el problema de la predicción climática se expresa como los métodos utilizados para elegir las condiciones iniciales idóneas para alcanzar lapsos de predecibles más amplios. Esta investigación se orienta a la búsqueda de prácticas de referencia en donde se puedan localizar los dos niveles de constantificación y mostrar las singularidades en las actuaciones de los practicantes, que les permiten realizar predicciones sobre su modelo. Las problemáticas que emergen de la práctica interdisciplinaria han sido un instrumento en el cual, se han encontrado las condiciones buscadas, particularmente se han estudiado las producciones escritas de un grupo de biólogos, matemáticos y científicos de la computación sobre redes genéticas.

### **El problema de la expresión fenotípica a partir de sus interacciones genéticas**

El siguiente ejemplo se refiere a las Redes de Regulación Genética (RRG) pertenecientes, principalmente, al ámbito de la matemática discreta, aunque algunas ecuaciones diferenciales pueden ser planteadas. La vinculación entre la Matemática y la Biología se hace presente de tal forma que ambas disciplinas son integradoras de una nueva epistemología que las enriquece proponiendo formas, métodos y lenguajes propios para dar solución al problema que ponen en cuestión.

Particularmente mencionaremos los resultados de la investigación reportados en (Álvarez-Buylla & Benitez, 2011) y (Benitez & Hejátko, 2013) en donde se estudian redes genéticas pertenecientes a la flor *Arabidopsis thaliana* y se propone la interacción y manipulación de la red de tal forma que les permite encontrar configuraciones estables de 5 fenotipos (formas de la flor) de los cuales uno se reporta extinto, tres son formas endémicas del sur del D.F. y del último no se ha reportado su existencia, pero se propone como producto futuro de la evolución de los fenotipos actuales.

### **Primer nivel de constantificación**

En los artículos mencionados se propone la elección de la *Arabidopsis thaliana*, debido al pequeño número de genes que conforman su RRG, así es posible conocer la mayoría de la

interacciones entre ellos. Es importante mencionar que los estados que presenta cada gen, en la red *real*, son un número grande, de tal modo que podríamos equiparlos con la gama de colores existentes; en este sentido y para propósitos de clarificar conceptos en este escrito, llamaremos a estos *genes multicolores*. Es claro que modelar todos los estados de los genes multicolor no es posible, debido a que no se tiene suficiente información sobre todos ellos, por otro lado el poder de cómputo al que tenemos acceso actualmente no es suficiente para almacenarlos y calcularlos. De esta forma los autores proponen una simplificación del modelo en la que los estados de los genes, dependiendo de su acción en la red, sea discreta bicolor o tricolor según sea el caso.

### **Segundo nivel de constantificación**

Posterior a la elección de los estados de los genes virtuales varias han sido las consideraciones que debieron hacerse para que el modelo computacional de la RRG diera resultados acordes con la *realidad buscada*, pero uno que particularmente promovió la estabilidad del sistema fue la decisión de sincronizar la actualización de estados de la red. Esta es una asunción considerada de peso para el modelo, ya que los estado reales de la red presentan una dinámica asíncrona, los autores lo dicen de la siguiente manera:

The state of all nodes in the network is updated simultaneously (synchronous update) in discrete time steps. This is a strong assumption because regulation of the nodes is in fact likely to occur at different rates. [...] **the synchronous update constitutes the simplest assumption. A consequence of this assumption is that only final steady states** (and not transient ones) are informative. (Benitez & Hejátko, 2013, pág. 4)

Este ejemplo ha sido retomado de las publicaciones de los autores y enriquecido por una entrevista realizada a la autora Benítez en donde habló de sus intereses principales en investigación y su forma de trabajo, que según dijo, es beneficiada por la práctica interdisciplinaria entre biólogos, matemáticos, físicos y científicos de la computación. Nuestra hipótesis sustenta que es en el *Segundo Nivel de Constantificación* en donde  $P^*$  encuentra una expresión contundente de tal forma que en el PTC se expresa al momento de proponer tamaños de masas adecuadas (masa infinitesimal) y en el problema de la expresión fenotípica como la sincronización temporal en la actualización de los estados de los genes.

### **Reflexiones finales**

La TSME tiene como tarea fundamental el estudio de la construcción social de conocimiento matemático, bajo circunstancias y aspectos socioculturales específicos, verificando las interacciones entre la epistemología y los factores sociales. De acuerdo al esquema metodológico propuesto por Montiel y Buendía (2012) esta investigación se encuentra en la fase del análisis socioepistemológico en el que se ha comenzado a articular investigaciones como las de Covián (2005) y Yojcom (2013) para la recolección e interpretación de los datos.

En los ejemplos mostrados hemos caracterizado algunos de los mecanismos que hacen posible la expresión en acciones de  $P^*$ . Particularmente en el problema de la expresión fenotípica de la *Arabidopsis thaliana*, la práctica interdisciplinaria juega un papel

trascendental. El análisis de las producciones escritas ha mostrado una estrategia que le permitió a este grupo de investigadores hacer predicciones del fenómeno trabajado.

El estudio de las producciones de grupos interdisciplinarios nos ha permitido ver diferentes facetas de expresión de  $P^*$ , en una segunda fase de la investigación se propone el análisis de escritos de investigaciones en las que se encuentran presentes situaciones que caracterizaremos como “límitrofes” respecto a la forma y posibilidad de predicción, para después poder hacer entrevistas y observaciones a los elementos de distintos grupos de investigación. De esta manera estaremos en posibilidades de proponer líneas de trabajo que incidan en el rediseño del Discurso Matemático Escolar (*rdME*) (Reyes-Gasperini, 2011; Soto, 2012).

Esta investigación se propone de corte cualitativo – interpretativo, tomando de principio la noción de comunidad de práctica propuesta por Wenger (2009); es decir, como una parte integral de nuestra vida diaria y aunque la mayoría no tienen nombre, quienes las conforman lo saben intuitivamente. Como individuos, se puede decir que somos nodos de una red en la que se pueden distinguir interacciones a corto y a largo alcance, con cierto peso que marca la distinción entre las comunidades de práctica, de las que somos parte fundamental y otras de las que solamente somos miembros periféricos.

Por otro lado comenzaremos a estudiar la posibilidad de uso brindada por la metodología de la Teoría Fundamentada (Grounded Theory) GT, para comprender los elementos emergentes de estas interacciones. Esta teoría tiene como dictum “*todo es dato*” (“*All is data*”) (Glaser, 2007), que se refiere a que tenemos la oportunidad y responsabilidad de reconocer y utilizar todas las fuentes de información disponibles en nuestro análisis como esenciales, para explicar el patrón de comportamiento de la comunidad en cuestión. Procederemos a través de series de análisis sistemáticos e inductivos, en los que se incluye una codificación y categorización de acciones, hasta que se da lugar a una explicación del fenómeno estudiado.

Debido a que las acciones relacionadas con el  $P^*$  se encuentran en el marco del PyLVar es necesario integrar al análisis de la situación de profesión un marco que permita vislumbrar sus elementos, de esta forma se utilizará la caracterización propuesta por Cabrera (2009) y Caballero (2012), fijándonos en los argumentos, códigos y estrategias variacionales que allí se expresen y sean propicios para la emergencia de una categoría principal que dé lugar a nuevos constructos teóricos. Cabe mencionar la emergencia de un reto metodológico que implica la propuesta de medios que articulen las nociones propuestas por Wenger (2009), la GT y la TSME de tal forma que nos permitan elaborar medios, lenguajes, conceptos y estructuras para comprender el  $P^*$  inserto en la comunidad con las características descritas.

### **Referencias bibliográficas**

- Álvarez-Buylla, E., & Benitez, M. (2011). Complejidad Genética, Morfogénesis y Transgénicos: Las plantas como caso de estudio. En J. Flores, & G. Martínez, *encuentros con la complejidad* (págs. 116-149). México, UNAM: Siglo XXI.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. . En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (págs. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamerica.

- Benitez, M., & Hejátko, J. (2013). Dynamics of Cell-Fate Determination and Patterning in the Vascular. *PLoS ONE*, 8(5), e63108. doi: 10.1371/journal.pone.0063108.
- Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*. México: CINVESTAV, Tesis de Maestría.
- Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional en el desarrollo de competencias*. México: CINVESTAV, Tesis de Maestría .
- Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de “el Prædicere y lo Analítico”*. México: Tesis de Doctorado, CINVESTAV.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. México: Gedisa.
- Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics* , 6(1), 255-270.
- Cantoral, R., & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica*, 33-70.
- Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. México D.F.: Tesis de maestría, CINVESTAV.
- Cuevas, C. (2014). *El cálculo y su enseñanza*. México: CINVESTAV.
- Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2013). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral: compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa*. México: Pearson.
- Euler, L. (1775). Considérations sur Probleme des Tois Corps. *Opera Omnia*, 194 -220.
- Glaser, B. (2007). All is data. *The Grounded Theory Review*, 1-22.
- Montiel, G., & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación en socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas, & R. Avenilde, *Metodología en Matemática Educativa: Visionesy Reflexiones* (págs. 61-88). México: Lectorum.
- Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Dietmar, S. (2004). *Chaos and Fractals:New Frontiers of Science* (Cuarta ed.). Springer.
- Prigogine, I. (1999). *Las leyes del Caos* (Primera en biblioteca de Bolsillo ed.). Barcelona: Crítica.
- Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor*. Tesis de Maestría, CINVESTAV, México.
- Shuster, H. G. (23 de Agosto de 2005). *Deterministic Chaos: an introduction*. Recuperado el 4 de octubre de 2014, de

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL MEDIANTE EL USO DE  
ESTRATEGIAS DE PREDICCIÓN

*Jesús Enrique Hernández Zavaleta, Ricardo Cantoral Uriza*

<http://onlinelibrary.wiley.com/book/10.1002/3527604804>:

<http://onlinelibrary.wiley.com/book/10.1002/3527604804>

Soto, D. (2012). *Los excluidos por el dME. El caso del profesor de matemáticas en formación*. Memoria Predoctoral, CINVESTAV, México.

Wenger, E. (2009). A social theory of learning . En K. Illeris, *Contemporary Theories of Learning* (págs. 209-218). New York: Routledge.

Yojcom, D. (2013). *La epistemología de la matemática maya: una construcción de conocimientos y saberes a través de las prácticas*. Tesis de Doctorado. CINVESTAV, México

**Autores**

*Jesús Enrique Hernández Zavaleta*; CINVESTAV, IPN. México ; [jherza@gmail.com](mailto:jherza@gmail.com)

*Ricardo Cantoral Uriza*; CINVESTAV, IPN. México; [rcantor@cinvestav.mx](mailto:rcantor@cinvestav.mx)