

SIMULACIÓN DE FENÓMENOS PROMOTORES DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Jesús Enrique Hernández Zavaleta, Vicente Carrión Velázquez

Resumen

Actualmente existen investigaciones que estudian modelos que exhiben dinámicas descentralizadas; por ejemplo, la propagación de una epidemia, el comportamiento de las variables económicas, fenómenos ecológicos y la dinámica de ciudades, entre otros. Este taller pretende que los profesores de nivel secundaria, medio superior y superior utilicen el Software *NetLogo* para modificar los parámetros de un modelo referente a la dinámica de interacción de un grupo de organismos con la finalidad de fomentar la discusión de nociones, que se encuentran intrínsecas en la dinámica, como son la autoorganización, el caos y la estabilidad y son promotoras del principio de la estabilidad del cambio que bien puede ser un modo de pensar y hacer matemáticas que se encuentra en ámbitos intra y extra escolares.

Palabras clave: Modelación, Descentralización, Netlogo

Propósitos y alcances del taller

En el taller se pretende que los asistentes utilicen el software *NetLogo* para modificar los parámetros de un modelo referente a la dinámica de interacción de un grupo de organismos con la finalidad de fomentar la discusión de nociones, que se encuentran intrínsecas en la dinámica, como son la autoorganización, el caos, emergencia de patrones, la estabilidad y la noción de descentralización. En el uso de éstas se pueden vislumbrar acciones en las que se presentan los niveles de *constantificación* mencionados en Cantoral (1990) y (2013) como parte fundamental del desarrollo de la Teoría Socioepistemológica.

También se discutirá y reflexionara sobre una posible caracterización del pensamiento intrínseco a este tipo de sistemas, se analizarán ejemplos de la vida cotidiana que nos lleven a este pensamiento y se verá la pertinencia en el currículo o si se encuentra actualmente en ella. Este taller se ha implementado con estudiantes del Instituto de Educación Media Superior del D. F. México. La mirada de los diferentes fenómenos, a través del paradigma de la complejidad, ha obligado a la emergencia o modificación de técnicas que permitan su entendimiento. Sin duda la matemática normada por el determinismo newtoniano ha provocado que gran parte de los discursos científicos y escolares de la actualidad se presenten, de la misma forma que hacia Newton en sus *Principia*. Sin embargo, en las últimas décadas se ha vislumbrado una crisis de este paradigma, haciendo que una parte de las nuevas generaciones de investigadores se orienten hacia una forma diferente de hacer y pensar las matemáticas (Lesh, 2010).

Un factor importante, que ha influido en esta crisis, ha sido el desarrollo acelerado de los medios tecnológicos alentado la diversidad de formas en el quehacer matemático. En este sentido las computadoras han cambiado la forma de descubrir y utilizar la matemática en la

escuela, dejando de lado la formalidad de las demostraciones; un ejemplo de lo anterior lo podemos encontrar en la propuesta para el estudio del precálculo hecha por Cantoral y Montiel (2013). En este sentido podemos mencionar diversos softwares orientados a los procesos de enseñanza aprendizaje, como CAS, geometría dinámica, Geogebra, entre otros. Para el desarrollo de este taller utilizaremos el software *NetLogo*, que gracias a su interfaz gráfica permite la simulación de sistemas en donde intervienen una gran cantidad de variables.

Marco conceptual

Estudiaremos un sistema que involucra el estudio de muchos actores y sus interacciones. Sabiendo que los actores pueden ser átomos, peces, gente, organizaciones o naciones. Sus interacciones pueden consistir en atracción, combate, acoplamiento, comunicación, comercio, asociación o rivalidad (Axelrod, 1997). Puesto que el estudio de un gran número de actores con patrones de interacciones cambiantes a menudo se vuelve demasiado difícil para una solución matemática, una herramienta primordial para este tipo de investigación es la simulación por computadora. El truco consiste en especificar cómo interactúan los agentes y luego observar las propiedades que se dan al nivel de sociedad completa.

Durante el taller trabajaremos el ejemplo particular de la agregación de una colonia de amebas (*acrasiomicetes*) con un comportamiento particular, mientras en su entorno existe suficiente alimento cada individuo vive de forma independiente deambulando por el ambiente alimentándose. Cuando los recursos comienzan a escasear su comportamiento cambia sorpresivamente y comienzan un proceso de agregación culminando en la conjugación de un ser pluricelular que tiene la capacidad de traslado a sitios donde existen los recursos suficientes para la supervivencia de la colonia. La particularidad de este mecanismo se encuentra en que no existe un líder que oriente este comportamiento (Resnick, 2001). *NetLogo* permite hacer este tipo de estudios ya que es un ambiente de modelación computacional basado en agentes que pone énfasis en un paradigma descentralizado, es decir, no existe un agente explícito que gobierne la dinámica, de tal modo que los comportamientos del sistema provienen de la auto – organización del colectivo. Este sistema fue creado principalmente para realizar simulaciones de fenómenos espacio – temporales pero también su diseño contempló fines didácticos desde su antecesor *StarLogo* que pretendía ser un ambiente virtual para la exploración de la geometría.

La actividad a desarrollar durante el taller mostrará que es ejemplo claro de la Modelación Basada en Agentes (AMB por su siglas en inglés), cuyo objetivo principal es la descripción y predicción del comportamiento de un sistema dinámico simulando la interacción entre sus partes (llamadas agentes), a partir de reglas básicas que le permiten evolucionar en el tiempo, mostrando un comportamiento macroscópico auto-organizado (Castiglione, 2006). Mediante el análisis de la variación de parámetros los participantes podrán intervenir en los posibles cambios en la estructura de los patrones, modificando las condiciones del sistema en tiempo real reconociendo que se necesita llegar a cierto umbral en la población de agentes para que exista la emergencia de comportamientos estructuralmente estables y de esta forma conjeturar sobre los cambios abruptos en la dinámica, caracterizar los puntos de bifurcación y encontrar los parámetros de estabilidad. En ese mismo sentido, en años más recientes, Hurford (2010) y por su parte Lesh (2010) proponen que la complejidad y la modelación, a partir de datos reales son importantes para la cultura del siglo XXI, colocando esta perspectiva como una propiedad intrínseca a la enseñanza y aprendizaje de

este nuevo milenio.

Método

Momento 1

El taller iniciará mostrando el fenómeno dinámico de los organismos “acrasiomicetes”, dando ejemplos de otros fenómenos que se comportan de forma similar. Posteriormente se abrirá y guiará la discusión sobre las nociones de complejidad, autoorganización, estabilidad, la noción de descentralización y predicción, éstas son fundamentales para continuar el desarrollo del taller.

Momento 2

Los participantes se organizarán en equipos para comenzar a discutir las actividades planteadas para el desarrollo del taller, se les entregará material impreso para trabajar “Reglas básicas de un autómata unidimensional” con la finalidad de comprender las nociones de autómata y las matemáticas que se ponen en juego en este concepto, se discuten diferentes ejemplos.

Momento 3

Se continúa con la organización en equipo para discutir las matemáticas detrás del “Autómata celular bidimensional” se resuelven actividades en materiales impresos y se discuten ejemplos vistos en las computadoras.

Momento 4

A cada equipo se le asigna una computadora para trabajar el “Modelo de los acrasiomietes” en NetLogo, se da una explicación breve sobre el funcionamiento de los botones y barras de variación para después realizar las actividades del material impreso y responder las preguntas.

Momento 5

A partir de los resultados obtenidos en las actividades de los momentos anteriores se realiza la discusión final en la que se plantea la pertinencia y funcionalidad de esta matemática y forma de pensar en el currículo y si de alguna forma aparece en él. A manera de cierre se le pide a cada equipo que elaboren un documento, breve, en el que relaten los acontecimientos de esta discusión y resalten los tópicos que les parecieron más importantes para compartirlos con los otros equipos.

Desarrollo del taller

Reglas básicas de un autómata unidimensional

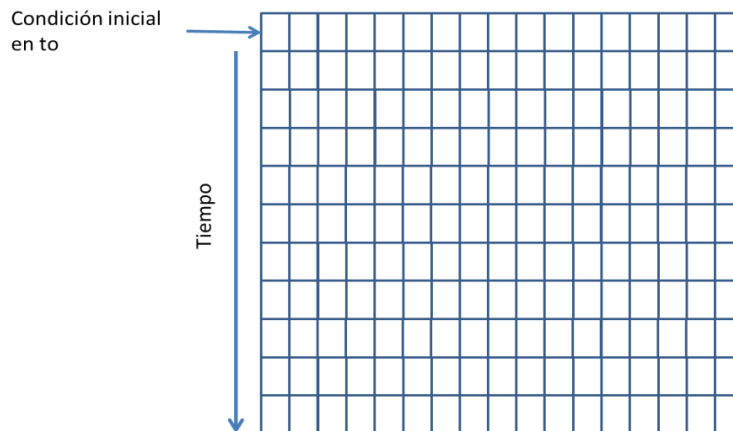
Los Autómatas Celulares (AC) fueron propuestos por Von Newman (1966) como una forma de estudiar los sistemas autorreplicantes. Desde esa época los AC han propuesto una nueva forma de investigar en matemáticas, debido a la presencia de comportamientos complejos provocados por la simplicidad de sus reglas. Los AC han mostrado su flexibilidad para incidir en diferentes aplicaciones para la Física, la Biología, las Ciencias Sociales, además de proveer herramientas para el estudio y desarrollo de la inteligencia y vida artificiales. Por su parte, los fenómenos autoorganizados como parte de la teoría de los sistemas

dinámicos no lineales, han sido de gran importancia para su desarrollo.

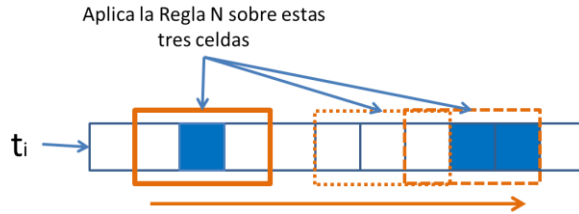
1. Un AC se genera a partir de un conjunto de reglas que especifican lo que se debe hacer en el tiempo siguiente. Una característica importante es que sus comportamientos pueden ser presentados de forma gráfica. Las reglas para un AC tienen la forma $x_i^{t+1} = f(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)$, donde i denota la posición en el espacio y t el tiempo, con $x_i \in \{0, 1\}$.

- ¿Cuántos elementos posibles podría tener el dominio de la función? Escribanlos en una tabla.
- ¿Cuántos elementos a lo más tiene la imagen de la función?
- ¿Cuántas funciones se pueden generar con todos los elementos del dominio y su imagen?
- ¿Cuántas funciones suprayectivas existen?
- Discusión grupal y consenso:** el número de funciones encontradas corresponde al número de reglas existentes, en los AC unidimensionales. Discutan una forma para enumerarlas (Hint: Cambios de base).

Una vez que las reglas de un AC se encuentran definidas, se introduce, una forma de representar, el tiempo y las condiciones iniciales. En la siguiente imagen se muestra que la condición inicial se establece en el primer renglón y el tiempo corre de arriba hacia abajo, la expresión del sistema dinámico se construye en la misma dirección.



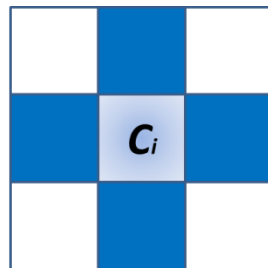
Otro factor importante se basa en, lo que llamaremos, el **corrimiento de ventana**; es decir, para cada tiempo existe un arreglo horizontal y sobre él correrá una ventana de tamaño *tres celdas*, la información en cada arreglo la utilizará para aplicar la *Regla* que se haya escogido, este procedimiento se ilustra como sigue:



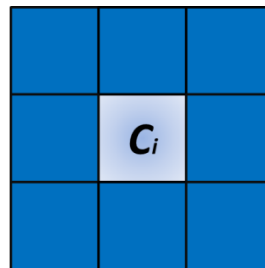
Autómatas celulares bidimensionales

John Horton Conway propuso un juego, utilizando autómatas bidimensionales, que fue publicado y descrito por Martin Gardner en su columna de Juegos Matemáticos de la revista Scientific American (Gardner, 1970). El **juego de la vida**, así lo llamaba, por su analogía con el nacimiento, la muerte y los ciclos presentes una sociedad virtual de “organismos vivos”. Ahora se ha convertido en un ejemplo para la comprensión de dinámicas de AC de dos dimensiones.

A diferencia de los AC 1D, las condiciones iniciales se dan en una latís de dos dimensiones, el tamaño de las *ventanas de corrimiento* es de tres por tres celdas y el tiempo es considerado adimensional. En esta configuración cada celda tiene ocho celdas vecinas, así que se pueden considerar dos formas de trabajar con las vecindades: la primera es la llamada vecindad de Von Newman que considera solo los vecinos que se encuentran al norte, sur, este y oeste de celda C_i y la segunda es la vecindad de Moore (Moore & Langdon, 1968) que considera todos los vecinos de C_i en la siguiente Figura se muestran sombreados los vecinos a considerados.

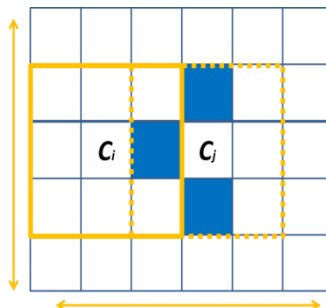


Vecindad de von Newman



Vecindad de Moore

El *juego de la vida de Conway* utiliza la vecindad de Moore, para la actualización de sus estados. Como habíamos dicho el *corrimiento de ventana* se realizará tomando arreglos de celdas de tres por tres con centro C_i , este proceso es ilustrado en la siguiente Figura.



El *juego de la vida de Conway* tiene cuatro reglas básicas, en el cual se define una **celda viva** como una **celda sombreada** y una **celda muerta** como una **celda blanca**.

- a) *Cualquier celda **viva** con menos de dos vecinos vivos muere, a causa de su poca interacción social.*
- b) *Cualquier celda **viva** con más de tres vecinos vivos muere, a causa de sobrepoblación y escasez de recursos.*
- c) *Cualquier celda **viva** con dos o tres vecinos vivos, se mantiene viva en la siguiente generación.*
- d) *Cualquier celda **muerta** exactamente con tres vecinos vivos toma vida en la siguiente generación.*

El modelo de los acrasiomietes

El ambiente virtual *NetLogo* es apto para la programación de autómatas celulares, pero también cuenta con características gráficas y de programación que permiten la manipulación de sistemas con un gran número de elementos (agentes o tortugas). De esta forma el prefijo, en su nombre *Net*, evoca a la modelación de fenómenos con elementos interconectados y de naturaleza descentralizada.

Cuando hablamos de fenómenos descentralizados, nos referimos a sistemas que presentan un comportamiento, visiblemente regular, el cual carece de alguna forma de liderazgo que lo oriente; por ejemplo, los insectos sociales como las hormigas son capaces de construir estructuras, tan complejas y firmes, como sus hormigueros sin necesidad de que exista una “hormiga líder del proyecto”; en realidad, las interacciones simples a corto alcance entre ellas llevan al trabajo comunitario que tiene como consecuencia un comportamiento emergente. Resnick (2001) propone otros ejemplos de estos fenómenos como el vuelo de una parvada, el nado de cardúmenes, el tránsito vehicular, el funcionamiento de algunas instituciones sociales etcétera, mostrando una investigación sobre el desarrollo del pensamiento descentralizado con estudiantes a nivel secundaria en E. U.

Uno de los ejemplos tratados es el fenómeno biológico de los organismos llamados Acrasimietes. Estas amibas, unicelulares, se mueven aleatoriamente buscando bacterias en el ambiente para alimentarse y reproducirse por división celular. Su comportamiento cambia cuando el alimento comienza a escasear, su reproducción se detiene y comienzan a buscar a otras células formando cúmulos de miles de ellas. En este momento su individualidad se pierde y comienzan a actuar como un todo unificado con un único propósito, la búsqueda de comida. Cuando este cúmulo encuentra un lugar adecuado a sus necesidades, comienza un proceso de diferenciación celular, formando un tallo con una masa esférica, que contiene esporas, en su parte superior que posteriormente se rompe liberándolas en el nuevo ambiente como organismos, nuevamente, unicelulares comenzando así el ciclo. La Ilustración 1 muestra el ciclo completo de los Acrasimietes



Ilustración 1 Ciclo vital de los acrasiomicetes. Encerrada en rojo se encuentra fase que se modela en NetLogo.

La Modelación Basada en Agentes (AMB por su siglas en inglés) tiene como principal objetivo la descripción y predicción del comportamiento de un sistema dinámico simulando la interacción entre sus partes (llamadas agentes), a partir de reglas básicas que le permiten evolucionar en el tiempo, mostrando un comportamiento macroscópico auto-organizado (Castiglione, 2006). De esta forma *NetLogo* es el escenario pertinente para la visualización y análisis de este tipo de dinámicas. En la Ilustración 1 se muestra el ciclo completo de los acrasiomicetes y en rojo se resalta la fase donde encontramos la conducta descentralizada, la esencia de nuestro modelo computacional será captar el proceso de agregación de la forma más simple posible. Un dato importante a considerar, es que desde la década de los 70, se ha documentado que las amibas se siguen unas a otras debido a la secreción de un tipo de feromona.

NetLogo considera los siguientes elementos para el modelado:

Agentes: pueden ser hormigas, pájaros, personas, tortugas, etcétera. Son los elementos del sistema que actuarán sobre las parcelas.

Parcelas: las parcelas (celdas) conforman el espacio en donde los agentes interactúan y pueden ser dotadas de propiedades con el fin de proveer un ambiente heterogéneo.

En la Ilustración 2 se muestra a un agente sobre una latís cuyas celdas componen las parcelas.

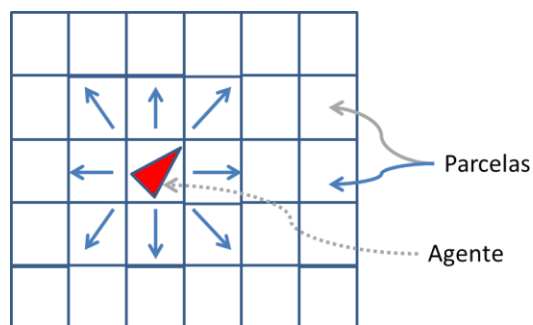


Ilustración 2 Se muestra en rojo a un agente que tiene libre movimiento en las parcelas vecinas.

El proceso de simplificación de las variables se realizó tomando en cuenta aquellas que hacen una mejor descripción de la dinámica global además de tener presentes los alcances y limitaciones del software.

Sobre los agentes (organismos unicelulares)

1. Movimiento aleatorio.
2. Secreción de feromona.
3. Olfateo de feromona (movimiento siguiendo el gradiente de feromona que dejan otros agentes)

Sobre las parcelas

1. La feromona se evapora
2. La feromona se dispersa a parcelas vecinas

Algunos diseños didácticos

Reglas básicas de un autómata unidimensional

Utilizaremos la notación de los AC, en el siguiente arreglo se muestra las asignaciones espaciales (celdas) de los elementos del dominio de f y su respectiva imagen, donde f es alguna de las funciones encontradas en el inciso (c).

x_{i-1}^t	x_i^t	x_{i+1}^t
	x_i^{t+1}	

a) Siguiendo el arreglo anterior, en los cuadros sombreados, escribe la **Regla 254**.

1 1 1	1 1 0	1 0 1	1 0 0	0 1 1	0 1 0	0 0 1	0 0 0

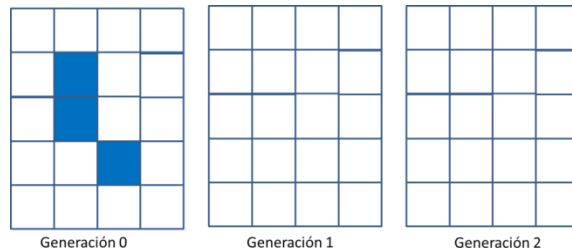
b) Dados los siguientes arreglos, a qué **Regla** corresponden

1 1 1	1 1 0	1 0 1	1 0 0	0 1 1	0 1 0	0 0 1	0 0 0
0	0	0	1	1	1	1	0

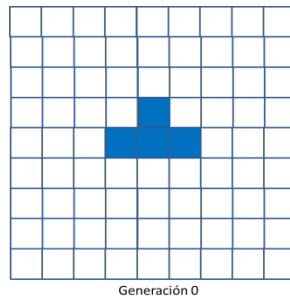
Autómatas celulares bidimensionales

1. Veamos qué pasa con algunos patrones iniciando con organismos compuestos de tres (trinominos) y cuatro (tetranominos) celdas. Aplique la vecindad de Moore a cada arreglo durante tres generaciones (cada arreglo representa una generación).

a)



b) Para la siguiente condición inicial, realice el cálculo de su configuración hasta la cuarta generación.



2. Ahora abra la aplicación *NetLogo* y siga la ruta *Archivo > Biblioteca de Modelos > Computer Science > Cellular Automata* > ahí encontrará el programa llamado *Life*. El programa le permitirá dos modos dar condiciones iniciales al azar o escogerlas. En el modo de escoger corrobore que las condiciones dadas en el inciso anterior llevan a los resultados que obtuvo.

El modelo de los acrasiomicetes

Los parámetros que se considerarán para la simulación del modelo son los siguientes:

- a) Tamaño de la población
 - b) Ángulo de búsqueda (Wiggle angle): se refiere al mayor ángulo de contoneo de un agente al desplazarse. Su valor por default es 40° .
 - c) Promedio direccional (Wiggle bias): cuando Wiggle-bias = 0 el agente se moverá en línea recta. Si Wiggle-bias > 0 el agente tenderá a moverse hacia la derecha y en otro caso tenderá a un movimiento hacia la izquierda. Su valor por default es 0.
 - d) Umbral de olfateo (Sniff threshold): se refiere a la menor cantidad de químico presente en una parcela sobre la que se encuentra un agente. Su valor por default es 1.0.
 - e) Ángulo de olfateo (Sniff angle): se refiere al mayor ángulo de movimiento que realizará un agente, para la búsqueda de la mayor concentración de feromona en sus celdas vecinas. Su valor por default es 45° .
1. Variación sobre el parámetro de población.
 - a) Describan detalladamente, en un escrito, cuál es el comportamiento global de los agentes, si el número de población es menor a 400 y los demás parámetros se mantienen en su valor por default.
 - b) Después de unas 2000 iteraciones, pausen el programa y respondan ¿se llegará a

formar un solo cúmulo? Justifiquen su respuesta.

- c) Utilizando la herramienta *inspect turtle* sigan a uno de los agentes y describan su actuación para enriquecer el escrito anterior.
- d) Lo mismo que a) - c) pero utilizando valores mayores o iguales a 400.
- e) Al hacer variar el parámetro población encuentre el valor o el intervalo en el cual la dinámica cambia significativamente.
- f) El valor por default de ángulo de olfateo, hace que los agentes busquen en tres direcciones: 45° a la izquierda, enfrente, 45° a la derecha. Si se aumentan la cantidad de direcciones para el olfateo; por ejemplo, 90° izquierda, 45° izquierda, enfrente, 45° derecha, 90° derecha. ¿Cómo altera este mejor sentido del olfato la dinámica del sistema? ¿Habrán más o menos grupos? ¿Los grupos tendrán mayor o menor cantidad de agentes?
- g) **Sobre la estabilidad de los cúmulos:** A medida que el andar aleatorio varía se hace interesante la dinámica, los agentes no estarán ligados a los grupos que los unen, hagan variar Ángulo búsqueda y promedio direccional para responder ¿qué pasa si los agentes transitan de un cúmulo a otro? ¿en algún momento la cantidad de cúmulos cambiará? Si es así, de qué forma (incremento o decremента)? ¿Qué es lo que pasará respecto a la estabilidad de los cúmulos si su cantidad incrementa y también cuando decremента? ¿En algún momento podrá existir un cúmulo único?

Consideraciones finales

El software NetLogo es una herramienta tecnológica que nos permite entablar nuevas relaciones con la modelación de fenómenos en los que interactúan una gran cantidad de elementos y promueven comportamientos autoorganizados. La forma en que se explican y comprenden estos fenómenos incide en modos de pensamiento que nos hacen vivenciar nuestro entorno desde otra perspectiva.

Los estados estables en estos sistemas se encuentran en momentos de transición que dependen de valores umbrales en los parámetros elegidos para su modelado. La predicción cobra sentido cuando queremos realizar inferencias sobre el comportamiento, de los agentes, en estados subsecuentes, nos percatamos que los estados inestables lo hacen fuera de lo esperado al no estar acostumbrados a tratar con este tipo de variación. Sin embargo las diferentes configuraciones pueden ser deducidas partir del estudio de los parámetros del sistema, es en este punto donde se pueden vislumbrar los dos momentos de constantificación (Cantoral, 1990) y como entran en juego al realizar diversas acciones para describir estados futuros del fenómeno.

Finalmente cabe señalar que los conceptos de este taller no aparecen de forma explícita en el currículum actual, pero los visualizamos como una propuesta para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en diferentes niveles educativos. Por otro lado se promueve, en los profesores, una mirada de la ciencia y los procesos escolares distinta a la normada por el paradigma newtoniano. Este taller se ha llevado acabo con estudiantes de educación media superior y con profesores e investigadores en el marco de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa número 28 y ha mostrado que la variación de parámetros es parte de las acciones promotoras de la práctica predictiva.

Referencias Bibliográficas

- Axelrod, R. (1997). *La complejidad de la cooperación: Modelos de cooperación y colaboración basados en agentes*. México: FCE.
- Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædicere y lo Analítico"*. México: Tesis de Doctorado, CINVESTAV.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. México: Gedisa.
- Cantoral, R., & Montiel, G. (2013). *Precálculo: un enfoque visual*. México: Pearson.
- Castiglione, F. (2006). *Agent Based Modeling*. Obtenido de http://www.scholarpedia.org/article/Agent_based_modeling
- Gardner, M. (1970). *The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life"* *Scientific American*. Obtenido de http://ddi.cs.unipotsdam.de/HyFISCH/Produzieren/lis_projekt/proj_gamelife/ConwayScientificAmerican.htm
- Huford, A. (2010). Complexity Theories and Theories of Learning: Literature Reviews and Syntheses. En *Theories on mathematic education* (págs. 567-589). Heidelberg, London: Springer.
- Lesh, R. (2010). The Importance of Complex Systems in K-12 Mathematics Education. En *Theories on mathematic education* (págs. 563 - 566). Heidelberg, London: Springer.
- Moore, F. R., & Langdon, G. G. (1968). A generalized firing squad problem. *Information and Control*, 212-220.
- Resnick, M. (2001). *Tortugas, termitas y atascos de tráfico: exploraciones sobre micromundos masivamente paralelos*. España: Gedisa.
- Von Newmman, J. (1966). *Theory if self-reproducing automata*. Chicago, Illinois: Urbana.

Autores

Jesús Enrique Hernández Zavaleta; CINVESTAV, IPN. México; jherza@gmail.com
Vicente Carrión Velázquez; CINVESTAV, IPN. México; vcarrionv@cinvestav.mx