REVISTA EMA
2002, VOL. 7, Nº 2, 171-205

UNA PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS. EJEMPLIFICACIÓN: LOS TRIÁNGULOS, UNA SITUACIÓN DE PRIMARIA

NURIA CLIMENT Y JOSÉ CARRILLO

La utilidad, entendida como función significativa de cualquier proceso de formación y de cualquier tipo de conocimiento, debe ser también vivenciada por el estudiante para maestro[1]*. La propuesta de formación junto con el ejemplo de actividad que se presentan en este artículo, asumen que el conocimiento profesional del maestro, en particular, su conocimiento didáctico del contenido puede construirse a partir de actividades que hagan palpable la vinculación entre su práctica futura, la teoría impartida y las prácticas desarrolladas en la formación inicial. En concreto, los estudiantes tras enfrentarse a una actividad matemática, la analizan tomando datos del desarrollo de tal actividad en educación primaria. En este análisis consideran tanto aspectos de su aprendizaje, del aprendizaje de los alumnos y de la maestra, como características propias de la enseñanza.*

INTRODUCCIÓN

Aunque el calificativo de útil para el conocimiento es habitualmente denostado, pues se asocia a tendencias tecnológicas, no debemos olvidar la necesidad de que el futuro maestro conciba como útil el conocimiento que está construyendo. Es una necesidad natural en toda persona que se involucra en una actividad: percibir o saber que ésta posee alguna utilidad. Ahora bien, tal utilidad no debe entenderse de forma restrictiva —en sentido utilitario, inmediato— sino como algo relacionado con la consciencia progresiva de lo que se está haciendo y en lo que se está invirtiendo tiempo y esfuerzo; así el conocimiento tendrá posibilidad de futura aplicación, pero no sólo por el hecho de que haya habido una capacitación "oficial" para ejercer dicha aplicación, sino porque aporta los elementos profesionales necesarios para el ejercicio digno (*profesional*) de esa profesión. Para que esa consciencia progresiva de la utilidad de su conocimiento no provenga exclusivamente de la reflexión sobre posibilidades futuras, vividas, en el mejor de

1. En este artículo, las expresiones "estudiante" y "estudiante para maestro" se usarán indistintamente para denominar los maestros en formación inicial. El término "alumno" denota los estudiantes de primaria.

los casos, por maestros expertos —lo que es, indudablemente, muy importante—, es necesario que la perciban ya desde sus prácticas durante la carrera; que vean, por tanto, cómo parcelas de su conocimiento profesional se revelan aplicables, útiles, al enfrentarse a un aula de primaria. Sin embargo, la utilidad no es un concepto objetivo; el formador tratará de que sus alumnos perciban y experimenten como útil aquel conocimiento que él mismo así lo considera; es por tanto, un concepto intencionado y orientado.

Con el calificativo de profesional ya se ha definido por varios autores el conocimiento que debe poseer un maestro (sus componentes, dimensiones, tipos, características, etc.). Lo que nosotros ofrecemos es una concreción de parte de ese conocimiento profesional, que incide de forma desigual en unas componentes, unas características y un proceso de construcción. De forma resumida, nuestra propuesta formativa trata de propiciar espacios de construcción de diferentes componentes del conocimiento profesional (Bromme, 1994; Carrillo, Coriat y Oliveira, 1999); está basada en la resolución de problemas, considerada como metodología en la formación inicial y en la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria (Carrillo, 2000a), y en el análisis de situaciones reales de la práctica, con cierto paralelismo con el método de casos (Shulman, 1992; Contreras, 1999).

Podemos agrupar las componentes principalmente en aquellas referidas a conocimientos psicológicos y pedagógicos generales —a la que algunos añaden conocimientos sociológicos—, las que se relacionan con el conocimiento de la materia y las que se vinculan al conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de dicha materia. La diferencia fundamental entre el primer grupo y los otros dos estriba en que aquél es independiente del contenido objeto de enseñanza y aprendizaje. Desde la Didáctica de la Matemática hemos de seguir reflexionando acerca del papel diferenciado de ésta como área de conocimiento en relación con las áreas generalizadoras y progresar en su delimitación. Para ello se hace necesario definir con claridad competencias, actividades y tareas genuinas del área. En el terreno de la formación de maestros, creemos que nuestra propuesta puede contribuir a progresar en la mencionada definición, aportando contenidos y procesos específicos del área. En concreto, se pretende incidir especialmente en la construcción de conocimiento de contenido y de conocimiento didáctico del contenido, de manera integrada, promoviendo su funcionalidad para la práctica futura, así como la percepción de dicha utilidad por parte de los estudiantes para maestro.

FUNDAMENTACIÓN

Conocimiento didáctico del contenido

Numerosos autores han destacado el conocimiento didáctico del contenido como una componente integradora de otros conocimientos, incluso concediéndole un mayor grado de elaboración (Blanco, 1996) e identificándolo, en ocasiones, con el conocimiento profesional (en su totalidad) (Bromme, 1994). También coinciden diversos autores en asociar directamente este conocimiento con el campo de acción de las didácticas específicas (Porlán y Rivero, 1998). Coincidimos en estas apreciaciones, considerando los aportes al conocimiento didáctico del contenido de los futuros profesores como la contribución irremplazable y única que podemos hacer en su formación.

Ahora bien, este conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas, síntesis del conocimiento de la materia y del conocimiento pedagógico general, puede ser entendido —si nos referimos a posiciones extremas— como el que se construye a partir del conocimiento pedagógico general en el proceso de aplicarlo a la enseñanza de un contenido concreto, denominado por Marks (1991), *especificación* del conocimiento pedagógico general; en el otro extremo, puede ser entendido como el resultado de la transformación del conocimiento de la materia en formas que facilitan su aprendizaje, denominado por Marks (1991) *interpretación* del contenido.

La discusión sobre cómo entendemos el conocimiento didáctico del contenido ha sido habitual entre los investigadores de diversas áreas de conocimiento —tanto de didácticas específicas, como de las generalistas— y en general se ha centrado en una posición que se ubica en la línea entre los dos polos que acabamos de comentar. Esta discusión no debe ceñirse sólo al contenido objeto de este conocimiento, pues la toma de postura respecto al mismo o las decisiones relacionadas con él, afectan también su proceso de construcción. Claramente, en el caso de España, la opción tomada por la administración educativa, de un lado, y por la mayoría de las universidades a través de sus planes de estudio, de otro, traducida en el peso que se asigna a las áreas generalistas y a las didácticas específicas, es la de la *especificación*. Esta opción es percibida también por los estudiantes para maestro quienes, al analizar su propia práctica y la de los maestros que ellos observan durante el *practicum*, intentan trasvasar sus conocimientos psicológicos y pedagógicos generales a las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En estas situaciones se percatan de la insuficiencia de dichos conocimientos para interpretar lo que ocurre en el aula y para disponer de herramientas que les permitan aprender de ellas, constatando obstáculos a la hora de progresar en su autonomía profesional. Pero el hecho de que, desde las didácticas específicas, tomemos consciencia de la opción que ha sido adoptada por la administración —evidentemente nefasta para la construcción de conocimiento profesional— no ha de inducir a abandonar nuestro empeño en contribuir a la formación que consideramos apropiada para los futuros maestros. Por el contrario, dado este panorama general y la incapacidad de los estudiantes para obtener un conocimiento rico de la enseñanza y el aprendizaje de la materia por *especificación*, creemos que nuestro papel debe ser el de facilitar conexiones entre el conocimiento pedagógico general y el de la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático, partiendo de una reflexión profunda sobre el conocimiento matemático.

Esta importancia del conocimiento matemático no debe asociarse al peso que éste tenía en la formación inicial de maestros en los antiguos planes de estudio, en los que la reflexión didáctica estaba casi ausente, se entendía el conocimiento de la materia como un fin en sí mismo y se consideraban contenidos nada relacionados con los impartidos en primaria. Ahora bien, pensamos que el efecto pendular que produjo el rechazo a este planteamiento —al poner en boga la marginación del conocimiento matemático en beneficio del general, situación promovida a veces desde las mismas materias de didácticas específicas— debe minimizarse hoy en día, y se debe recuperar el papel concreto y específico de las didácticas específicas, imposible de sumergir en la opción de la *especificación* o en cualquier otra cercana a este polo.

Contribución de la Didáctica de la Matemática

Pero ¿cómo contribuir desde la Didáctica de la Matemática a que los futuros maestros inicien (con los conocimientos de su experiencia como estudiantes) el desarrollo de su conocimiento didáctico del contenido?[2]

Al considerar apoyos teóricos desde los cuales responder a esta cuestión, una idea importante proviene del carácter situado del conocimiento profesional. Al respecto, Brown, Collins y Duguid (1989) refiriéndose al conocimiento en general señalan que en parte, éste es situado como “resultado de la actividad, el contexto y cultura en la que se desarrolla y utiliza” (p. 49).

2. Aunque nos refiramos sólo al conocimiento didáctico del contenido, debido a nuestro interés en destacar una de las componentes del conocimiento profesional del maestro que consideramos más genuina de la Didáctica de las Matemáticas, pretendemos incidir igualmente en el modelo didáctico del futuro maestro respecto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en su conocimiento de contenido, y en sus concepciones sobre la matemática. Todo ello se presenta de manera indisociable en la formación, pero el examen analítico permite separarlos para estudiarlos y hacer legible la investigación en uno de ellos.

El carácter situado del conocimiento profesional, parafraseando a García (1997), no sólo afecta al modo en que se genera, es decir su proceso de construcción ligado a situaciones concretas, sino al modo en el que el estudiante lo conserva. Esto es, el contexto donde se desarrolla el conocimiento entra a formar parte de este conocimiento[3]. Somos conscientes pues, de la idoneidad del planteamiento de situaciones de aula en la formación inicial, verdaderos puentes contextuales entre este período de la formación del futuro maestro y el período de formación permanente. El conocimiento que de estas situaciones se extrae, así como las propias situaciones, entran a formar parte del repertorio de casos, como simples casos y como casos modelo, en tanto elementos del conocimiento estratégico que facilitan y apoyan la intervención en la acción.

Moje y Wade (1997) recogen de diferentes autores, argumentos a favor del método de casos. Citando a Spiro et al. (1987, p. 2), afirman que, a diferencia de las ciencias naturales, la enseñanza constituye un "dominio mal estructurado" caracterizado por ambigüedad e incertidumbre. Así, la enseñanza de casos puede usarse para "ayudar a los futuros profesores a comprender la naturaleza contingente y contextualizada de la enseñanza" (Grossman, 1992, p. 231). Además, los métodos de casos pueden usarse para aplicar la teoría a la práctica o generar teoría de la práctica (Shulman, 1992), una componente particularmente crítica de aprender a enseñar (Kessels y Kothagen, 1996)[4]. De este modo, defendemos la necesidad de la relación dialéctica que debe establecerse, tanto en la formación inicial como en la permanente, entre la práctica simulada u observada y la teoría; así, coincidimos con diversos autores que advierten del uso de los casos como meras anécdotas en la formación inicial, entre los que cabe citar a Llinares (1994) y en particular a Lampert y Ball (1998, p. 78) quienes señalan:

> En ningún dominio se puede confiar en que se produzca aprendizaje simplemente poniendo a los aprendices en contacto con materiales [...] el diseño pedagógico también debe incluir atención intencionada a las tareas y a lo que hace que los estudiantes se impliquen productivamente en los materiales. Esto incluye atención al papel del profesor y a la naturaleza del discurso del aula.

---

3. En el enfoque situado del aprendizaje, el contexto desempeña un papel más relevante que en otros enfoques, en los que se conceptualiza el contexto sólo como elemento motivador.
4. Llinares (1994, p. 171) destaca la naturaleza contextualizada del propio proceso de aprender a enseñar y afirma: "Considerar el proceso de aprender a enseñar como contextualizado en la cultura específica de la matemática escolar, implica trasladar el análisis a concepciones epistemológicas de la cultura matemática escolar, donde los futuros maestros sean aprendices y observadores de la enseñanza."

En este sentido, Leinhardt, McCarthy y Merriman (1995) señalan que:

> […] es necesario articular medios para fomentar la integración de conocimiento y fomentar formas de pensar que son características de contextos diferentes [en la teoría o en la práctica].

Además, según cita Llinares (1998, p. 61), Leinhardt et al. (1995, p. 403). afirman que:

> […] la verdadera integración implica el examen del conocimiento asociado a una situación usando los métodos de reflexión asociados a otras situaciones; debemos por tanto pedir al alumnado que haga abstracción de los detalles concretos para llegar a teorías y principios generales [Krainer (2001) denomina comprensión teórica de la práctica a este proceso]. La tarea precedente a la nuestra, pues, sería permitir al alumnado que convierta en universal, formal y explícito, un conocimiento que a menudo se limita a ser situacional, intuitivo y tácito, y que transforme el conocimiento universal, formal y explícito para usarlo in situ.

En este proceso cíclico teoría-práctica, en el que unos enfatizan el papel de la práctica para extraer teoría (incluso algunos más radicales sitúan el papel de la práctica en las propias fronteras de ésta: la práctica para la práctica), mientras que otros destacan la relevancia de la teoría para comprender la práctica, es interesante la observación de Goffree (1999), quien, de forma no excluyente, pone el énfasis en esta última opción:

> Una reflexión teórica es más que la teoría aislada. La palabra reflexión indica la presencia de una situación, que es observada, reconocida, ponderada y analizada con la ayuda de la propia experiencia y conocimiento. En una reflexión teórica, el educador demuestra cómo la teoría puede ayudar a comprender la práctica. A veces es incluso capaz de hacer predicciones tras observar un fenómeno.

Años antes, Goffree (1993, p. 81), decía:

> Es inconcebible que la observación esté desconectada de la teoría. Aquellos que tienen poca idea teórica no observarán mucho en la práctica educativa.

Existen, pues, diferentes matices teóricos que conducen a distintas propuestas relativas al uso de la práctica como recurso en la formación inicial de profesores. Pensamos que el papel que se concede a los casos en la construcción de conocimiento profesional es extensible al uso de la práctica en dicha construcción. Nuestra propuesta va más allá del análisis de una situación concreta del aula, como la respuesta que un niño da a una tarea encomendada por el maestro, presentando situaciones más complejas, en cierto modo acabadas, como una sesión completa donde no sólo se incluyen las reacciones de los alumnos, sino las interacciones entre ellos y entre ellos y la maestra. Asimismo, mientras en ocasiones los casos están preparados para resaltar elementos muy concretos de la teoría, lo que nuestra propuesta intenta es conectar la teoría con la situación real, y por consiguiente ofrece la posibilidad de que ésta sea interpretada desde distintas perspectivas, resaltando en cada una de ellas diversos elementos teóricos; preservar el realismo de la situación y, por tanto, su complejidad, da más cabida a múltiples conexiones y a una gran riqueza de comentarios.[5]

Nuestra propuesta guarda similitud con lo que Lampert y Ball (1998) proponen como formas de trabajo en la formación inicial para apoyar el conocimiento interpretativo y contextual sobre la enseñanza —excepto en lo relativo al recurso multimedia que se usa en esas formas de trabajo, lo que no significa que menospreciemos el contacto con dichos contextos reales; ellos argumentan que el análisis de grabaciones favorece el desarrollo de múltiples perspectivas de la actividad de la clase y permite el acceso a tipos de conocimiento no disponibles a los estudiantes para maestro en contextos reales:

> Las grabaciones de la práctica en el entorno multimedia ofrece a los estudiantes para maestro oportunidades para examinar visiones de la enseñanza, del aprendizaje, del aula, de los niños, y de las matemáticas, que nunca podrán alcanzar de otro modo. Las herramientas en el entorno les ofrecen la capacidad de acceder y manipular grabaciones que hacen posible considerar cuestiones imposibles en la vida real. (p. 78)

CARACTERIZACIÓN DE LA PROPUESTA

Tareas y secuencia

Con base en los presupuestos anteriormente expuestos extraemos algunas sugerencias de tareas para la formación inicial de maestros respecto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas:

5. En el mismo sentido, se diferencia del análisis inducido por recursos como los del Proyecto *Multimedia Interactive Learning Environment* - MILE (Goffree y Oonk, 1999), en el que se analizan sesiones reales de aula por fragmentos, y donde los estudiantes interactúan con el programa de computador, eligiendo a qué fragmentos dirigirse. No obstante, compartimos con los planteamientos de ese proyecto el realismo de las situaciones presentadas y su detallada descripción.

Análisis del contenido matemático de primaria. A partir de este contenido, reflexionar sobre su enseñanza y aprendizaje, construyendo el respectivo conocimiento didáctico de dicho contenido.

Análisis de situaciones de aula. Tales situaciones de aula pueden ser más o menos fragmentadas, aunque somos partidarios de que muestren de la mejor manera posible la diversidad de factores que intervienen en ellas. Dicho análisis permite incidir en aspectos generales de la enseñanza y el aprendizaje y en el modelo didáctico de los estudiantes. Pero, sobre todo, les permite complejizar sus visiones sobre la práctica con aspectos específicos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, a la vez que con otros del contenido concreto que se aborda.

Simulación de situaciones del aula de primaria en el aula de formación inicial. En tales situaciones, algunos estudiantes para maestro pueden actuar como profesores, otros como observadores críticos de éstos y el resto como alumnos de primaria.

Estudio de investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de tópicos concretos. Son diversos los temas que pueden centrar el estudio —todos ellos contextualizados en situaciones de enseñanza y aprendizaje—, entre ellos cabe citar el uso de recursos, los objetivos que se pretenden lograr, el tipo de actividades, los *obstáculos* de aprendizaje, etc.

Sobre la base de estas sugerencias, hemos elaborado una secuencia particular de actividades para la formación inicial del maestro que concreta lo anterior y puede dar pautas para entender el modelo de formación que defendemos. Por supuesto, entendemos que nuestra propuesta no abarca todo el trabajo que ha de realizarse en dicha formación, ni siquiera en una asignatura completa del área de Didáctica de la Matemática.

1) *Análisis de una situación matemática.* Partimos de que los estudiantes para maestro aborden una situación matemática y discutan su resolución, problematizando el conocimiento que se pone en juego y la realización de la propia tarea. De esta manera parten de una profundización en el contenido y su propio aprendizaje en él, situándonos con respecto a los dos polos relativos a la construcción del conocimiento didáctico del contenido, en una posición más cercana a la de *interpretación* del contenido.

2) *Adaptación al aula de primaria*. Pasamos a que se planteen y discutan la posible adecuación de esta actividad a la educación primaria. Así ponen en juego sus concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la materia (su modelo didáctico de referencia). Además, deben hacer el

esfuerzo de pensar en la actividad desde el punto de vista del alumno de primaria.

3) *Análisis de una situación real.* Finalmente, los estudiantes analizan sesiones reales de clase en las que se ha planteado una adaptación de la actividad realizada con ellos, así como el material realizado por los alumnos. Las sesiones que analizan han sido grabadas en video y se les proporciona su transcripción, en las que se recoge el contexto en el que se plantea la actividad y la descripción de su desarrollo. Asimismo, estas transcripciones contienen fragmentos literales de las intervenciones de la maestra y los alumnos.

Los estudiantes analizan estos datos primero individualmente o en pequeños grupos, para después poner en común su análisis en el grupo de toda la clase. En principio se consensúan algunos aspectos sobre los que se van a fijar en el análisis, procurando que los estudiantes mismos pongan en juego su punto de vista acerca de la situación y aquellos aspectos a los que les otorgan importancia. En la discusión sobre los análisis realizados, ante la diversidad de perspectivas, reflexionamos sobre qué aspectos del análisis de la práctica pueden enriquecer nuestro conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; asimismo, se promueve la superación de análisis simplistas y generales. Vuelven a aflorar los modelos didácticos de los estudiantes, y sus conocimientos pedagógicos generales. Tratamos, además, de incidir sobre aspectos de su conocimiento didáctico del contenido. Precisemos que la construcción de conocimiento teórico sobre Didáctica de la Matemática, como puede ser el conocimiento sobre los niveles de Van Hiele, se hace sobre la base del análisis de documentos entregados al hilo de la reflexión que emana de cada fase del proceso. A estos documentos se añaden los que ellos encuentran en libros y en la red bajo dominios como aprendizaje de la geometría, geometría en educación primaria, recursos didácticos, niveles de Van Hiele, etc.

Características

Durante la secuencia de tareas propuestas a los estudiantes para maestro, es muy importante la discusión, en el grupo de toda la clase, acerca de lo realizado por cada pequeño grupo. Por un lado, poner en común la resolución de la tarea matemática hace que los estudiantes asuman el doble papel de alumnos y profesores respecto a sus compañeros-alumnos. En este punto, insistimos en que actúen siguiendo este segundo papel, que no es el natural para ellos en dicha situación. En el resto de la secuencia propuesta, los estudiantes confrontan su modelo didáctico de referencia y su percepción del proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta confrontación, en ocasiones apasionada, inicialmente desconcierta a muchos y hace que se muestre más compleja y rica la interpretación de una situación de clase. En lo concerniente a la discusión sobre el modelo didáctico, las diferentes visiones de sus propios compañeros mueven más los cimientos de las concepciones de los estudiantes que cuando éstos se ven cuestionados por didactas generales o de materias específicas que, desde su punto de vista presentan un discurso bastante uniformado.

De las cuatro dimensiones que utiliza Krainer (1998, 2001) para describir la práctica profesional del profesor: *acción*, *reflexión* sobre la acción, *autonomía*, y *comunicación* con otros profesionales, en la formación de profesores se concede usualmente más importancia, como lo comenta el mismo autor, a la acción y a la autonomía. La propuesta que presentamos enfatiza la relevancia de la reflexión y la comunicación sin olvidar la importancia de las otras dos. Los estudiantes reflexionan sobre la acción de una maestra, iniciándose de este modo en el hábito de reflexionar sobre su práctica futura. El aula se convierte en un entorno de comunicación[6] entre futuros profesionales, al entablarse una profunda discusión sobre sus visiones, y al cimentar una disposición, deseable en cualquier maestro, hacia el intercambio de perspectivas y conocimiento con sus compañeros.

Entendemos la secuencia de tareas que se proponen como una de las opciones posibles para abordar los objetivos que deben considerarse en la formación inicial. Existen otras posibilidades, como la de iniciar la secuencia presentando la situación del aula de primaria, para que esta situación actúe como generadora del análisis de la actividad matemática desde los puntos de vista ya mencionados. El formador tendrá que sopesar las ventajas de la primera opción que es más dirigida y de esta última secuencia, en función de los elementos de análisis que posean sus estudiantes para maestro y de sus propios objetivos. Hemos procurado presentar una secuencia del primer tipo, debido a que, aunque hemos llevado a la práctica también secuencias del

6. Del enfoque del aprendizaje situado, emerge la noción de *comunidad de práctica*: "Conjunto de relaciones entre personas, actividad y mundo, a lo largo del tiempo y relacionado tangencialmente y de forma superpuesta con otras comunidades de práctica" (Lave y Wenger, 1991, p. 98). Al respecto, Carrillo (2000b) señala que: "Se considera la comunidad de práctica como intrínseca a la existencia de *conocimiento y mantiene el principio* epistemológico de participación en la práctica cultural donde el conocimiento existe […] Una comunidad de práctica alude a la existencia de una práctica y al hecho de que ésta se desarrolla en una comunidad." (p. 101). El grupo de estudiantes para maestro constituye esa comunidad de práctica, en la que podemos considerar también al formador, y que es anticipo (con sus objetos y hábitos de aprendizaje) de la comunidad profesional de práctica, integrada por grupos de maestros e intersectada con comunidades análogas y con las integradas por los mismos maestros y sus alumnos, todas dentro de la comunidad educativa.

último tipo, no se ha realizado con la sistematización requerida para su comunicación.

En el siguiente apartado desarrollamos un ejemplo de una de estas secuencias, esforzándonos por presentarlo con el máximo nivel posible de concreción, para su análisis desde *lo que se hace en realidad* en el aula de formación de maestros. La situación real de enseñanza de la que hacemos uso en este ejemplo ha sido obtenida de nuestra participación en un proyecto de investigación con un grupo de maestras de primaria preocupadas por su práctica. Como fruto de esta colaboración, disponemos de grabaciones de video y material elaborado por los alumnos y las maestras durante dichas sesiones (fichas de clase de los niños, pruebas, diarios y programaciones de la maestra).

Estas grabaciones recogen los intentos de las maestras por actuar en su práctica siguiendo modelos no tradicionales. A esto se añade su experiencia y su conocimiento práctico. Todo ello hace que las sesiones grabadas puedan servir de base para la creación de entornos ricos para el aprendizaje de nuestros estudiantes. En este sentido, Goffree, Oliveira, Serrazina y Szendrei (1999) se refieren a *paradigmas de buena práctica*, como ejemplos, casos u observaciones que muestren un alto grado de saber pedagógico y didáctico, práctico y teórico. Estos paradigmas

> deberían ser considerados como un rico recurso para los estudiantes para maestro, en los cuales pueden encontrarse muchas buenas razones para aprender lo esencial de la profesión. (p. 156)

Cuando pensamos en la adaptación de las situaciones trabajadas en el proyecto de investigación, no estamos pensando sólo en las situaciones de enseñanza o los casos que se pueden extraer mediante la transcripción de partes de estas situaciones que se consideren relevantes. Las situaciones han sido tratadas igual que en el proyecto: son las inspiradoras de las cuestiones que se plantean, las que pueden ir desde el análisis de una actividad propuesta, la actuación de la maestra, las dificultades manifestadas por los niños o el tratamiento de los contenidos matemáticos tratados, hasta el planteamiento de otros “problemas” matemáticos o didácticos que profundizan en aspectos que parecen ponerse de manifiesto en las situaciones observadas. La resolución de problemas matemáticos jugará un importante papel tanto en el abordaje del conocimiento de y sobre matemáticas, como en el de las concepciones de los futuros maestros sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Se da lugar así a la discusión sobre la potencialidad de la resolución de problemas como enfoque metodológico en primaria.

Al igual que se usa el material propio de la práctica de estas maestras, se pueden usar situaciones de aula de numerosas investigaciones, fundamentalmente de estudios de casos. Así, los resultados de tales investigaciones cumplirán una de sus principales funciones, tan resaltada pero no aprovechada con toda su potencialidad: contribuir a la reflexión de otros profesionales, maestros o futuros maestros sobre su propia práctica, y a la reflexión de los propios formadores de éstos.

EJEMPLO: LOS TRIÁNGULOS

Al desarrollar este ejemplo presentamos una secuencia de trabajo concreta para la formación de maestros que ilustra la propuesta antes descrita. Además, los resultados del análisis de su puesta en práctica enriquecen nuestras reflexiones y suministran al lector más datos para reflexionar sobre su conveniencia.

La secuencia de trabajo mencionada consiste de las siguientes fases: abordaje de una cuestión de contenido matemático, análisis de la misma como actividad de clase, reflexión sobre el aprendizaje de los niños, análisis conjunto de la situación de enseñanza-aprendizaje y de los temas que de ella surgen concernientes al conocimiento profesional.

Describiremos una situación para la formación inicial inspirada en un episodio real de enseñanza que fue grabado en video. Lo que a continuación presentamos combina el desarrollo de la situación con nuestras reflexiones sobre dicho desarrollo.

Análisis de la situación matemática

Planteamos a los futuros maestros la siguiente actividad, que se trabajó en grupos en el aula. Todos los grupos dispusieron de una trama de puntos en una hoja de 29 x 42 centímetros (formato A3). Cada grupo debía recoger sus conclusiones para después ponerlas en común.

> Dada una trama de puntos rectangular, como la que se entrega, dibujar triángulos diferentes, teniendo en cuenta que no se consideran diferentes dos triángulos isométricos o ampliaciones o reducciones de un mismo triángulo.

Pasado el tiempo que se consideró pertinente para la realización de la tarea dada su extensión, unos 25 minutos, y teniendo en cuenta la manifestación por parte de los estudiantes para maestro de que habían terminado de hacer la tarea, es decir disponían de un número suficiente de triángulos, se llevó a cabo la puesta en común, la cual abarcó varias sesiones. En la puesta en común se abordaron, entre otros, los siguientes aspectos: criterios para buscar

Cuestiones a tratar
I. Metodología de las sesiones 1. Papel de los alumnos 2. Papel del maestro 3. Papel del libro de texto: bondades e inconvenientes
II. CDC (desde el punto de vista de la enseñanza) 1. Geoplano y trama de puntos rectangulares: restricciones, ventajas e inconvenientes. 2. Materiales alternativos: geotiras, geoplano o trama triangulares 3. La medida en la trama de puntos y/o el geoplano: unidad de medida natural y unidades externas. La enseñanza de la medida. Instrumentos y unidades de medida. Limitaciones de los instrumentos de medida. La medida de ángulos. Comparación y medida 4. Clasificación de figuras: criterios de clasificación. Clasificaciones constructivas y deductivas
III. CDC (desde el punto de vista del aprendizaje) 1. Potencia de la definición y de las imágenes asociadas (definición del concepto frente a imagen del concepto) 2. Triángulos “prototípicos” (reduccionismo conceptual) 3. La “atracción” de la vertical y la horizontal 4. Modo natural de comparar magnitudes: largo/corto, grande/chico 5. Dificultades con la medida en la trama o/y el geoplano 6. Los niveles de Van Hiele 7. Dificultades con el concepto de ángulo 8. Coherencia interna de los errores de los alumnos
IV. Conocimiento de matemáticas 1. La/s base/s y la/s altura/s de un triángulo 2. Clasificaciones jerárquicas e inclusivas. Compatibilidad de las clasificaciones de triángulos según sus lados y según sus ángulos. Otras clasificaciones 3. Ángulos. Medida de ángulos 4. Longitudes de los lados con los que se pueden construir triángulos 5. Heurísticos: el tanteo sistemático
V. Conocimiento sobre matemáticas 1. La demostración y la refutación. Valor de los ejemplos y los contraejemplos. Falsas generalizaciones. Validez de los dibujos en las demostraciones
VI. Discusión desde el punto de vista de la resolución de problemas 1. Situaciones abiertas y cerradas 2. Problemas de “buscar” (p.e., clasificaciones) 3. La resolución de problemas como enfoque metodológico. Papel del profesor
VII. Potencialidad y adecuación de la actividad

Tabla Nº 1.

triángulos diferentes; tipos de triángulos que se obtienen (en qué reside su diferencia, compatibilidad de las clasificaciones según los lados y según los ángulos); procesos para comprobar la igualdad o no de la longitud de los lados (comparar, medir: instrumentos de medida no convencionales y unidad de medida en la trama y "falsas unidades"); definición conceptual e imagen conceptual de la/s base/s y la/s altura/s de un triángulo, y coherencia de los errores de los estudiantes; los ángulos y su medida; tendencia a la horizontalidad y a la verticalidad; por qué la trama de puntos no permite la construcción de triángulos equiláteros.

Los anteriores son aspectos del conocimiento de y sobre matemáticas y del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) que subyacen a esta actividad (ver en la Tabla Nº 1 de la página anterior, las filas II.1, II.3, II.4, III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.7, III.8, IV.1, IV.2, IV.3, IV.5, V).

Pasamos a comentar algunos de estos aspectos. Las naturales limitaciones de la extensión del artículo imposibilitan abordar todos.

Conceptos de base y altura

La puesta en común se inició exponiendo las realizaciones de los grupos en la pizarra. Se observó una fuerte tendencia a hacer coincidir uno de los lados con una línea horizontal y en menor medida, con una línea vertical[7], y en particular, muchos estudiantes identificaron la base con una línea horizontal y la altura con una línea vertical. Este hecho motivó la discusión sobre el concepto de base y de altura de un triángulo, la cual se enriqueció, por algunos casos límite que surgieron.

El estudiante que construyó el triángulo que se muestra en la Figura Nº 1 consideró como base el vértice inferior, porque es la única parte del triángulo que pertenece a la línea horizontal —donde se apoya el triángulo— y como altura del triángulo el lado vertical.

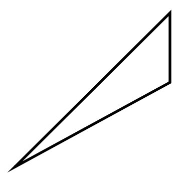


Figura Nº 1.

En el caso del estudiante que hizo los dibujos de la Figura Nº 2 (casos (a) y (b)), la vinculación de la altura con una línea vertical y de la base con una línea horizontal se mantuvo; sin embargo, aparecieron signos diferentes. En la Figura Nº 2 (caso (a)) consideró como base sólo el segmento horizontal discontinuo. Cuando se hacía girar el triángulo hasta alcanzar la posición de la Figura Nº 2 (caso (b)), procedía del mismo modo, indicando que la base estaba en una línea horizontal, aunque ésta no correspondiera con ninguno

7. Azcárate (1997) relaciona esta tendencia con el trabajo en los ejes coordenados y el uso habitual de la altura, entre otras razones.

de los lados del triángulo. En ambos casos, consideraba la altura como el segmento vertical trazado desde el vértice más alejado de la base. Podemos apreciar, pues, que junto al poder de la línea horizontal y la vertical (el concepto que pone en juego de altura corresponde con el concepto físico: elevación respecto de la superficie de la Tierra), existe gran dificultad al usar figuras auxiliares como tales: los triángulos rectángulos que se obtienen al aplicar el concepto de altura alcanzan un nivel de significación tal que llegan a reemplazar a los originales. Asimismo, este estudiante conjeturó que todo triángulo tendría infinitas alturas y bases; al preguntarle por la relación $b \times h$, dijo que se mantendría constante.

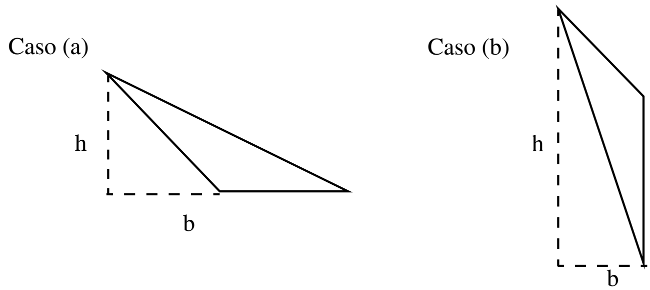


Figura Nº 2.

Se le propuso como tarea demostrar esta afirmación; su argumento consistió en lo siguiente (ver la Figura Nº 3): dibujó un triángulo acutángulo con un lado en una línea horizontal, en el que señaló dicho lado como base, y la altura correspondiente; a continuación, fue dibujando giros de éste triángulo considerando siempre la base anterior en una línea horizontal o en una vertical, lo que le llevó a mantener también la altura en una línea horizontal o vertical y su longitud, y por tanto, también su producto.

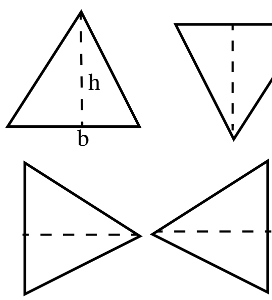


Figura Nº 3.

Observamos una idea de demostrar bastante extendida entre los estudiantes: aportan unos ejemplos sin estudiar al menos, su carácter paradigmático; son ejemplos que sólo sirven para reforzar puntualmente la tesis, ya que son casos muy particulares. Por otra parte, el argumento usado por el estudiante es inapropiado incluso dentro del caso particular en cuestión, pues no pone de relieve la constancia del producto $b \times h$, sino que usa siempre la misma base y altura, sólo que en diferentes posiciones. Además de no mostrar la existencia de infinitas bases y alturas, estos dibujos muestran inconsistencia con la caracterización de altura que se extrae de los dibujos de la Figura Nº 2. Suponemos que dicha caracterización ha sido fruto de la necesidad de adaptar la conceptualización de la altura a los triángulos no acutángulos, lo que le llevó a poseer dos imágenes conceptuales distintas, cada una de ellas aplicables a un conjunto distinto de triángulos y ambas asociadas a la misma definición conceptual.

Se instó a otro estudiante, tras manifestar que no estaba de acuerdo con lo ilustrado en la Figura Nº 2, a que desempeñara el papel de maestro del estudiante anterior. Su intervención se redujo a decir que estaba en desacuerdo y a mostrarle su concepto. Así, el estudiante-maestro dio su definición de altura (convencional) y la dibujó en varios triángulos correctamente, entre ellos, los casos (a) y (b) de la Figura Nº 2. Sin embargo, en un triángulo rectángulo dibujado con sus catetos en las líneas horizontal y vertical, su solución fue la siguiente:

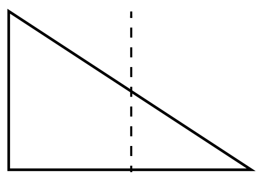


Figura Nº 4.

No sólo no hizo coincidir la altura respecto al cateto horizontal con el vertical, sino que introdujo la condición de pasar por el punto medio del lado. De este modo, la correcta definición del concepto de altura coexiste con una imagen errónea del concepto (Tall y Vinner, 1981), probablemente propiciada por la escasez de ejemplos parecidos a los de la Figura Nº 4 que se abordan durante las etapas educativas anteriores (esta escasez induce una especie de *reduccionismo conceptual: merma de la imagen conceptual debida a la asociación del concepto a un limitado tipo de ejemplos* (Carrillo, 1999)). Para el estudiante es una idea chocante que dos segmentos notables del triángulo, lado y altura, coincidan, toda vez que la altura no pertenece generalmente, al conjunto formado por los lados, lo que sí ocurre con la base. Interpretamos que la condición impuesta de pasar por el punto medio del lado puede deberse a la significatividad de este punto frente a los demás del mismo segmento (tendencia a la simetría). Aunque también podría deberse a una confusión con la definición (incorrecta) de mediana o con la de mediatriz[8], pensamos que es poco probable, pues no se produce tal confusión en los demás ejemplos. Por el contrario, el estudiante que elaboró los triángulos de la Figura Nº 2 trazó la altura del triángulo presentado en la Figura Nº 4, correctamente, ya que trató siempre de trabajar con triángulos rectángulos en posición "natural" (base horizontal y altura vertical).

Otro estudiante también actuó como maestro del segundo estudiante mencionado (cuyo trabajo se ve en la Figura Nº 2). Argumentó que los dibujos de la altura de tal estudiante no eran posibles, porque sabía que las alturas de un triángulo se cortan todas en un mismo punto, algo que no permitían los dibujos elaborados en la Figura Nº 2. Esto pone de manifiesto el uso del esquema conceptual (Tall y Vinner, 1981) de altura, que además de las imágenes mentales ligadas al concepto incluye todas las propiedades asociadas o derivadas de éste, como la aplicación de la existencia del ortocentro (Azcárate, 1997).

En ambos casos los estudiantes-maestros actuaron sin efectuar un análisis de la resolución del segundo estudiante. Este hecho puede estar causado por la combinación de una escasez de recursos explicativos, de la pobreza de su construcción personal del concepto y de lo que han vivido a lo largo de sus diversas etapas educativas. Con esto último nos referimos a una concepción del error como obstáculo para el aprendizaje que es preciso erradicar cuanto antes. Es frecuente encontrar a maestros que en lugar de explorar las razones de la resolución de un alumno, se limitan a etiquetarla como correcta o incorrecta exclusivamente con referencia a una resolución dada (la correcta). En la discusión en el aula de formación inicial sobre las resoluciones de los estudiantes para maestro, se incide en su toma de consciencia sobre el papel asumido ante el error de sus alumnos hipotéticos. Además, se hace hincapié en que intenten interpretar comprensivamente el conocimiento que ponen de relieve sus compañeros. Éste es uno de los propósitos hacia los que se dirige el análisis de las situaciones antes comentadas.

Inexistencia de triángulos equiláteros en la trama

Se prosiguió la puesta en común observando otros dibujos de los dados en la trama de puntos. Algunos grupos habían obtenido en ella, triángulos

8. La confusión de la altura con la mediana y la mediatriz entre alumnos de Magisterio, así como otros obstáculos y errores asociados al concepto de altura, han sido estudiados, entre otros, por Gutiérrez y Jaime (1996).

equiláteros, incluso triángulos equiláteros rectángulos (ver Figura Nº 5). Cuando se advirtió que otros estudiantes discrepaban en esto, se analizó la longitud de cada uno de los lados y se discutió sobre la unidad de medida. La tendencia natural de los estudiantes fue comprobar midiendo con regla, lo que condujo en la mayoría de los casos a poner de relieve la desigualdad de los lados de los supuestos triángulos equiláteros. Sin embargo, en otros casos las longitudes eran muy cercanas y se hizo necesario emplear una herramienta matemática más potente, como el teorema de Pitágoras; ahora bien, para que la aplicación de este teorema suponga una diferencia significativa con el procedimiento aproximado de medición directa, es preciso que se utilice la unidad de medida intrínseca a la trama, es decir, la distancia horizontal o vertical entre dos puntos consecutivos. En esto aparecieron de nuevo algunos errores, como la confusión entre la longitud de un segmento y el número de puntos de la trama que contiene; de esta forma, se confunde contar con medir (punto con segmento unidad) y no se conserva la propiedad básica de suma de longitudes: la suma o unión de dos segmentos debe ser igual a la suma de las longitudes de estos dos segmentos. Asimismo, esos estudiantes identificaron la longitud de la diagonal del cuadrado unidad, con la longitud de su lado, pues ambos contienen el mismo número de puntos de la trama. Aunque en menor medida, otros estudiantes llegan a hacer coincidir las longitudes de diagonales no paralelas por el hecho de contener el mismo número de puntos de la trama.

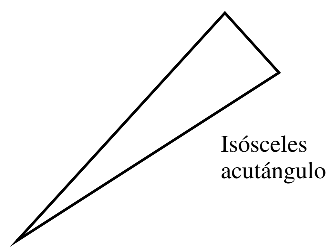
Este triángulo, identificado como equilátero rectángulo por algunos alumnos, posee 7 puntos de la trama en cada uno de sus lados. Su lado oblicuo está sobre la diagonal principal

Los lados de este triángulo, identificado como equilátero acutángulo por algunos alumnos, son hipotenusas de los triángulos rectángulos cuyos catetos (en posición horizontal-vertical) se describen a continuación: 2 puntos, 7 puntos (lado inferior); 5, 6 (lado superior derecho); 3, 7 (lado superior izquierdo)

Figura Nº 5.

Estos asuntos fueron los que surgieron en la discusión entre los estudiantes para hacer explícito que los supuestos triángulos equiláteros no eran en realidad equiláteros. La puesta en común condujo de esta forma a comparar sus procedimientos con los de algunos niños que miden con la regla contando las marcas enteras, incluyendo el 0; asimismo se discutió la conveniencia de la unidad natural de la trama frente a la convencional y la compatibilidad de ambas, así como el hecho de que aunque cambiemos la unidad de medida, los segmentos como tales no varían, sólo su medida y por tanto, siempre puedo compararlos (incluso si prescindimos de unidad de medida). El uso de las unidades convencionales se muestra tan fuerte que muchos alumnos, tras contar el número de veces que un lado contiene el segmento unidad, en lugar de dar este número como medida, lo usan para multiplicarlo por la distancia en milímetros entre dos puntos consecutivos de la horizontal de la trama (la medida natural de la trama).

A la discusión anterior se añadió la reflexión sobre la imposibilidad de que un triángulo equilátero sea rectángulo, así como otras condiciones de construcción de triángulos, como por ejemplo, el hecho de que en un triángulo rectángulo, la longitud de los tres lados no puede ser igual (ver Figura Nº 6).

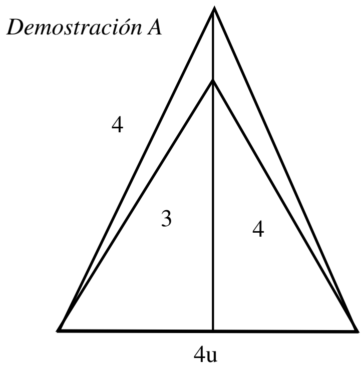


Los lados que confluyen en el vértice superior están sobre diagonales principales; el más largo contiene 5 puntos de la trama, y el más corto, 2. El tercer lado corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos (horizontal-vertical) con 4 y 6 puntos, respectivamente.

Figura Nº 6.

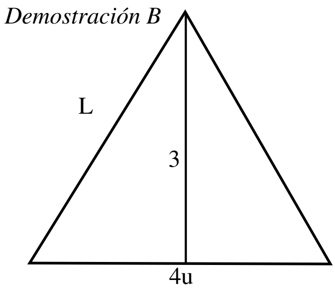
También se observó la dificultad en reconocer ángulos rectos en posiciones no habituales, como es el caso del triángulo de la Figura Nº 6, donde el ángulo recto coincide con el ángulo superior del cuadrado inscrito en un cuadrado cuyos lados tienen longitud de dos unidades, en la cuadrícula.

Como colofón de la puesta en común sobre tipos de triángulos, se abordó la imposibilidad de dibujar triángulos equiláteros en la trama[9]. Tras constatar que nadie había podido dibujarlos correctamente, algunos estudiantes conjeturaron que sería imposible obtenerlos en la trama; esto llevó a proponer la tarea de investigar la posibilidad de dibujarlos. Un estudiante dijo que poseía dos demostraciones, que se describen a continuación (véase Figura Nº 7 y Figura Nº 8).



Si uno de los lados está sobre la horizontal (análogamente vertical), su longitud ha de ser un número par (para que el vértice opuesto coincida con un punto de la trama). Supongamos que es 4. Entonces la longitud de la altura podría ser 3 o 4. Aplicando el teorema de Pitágoras, la altura sale, sin embargo, $\sqrt{12}$, que es un número irracional distinto a 3 y 4.

Figura Nº 7.



Con longitud de base 4, si fijamos en 3 la longitud de altura, que es la que más hace que el triángulo de esta figura se parezca a un equilátero, se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras, el valor $\sqrt{13}$ para L, que es irracional y distinto de 4.

Figura Nº 8.

Muchos otros estudiantes arguyeron que no son válidas las demostraciones porque puede no haber lados en la horizontal o en la vertical, lo que sugiere que para estos estudiantes no existía restricción por el hecho de haber empleado una medida concreta para el lado horizontal. Una vez que se decidió centrarse de momento en el caso de que algún lado esté sobre la horizontal o la vertical, pasamos a analizar la validez de las demostraciones *A* y *B*. Su

9. Previamente se les había pedido a los estudiantes que analizaran qué tipo de números podían obtenerse como longitudes de segmentos de la trama, habiéndose llegado a la conclusión de que las posibles longitudes corresponden a números naturales o números irracionales como raíces cuadradas de la suma de dos cuadrados perfectos.

autor las veía análogas, lo que nos lleva a pensar que en *A* no estaba tomando el carácter irracional de la altura, sino el hecho de no salir 3 ni 4. Si se hubiera fijado en que la altura sale irracional, contraviniendo el hecho de que la altura de un triángulo así dibujado coincide con un segmento vertical entre dos puntos y es por consiguiente, natural, no habría visto semejante la demostración *B*, ya que el lado sí puede ser irracional. Dos estudiantes se percataron de esto y le sugirieron que en la demostración *A* hiciera uso de esa contradicción.

El autor de *A* y *B* añadió que, aunque éstas no eran demostraciones generales, mostraban un procedimiento aplicable a cualquier triángulo. Esto dio pie a discutir la diferencia entre demostración y procedimiento concreto aplicable en cualquier caso. En realidad, este estudiante esgrimía un procedimiento tal que dadas las longitudes de la base y de un lado, calculaba la altura aplicando Pitágoras, o dadas las longitudes de la base y de la altura, calculaba el lado aplicando Pitágoras. Así podía reiterar la demostración en cualquier caso particular, pero no podría haberla expresado de forma general pues habría llegado a una contradicción con las longitudes que consideraba plausibles para la altura. Su respaldo matemático lo encontraba en el principio de inducción completa: sabe que sirve para varios casos de triángulos con base de longitud par (lo ha hecho con 2, 4, 6 y 8) y está convencido de que servirá en cualquier otro caso. De hecho, es este convencimiento lo que le da la certeza a su conclusión, argumento que consideramos válido en la etapa de educación primaria. Otro asunto es si el futuro maestro puede contentarse con esta demostración.

Analizando el papel que desempeñan los datos concretos en la demostración *A* con las sugerencias de los dos estudiantes mencionados, pudimos obtener una demostración en el caso general (siendo uno de los lados horizontal o vertical). Un análisis similar en la demostración *B* condujo a diferenciar una demostración con casos concretos, que contiene la esencia de la demostración general, de otra en la que no puede abstraerse el método (véase la Figura Nº 9 en la siguiente página).

Los estudiantes eran conscientes de que el caso general, prescindiendo de la condición de que uno de los lados del triángulo esté sobre una línea horizontal o una vertical, no quedaba aún demostrado. Un estudiante conjeturó que para el caso general habría que tomar los ángulos, en lugar de basar la prueba en los lados. Su propuesta parece basarse en el hecho de que ahora la longitud del lado no tiene por qué ser natural (ni la de la altura), por lo que la contradicción a la que se llega en la demostración anterior se vislumbra más difícil de alcanzar. Su idea, no obstante, de emplear el transportador de ángulos para esta demostración viene a poner de relieve nuevamente el apego al caso concreto. Ahora bien, este alumno sostenía que mientras el uso de

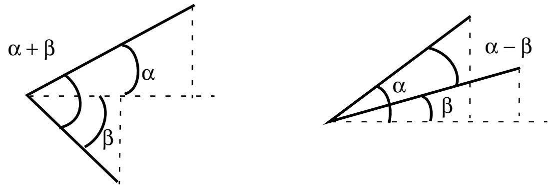
Mientras que en A puede sustituirse la longitud 4 del lado por una longitud genérica (incluso prescindiendo de la consideración de que la longitud ha de ser par), en B puede reiterarse el procedimiento y por tanto, sustituirse la longitud 4 del lado por otro número par cualquiera, pero la longitud 3 de la altura corresponde a una estimación visual que no posee forma de generalizarse. Respecto a la posible generalización de la relación entre la longitud de la altura (3) y la del lado (4), un estudiante propuso que la altura habría de ser siempre una unidad inferior, lo que fue descartado, ya que al aplicar el teorema de Pitágoras, se concluyó que la longitud del lado debería ser un número irracional; no obstante, esta contradicción con la condición de dibujo en la trama, no permitió obtener una demostración general de la imposibilidad de construir triángulos equiláteros, pues sólo hace referencia a la imposibilidad de que en tal triángulo la altura posea una longitud equivalente a una unidad menos de la del lado.

Figura Nº 9.

la regla no permitía establecer conclusiones definitivas, el uso del transportador sí lo permitía. Este extraño argumento pone de manifiesto el desconocimiento habitual de los estudiantes en lo que concierne a las medidas de amplitud de ángulos; muchos de ellos sitúan la amplitud en el rango de los números naturales, con lo que la aplicación del transportador llega a resultar precisa, lo que no ocurre con la regla, en la que la medición visual con sus propias limitaciones, puede no alcanzar la exactitud real de una longitud concreta; por ejemplo, no es posible precisar con la vista longitudes por debajo de las décimas de milímetros.

Finalmente, el formador presentó la demostración general para cualquier triángulo, haciendo uso de fórmulas trigonométricas (véase la Figura Nº 10 en la siguiente página).

¿Qué aporta esta demostración a la formación inicial del maestro? ¿Tiene sentido que el estudiante para maestro, y luego el maestro, se adentre en terrenos que no domina completamente, pero que pueden dar soporte teórico a su actuación, en este caso a la metodología, o le bastaría con *creerse* determinadas cosas ya de entrada? En lo que nos ocupa: ¿merece la pena que los estudiantes para maestro traten de comprender los pasos de la prueba aunque no conozcan la trigonometría, o sería suficiente que creyeran que en la trama no se pueden formar triángulos equiláteros por habérselo dicho su profesor? ¿Qué ganamos con esta prueba? La trigonometría ni es contenido de la educación primaria, ni forma habitualmente parte del contenido de las materias de magisterio; la respuesta, pues, podría ser que no tiene sentido abordar esta demostración en este contexto. Coincidiríamos con esta respuesta si nos fijáramos exclusivamente en el conocimiento de matemáticas



Cualquier ángulo sobre la trama puede expresarse como suma o diferencia de dos ángulos que forman parte de triángulos rectángulos con los catetos en la horizontal y la vertical. Como pueden elegirse estos segmentos de modo que sus extremos sean vértices de la trama, las tangentes de cada uno de estos ángulos son números racionales y, por consiguiente, también lo son las tangentes de los ángulos suma y diferencia. De ahí que no pueda obtenerse la tangente de 60, haciendo imposible la existencia de triángulos equiláteros en la trama.

Figura Nº 10.

que de ahí puedan extraer los alumnos; sin embargo, creemos que es un buen momento para volver a ejemplificar un método habitual y útil a la hora de demostrar la inexistencia de un determinado objeto o la imposibilidad de que se cumpla cierta condición (conocimiento sobre matemáticas): la reducción al absurdo. En particular, en este caso se pone de relieve también un modo de proceder usual en el trabajo con los números racionales e irracionales, el cual es obtener, por un lado, que una expresión es forzosamente racional, mientras que por otro lado no puede serlo. Asimismo, la inversión de energía y tiempo no es excesiva, y la demostración es fácil de seguir, permitiendo respaldar el uso didáctico de la trama por el futuro maestro.

De otra parte, no debemos concluir la actividad sin discutir dos puntos: las características que debe reunir una prueba para que se considere aceptada desde el punto de vista lógico y la adecuación de los distintos niveles de demostración para la educación primaria. En este sentido, han aparecido pruebas aferradas al caso concreto, como hemos comentado, al lado de otras que aun considerando casos concretos permiten vislumbrar procedimientos generales. Somos conscientes de que los alumnos de primaria no pueden llegar a demostraciones formales y, en muchos casos, les será difícil abordar casos generales de manera rigurosa desde una perspectiva lógica avanzada, pero esto no debe conducir a un tratamiento homogéneo de las posibles aproximaciones o pruebas de casos concretos, sino, por el contrario, propiciar la aparición y discusión de pruebas que posean rasgos que, con posterioridad, formen el basamento sobre el cual edificar las pruebas generales.

No queremos acabar la reflexión anterior sin comentar que muchos de los estudiantes para maestro, ante pruebas como ésta se muestran desinteresados pues opinan que tal contenido no debe formar parte de su conocimiento profesional. Esta actitud, cuando se manifiesta explícitamente, propicia una buena oportunidad para comenzar una discusión sobre las características y los contenidos de dicho conocimiento. A pesar de que esta discusión puede llegar a remover concepciones, e incluso en algunos casos a convencer de la necesidad de ampliar el campo del conocimiento matemático más allá del escolar, otras variables hacen muy difícil su aceptación, entre las que destacaríamos su escaso conocimiento matemático y su actitud hacia la materia.

Asimismo, queremos aprovechar este momento, no para reivindicar el uso indiscriminado de hechos y fórmulas que no pertenecen al acervo en demostraciones del estudiante, sino para que el hecho de la falta de interés del estudiante no implique la marginación inmediata de un trabajo como el descrito. Pensamos que, en general, el trabajo de clase debe girar en torno a contenidos que los estudiantes hayan de manejar o manejen ya, pero en casos justificados por la importancia de su aplicación, como el que estamos comentando, la posible inconveniencia de trabajar con algo desconocido se ve compensada por sus beneficios.

También se consideró, este, un buen momento para hacer el análisis de documentación teórica sobre aspectos del aprendizaje de los contenidos geométricos relacionados con los que surgieron en las discusiones anteriores. Tal análisis, sobre el que no nos detendremos por razones de espacio, tuvo por objeto ampliar y profundizar en los marcos explicativos que emanaron de las discusiones precedentes.

Análisis de la actividad desarrollada en educación primaria

Concluido lo anterior, pedimos a nuestros alumnos que se plantearan: i) de qué modo esta actividad, o una inspirada en ésta, puede ser interesante para trabajar con niños de primaria; ii) cómo la plantearían; iii) qué objetivos perseguirían y iv) en qué nivel/curso la consideran adecuada.

Sobre la posible adaptación de esta actividad a primaria, la mayoría de los estudiantes pensaba que sólo tenía sentido como actividad de aplicación, pues hace falta conocer la clasificación de los triángulos. Su argumento consistía en que así era como ellos habían procedido: *para dibujar triángulos distintos es preciso poseer criterios*. Está constatada la dificultad de hacer ver la posibilidad de enfocar una tarea de forma diferente a la que se conoce, cuando se supone que la herramienta principal es la que se ha empleado. Evidentemente, todo niño posee criterios naturales para dibujar triángulos distintos, algunos de los cuales pueden coincidir con los criterios convencionales. Por otra parte, la concepción de los estudiantes sobre la enseñanza de la matemática hace que entiendan que este tipo de actividades sólo tiene cabida como aplicación de conocimientos, asociando a la introducción de conceptos y procedimientos la explicación del maestro o la lectura del libro de texto, siguiendo, por tanto, un esquema metodológico de explicación - ejercitación/aplicación. En algunos casos, no obstante, se concibe la posibilidad de plantear esta actividad a los niños antes de la explicación del maestro, pero sólo con el fin de que éste la use para ejemplificar su explicación. De este modo, en lugar de tomar ejemplos ajenos, usa los de los niños, pero en esencia se sigue el mismo esquema metodológico.

Por otro lado, se discutió también la idoneidad de la trama como recurso en primaria. En este sentido, algunos alumnos no la consideraban apropiada por inducir a la tendencia hacia la horizontalidad y la verticalidad, lo que llevaba a reducir el rango de los ejemplos. Coincidimos con esta apreciación: la trama potencia la mencionada tendencia, que ya es natural en los alumnos; sin embargo, no creemos que sea argumento suficiente como para desecharla ya que su uso facilita los dibujos, ofrece la ocasión para reflexionar sobre el conjunto de imágenes asociadas a cada tipo de triángulo y propicia el análisis sobre la medida. Además, hay que considerar que la trama es sólo un recurso, es decir, que deberá estar acompañada del trabajo con otros materiales.

Los comentarios de los estudiantes para maestro se contrastaron con la descripción de la situación de enseñanza real en la que se plantea esta actividad, obviamente con un enunciado adecuado a los niños a los que se propone.

La siguiente tarea fue analizar las propuestas de cada grupo real de niños (ver Anexo), compararlas con las suyas y observar aspectos como los triángulos prototípicos y la fuerza de la línea vertical y horizontal, indicados en las filas III.2 y III.3 de la Tabla Nº 1.

Finalmente entregamos a los estudiantes la descripción por escrito de la sesión de puesta en común de los trabajos de los niños, realizada en la clase de primaria. Los estudiantes para maestro analizaron esta sesión en busca de indicadores respecto del papel de la maestra, el papel de los alumnos, la concepción del aprendizaje, la metodología aplicada, los obstáculos y los rasgos generales del aprendizaje del contenido concreto de la actividad, la gestión que hace la maestra de los recursos empleados, el conocimiento que posee de ellos y el que puede inferirse de su uso, así como aspectos diversos de la enseñanza del contenido, categorías éstas que fueron consensuadas con los estudiantes y descritas informalmente al darles las instrucciones de la tarea. Comentamos a continuación algunos de los resultados más relevantes de este análisis, restringiéndonos de nuevo por razones de espacio, al papel de la maestra y a los rasgos del aprendizaje.

El papel de la maestra

Globalmente, distinguimos tres tipos o niveles de análisis. Por un lado, encontramos estudiantes cuyo análisis es puramente descriptivo; en este caso no existe interpretación de lo acontecido en la situación real, ni parecen extraerse conclusiones para el propio aprendizaje. El análisis es como un resumen de lo que ocurre; su intervención o comunicación con la situación es mínima, pareciendo que no procesa la situación, sólo la reproduce.

Por otro lado, hay estudiantes que analizan la situación, pero tan sólo con el referente de la pedagogía y la psicología general, sin entrar, por tanto, en los aspectos específicos de la enseñanza y el aprendizaje del contenido matemático, como se les había requerido[10]. Dentro de este nivel, o bien situados en un nivel entre el anterior y éste, consideramos a los estudiantes que sólo se percatan estrictamente de los aspectos relativos a la organización general: entrada paulatina de los niños por retraso de la clase anterior, integración del alumno con síndrome de Down, ubicación del recreo en el horario, etc. Los que profundizan en otros aspectos, dentro de este nivel, se centran en identificar el modelo didáctico de la maestra, papel de la maestra, papel del alumno, metodología, sin abordar las categorías relativas a lo específico del contenido mencionadas anteriormente. Entre estos estudiantes se detectan dos polos opuestos: los que consideran esta sesión como un claro ejemplo de enseñanza constructivista, frente a aquellos que la consideran excesivamente dirigista, reflejando la visión simplificada que Porlán (1998) destaca al referirse a las concepciones de los estudiantes para maestro sobre la enseñanza y el aprendizaje de la materia: “buenos y malos profesores, clases magistrales sí o no, clases teóricas frente a clases prácticas, etc.” (p. 36).

Finalmente, el tercer grupo combina el análisis general con el específico, a la vez que huye de asignaciones polarizadas, introduce comentarios que caracterizan la situación y sugiere mejoras.

El contraste entre algunas declaraciones suscita un interesado debate. Para los estudiantes con visiones ‘polares’ resulta sorprendente que sus propios compañeros se sitúen en el polo opuesto. Además, para los estudiantes para maestro que se sitúan en ambos polos, es especialmente impactante la visión que aportan aquellos que consiguen superar ese bipolarismo y encontrar aspectos positivos y otros mejorables. El análisis se enriquece gradualmente con las distintas intervenciones y las confrontaciones que surgen. Por

10. Esta constatación es consistente con la conclusión que establecen Mellado y Bermejo (1995) sobre los diarios de práctica de los estudiantes para maestro, quienes afirman que éstos se centran en cuestiones generales y no en problemas específicos de la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. Atribuimos, al menos en parte, esta limitación a la sobrecarga de créditos psicopedagógicos en las titulaciones de Maestro, en detrimento de una adecuada formación en las áreas curriculares.

otra parte, como declaramos en el apartado titulado “Caracterización de la propuesta”, la reflexión que se potencia es más significativa para los estudiantes, al provenir de sus propios compañeros, sus iguales. Como ya también dijimos, este tipo de actividad ayuda a valorar la comunicación como medio de desarrollo profesional.

Rasgos del aprendizaje

El análisis de los estudiantes para maestro sobre una situación escolar de primaria se convierte en objeto de análisis en la clase de formación inicial, no sólo por parte de los formadores, sino por la parte de los estudiantes. En particular, se posibilita una discusión concreta sobre dificultades en el aprendizaje del contenido matemático escolar que pueden coincidir con dificultades de los mismos estudiantes; asimismo, se profundiza en la interpretación del futuro maestro sobre el conocimiento de los alumnos, aspectos ambos que integran el conocimiento didáctico del contenido del maestro.

En lo que concierne al análisis de obstáculos y rasgos generales del aprendizaje del contenido, los estudiantes destacan las consideraciones que se exponen a continuación.

Introducción de variables extrañas a la hora de clasificar

Los estudiantes para maestro constatan que los alumnos hablan de lados largos, cortos y medianos, lo que les lleva a diferenciar más grupos cuando clasifican; así, un triángulo con dos lados iguales y uno más largo iría en un grupo diferente de otro triángulo con dos lados iguales y el tercero más corto (Mi[11]: *Pero no son iguales porque el otro tenía dos lados iguales y uno más largo y éste tiene dos lados iguales y uno más corto.* Maestra: *Pero los dos tienen dos iguales y uno diferente, ¿no?, ¿los podemos agrupar así?, ¿lo agrupamos así? Para que sea igual, diferente, ir manejando sólo esas dos palabras, ¿vale?*).

Los mismos estudiantes denuncian el uso de esta terminología por parte de la maestra en algunas ocasiones (D: *O sea, que éste es un triángulo que tiene un lado más largo y dos iguales. Vamos a buscar entonces en las hojas a ver si hay otro triángulo que sea igual, que tenga dos lados iguales y uno, el de abajo, que sea distinto*). La propia maestra refuerza inicialmente la consideración de la longitud de uno de los lados, en comparación con los otros, como variable a tener en cuenta con propósitos clasificatorios, aunque a continuación sólo diga que han de buscar que un lado sea distinto a los otros dos. Muchos estudiantes opinan que la maestra debería haber permiti-

11. La nomenclatura “Mi”, “Ma”, “D” y “Je” que aparece en los diálogos que siguen en lo que resta del artículo hace referencia a algunos de los estudiantes de la maestra.

do la introducción de otras variables que son importantes para los niños, en la clasificación. Esto propicia la discusión sobre el uso del conocimiento del alumno en la construcción del conocimiento escolar, así como el papel en dicha construcción del conocimiento científico.

Estamos convencidos de que la maestra es consciente de la irrelevancia de la posición de los lados y de la dificultad que esto provocaba en los alumnos a la hora de clasificar teniendo en cuenta la asociación entre la posición y el tipo de triángulos; sin embargo, observamos cómo, quizás traicionada por sus propias imágenes conceptuales dominantes, la maestra refuerza una concepción restrictiva que consiste en que el lado desigual de un triángulo isósceles es el que se encuentra en la horizontal.

Dificultad para descartar algunas combinaciones de tipos de ángulos para formar un triángulo

(Maestra: *Ahora estamos mirando a ver sus ángulos, y vamos a intentar encontrar triángulos que tengan... ¿qué podemos encontrar?* Ma: *Dos ángulos obtusos y uno recto*. Mi: *Dos ángulos obtusos y uno recto... Eso no se puede hacer.* Maestra: *Ma, dice Mi que no se puede hacer un triángulo que tenga dos ángulos obtusos y uno recto.* Ma*: Pues... dos agudos y uno recto...* Maestra: *Bueno, espérate, ¿no? ¿ya te has rendido? ¿ya has dicho: "bueno, es verdad, Mi?" A ver, ¿qué decís los demás?* [Repite la idea de Mi. Je dice que está de acuerdo con Mi]. Maestra: *¿Qué es lo que podemos encontrar entonces, Je?* [Je dice que dos obtusos y uno recto] *¡Eso es lo mismo que ha dicho Ma!* [Je rectifica: *¡no!, dos agudos y uno recto*]).

No se refiere a una aplicación errónea o inexistente del resultado de la suma de los ángulos de un triángulo, pues esto aún no se ha trabajado en clase, sino a la dificultad de manejar intuitiva y aproximadamente la suma de tres amplitudes para conformar un triángulo. Por otra parte, al basarse el argumento en la visualización de cada alumno, ningún alumno, ni la propia maestra, es capaz de convencer a quien no lo ve. Es el caso de Ma, quien propone en primera instancia formar un triángulo con dos ángulos obtusos y un recto y que, tras exponer otros alumnos la imposibilidad y aparentar asumirla, vuelve a proponer un caso imposible: un triángulo con un ángulo agudo y dos obtusos (Maestra: *¿Qué otro grupo podemos formar?* [Ma dice que el de los que tienen uno agudo y dos obtusos, a lo que Mi dice que no se pueden tener dos obtusos]. Maestra: *¿No pueden tener dos obtusos? ¿por qué no?* [Mi no sabe explicar por qué. Hay otros niños que también dicen que no se puede]. Maestra: *Tú sabes que no puede ser pero no sabes explicar por qué* (a Mi). Maestra: *Habrá que decir por qué sí o por qué no* (se dirige a otros niños que dicen pensar igual que Mi pero que no tienen razones), *habrá que tener una razón... Habrá que ser como Mi, que tiene una razón.* Maestra: *¿Por qué no se puede?* (se dirige a J que también dice que no se puede). Maestra: *Tú sabes lo que son ángulos obtusos, ¿no? Mira, un ángulo obtuso es como éste* (indicando el segundo de la ficha 6), *pues imagínate dos como éste y luego otro más* [hay niños que dicen que no se puede, que no sale]. Maestra: *No se puede... Bueno, pues vamos a pensar entonces en uno que sí salga*).

Relación indebida entre la amplitud de un ángulo y la longitud de las semirrectas que lo determinan

(*¿Cuál es entonces el ángulo recto?* [Los niños señalan que el de arriba]. *Vamos a comprobarlo poniendo este ángulo recto ahí, éste es un ángulo recto* [el del triángulo recortado en papel]. *Lo vamos a poner ahí y si coinciden es que es un ángulo recto, ¿no? Venga, vamos a ponerlo.* (M se va a la pizarra y superpone el ángulo recto del triángulo recortado sobre el ángulo recto que señalaba Ma). *¿Coincide o no?* [Los niños asienten]. *Éste también sirve, es un ángulo recto.* (M le coloca la letra “A” a ese triángulo). [Un niño objeta que ese ángulo, refiriéndose al recto del triángulo de la pizarra, es más chico que el otro]. *Pero es que todos los ángulos rectos son iguales, ¿o no? ¿es que hay ángulos rectos grandes y ángulos rectos chicos?* [J dice que hay grandes y chicos]. *Pero no estoy hablando de la línea, estoy hablando del ángulo. Los lados sí pueden ser, puede ser este lado así de largo y éste lado así de largo* (haciendo la señal con las manos como si alargara mucho las líneas que conforman el ángulo recto del triángulo de papel que muestra a los alumnos), *¿pero el ángulo es diferente o es igual?* [J contesta que es igual]. *Pregunta J, bueno, y no lo pregunta, y lo afirma...dice J que no hay ángulos rectos grandes y chicos, sino que todos los ángulos rectos son iguales de grandes, ¿sí o no?* [Algún niño dice que no tímidamente, pero cuando otros dicen con más seguridad que sí, todos dicen que sí, con excepción de La que sigue afirmando lo contrario]).

Como sabemos, el concepto de ángulo es bastante problemático, tanto para los niños como para los estudiantes para maestro, debido en parte, a que en la definición intervienen elementos no acotados (semirrectas y región) que cuando se circunscriben a figuras concretas, se convierten en acotados. A esto es preciso añadir el uso del símbolo (arco) para determinar la amplitud en el dibujo; en muchos casos este símbolo forma parte de la imagen del concepto de ángulo, incorporado acríticamente, sin distinguir entre notación o convenio y la propia definición con sus características. Asimismo, se suele vincular la longitud entre los segmentos que forman el ángulo con la amplitud del ángulo. Es importante que el análisis de la actividad escolar propicie esta reflexión sobre el contenido matemático, en concreto sobre conceptos y hechos asociados al ángulo, al mismo tiempo que sobre los factores del aprendizaje que pueden distorsionarlo, de manera que la enseñanza que se desea transmitir coincida con el aprendizaje que se construya.

En general, se pone de manifiesto la diferencia existente entre el análisis de los estudiantes sobre las dificultades de sus compañeros respecto al concepto de altura, y el análisis de las dificultades de los niños de primaria. Éste último es mucho más rico, comprometiéndose más con la situación planteada y proponiendo hipótesis que subyacen tras los obstáculos. Pensamos que también influye el hecho de haber realizado la tarea matemática en la clase con los estudiantes para maestro, y haberla discutido, porque les proporciona más elementos para el mencionado análisis. No obstante, a esto hay que añadir que les resulta artificial desempeñar el papel de maestro de sus compañeros, mientras que al analizar la situación de primaria proyectan el papel que pretenden desarrollar en el futuro, lo que les resulta natural. Observamos pues, cómo esta actividad posibilita el desarrollo de lo que viene llamándose identidad profesional, concepto que hace referencia a la toma de consciencia del papel como profesor dentro de la comunidad de profesores:

> Desarrollar una identidad profesional implica asumir las normas y valores esenciales de la profesión y una actitud de compromiso para desarrollarse uno mismo como educador, así como para desarrollar la institución educativa (Ponte y Oliveira, 2001, p. 2).

En suma, el análisis hecho por los estudiantes para maestro y la consiguiente discusión con los formadores recoge la mayoría de los aspectos consignados en la Tabla Nº 1.

CONCLUSIÓN

En definitiva, constatamos la riqueza de las reflexiones realizadas por los estudiantes para maestro, poniéndose de relieve la conveniencia de plantear actividades, como la presentada en este artículo, en las que se aborda una tarea matemática y se analiza su desarrollo en una clase de primaria, en la línea de lo que sugiere Porlán (1998) como mejoras al uso de análisis de casos de la enseñanza en la formación inicial de maestros: “replicar en clase alguna de las experiencias que se proponen para los alumnos de primaria” (p. 41).

Nos parece especialmente destacable que esta actividad consiga superar al menos en algunos estudiantes su limitación a centrarse únicamente en aspectos generales de la enseñanza y el aprendizaje. Los estudiantes incorporan en su reflexión diversos aspectos de su conocimiento didáctico del contenido relativo a triángulos, y al mismo tiempo dichos estudiantes valoran la utilidad de este conocimiento en su práctica futura, propiciando una mayor profundidad en el análisis de la situación. Creemos que éste debe ser un reto de las didácticas específicas en la formación de maestros, aportando contenidos genuinos, inabordables desde las áreas generalistas.

Proponemos avanzar más allá del estudio de las concepciones, pues se corre el peligro de ser entendidas como concreciones de lo general en el campo matemático (en particular, las tendencias didácticas), y trabajar además los aspectos del conocimiento profesional más directamente relacionados con el contenido específico. Todo ello sin olvidar, por supuesto, la naturaleza integradora del conocimiento profesional, y la orientación también integradora de su construcción, así como una finalidad principal de la formación del maestro:

> El fin de la educación profesional consiste en actuar con comprensión. Ni la comprensión ni la acción son suficientes por sí mismas, y la creencia por sí sola no produce acción. Los profesores en formación necesitan ayuda para conocer cómo la comprensión puede clarificar y desarrollar formas de acción. También necesitan que se les instruya en formas de juzgar las acciones y en adaptarlas a marcos particulares, así como a sus propias capacidades. (Feiman-Nemser y Buchman, 1988, p. 312)

Creemos que nuestra propuesta contribuye a desarrollar la comprensión y a promover actitudes relativas al papel del maestro como profesional, en particular a concebir que "aprender de la enseñanza [es] parte del trabajo de enseñar" (Feiman-Nemser y Buchman, 1988, p. 312).

REFERENCIAS

Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma, 25*, 23-30.

Blanco, L.J. (1996). Aprender a enseñar matemáticas: tipos de conocimiento. En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 199-221). Granada: Comares.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R.W. Scholz, R. Strässer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brown, J., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18* (1), 32-42.

Carrillo, J. (1999). Reflexiones para la docencia (documento no publicado). Huelva: Universidad de Huelva.

Carrillo, J. (2000a). Aportaciones desde la resolución de problemas a la construcción de conocimiento profesional. *Quadrante, 9* (2), 27-54.

Carrillo, J. (2000b). Implicaciones del aprendizaje situado (comentarios inspirados en la contribución del Profesor Joao F.L. Matos). En J.P. Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escola de Verao*. Santarém: Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao.

Carrillo, J., Coriat, M. y Oliveira, H. (1999). Teacher education and investigations into teacher's knowledge. En K. Krainer, F. Goffree y P. Berger (Eds.), *European research in mathematics education I.III*. On research in mathematics teacher education. Osnabrück, Alemania: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Contreras, L.C. (1999). El método de casos en la formación de maestros. Una aproximación desde la educación matemática. En J. Carrillo y N. Climent (Eds.), *Modelos de formación de maestros en matemáticas* (pp. 149-162). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Feiman-Nemser, S. y Buchman, M. (1988). Lagunas en las prácticas de enseñanza de los programas de formación del profesorado. En L.M. Villar Angulo (Dir.), *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores.* Alcoy: Marfil.

García, M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje.* Sevilla: GIEM-US.

Goffree, F. (1993). *Kleuterwiskunde*. Groningen, Holanda: Wolters Noordhoff.

Goffree, F. (1999). Standards for primary mathematics teacher education. Ponencia invitada en el congreso internacional *The training and performance of primary teachers in mathematics education*, organizado por la Academia de Ciencias. Madrid, octubre. (En línea. Documento disponible en: http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm).

Goffree, F., Oliveira, H., Serrazina, L. y Szendrei, J. (1999). Good practice. En K. Krainer, F. Goffree y P. Berger (Eds.), *European research in mathematics education I.III. On research in mathematics teacher education*. Osnabrück, Alemania: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Goffree, F. y Oonk, W. (1999). A digital representation of 'full practice' in teacher education: The MILE project. En K. Krainer, F. Goffree y P. Berger (Eds.), *European research in mathematics education I.III. On research in mathematics teacher education*. Osnabrück, Alemania: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Grossman, P. (1992). Teaching and learning with cases. En J. Shulman (Ed.), *Case methods in teacher education* (pp. 1-30). New York: Teachers College Press.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de magisterio. En J. Giménez, S. Llinares y V.

Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática*. Granada: Comares.

Kessels, J.P. y Korthagen, F.A. (1996). The relationship between theory and practice: Back to the classics. *Educational Researcher, 25* (3), 17-22.

Krainer, K. (1998). Some considerations on problems and perspectives of inservice mathematics teacher education. En C. Alsina et al. (Eds.), *8th ICME: Selected Lectures*. Sevilla: SAEM Thales.

Krainer, K. (2001). Teacher education as research: A trend in european mathematics teacher education. Artículo presentado en el *CERME 2*, Marianske Lazne (República Checa).

Lampert, M. y Ball, D. (1998). *Teaching, multimedia, and mathematics: investigations of real practice*. New York: Teachers College Press.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge, MAS: Cambridge University Press.

Leinhardt, G., McCarthy, K. y Merriman, J. (1995). Integrating professional knowledge: The theory of practice and the practice of theory. *Learning and instruction*, *5*, 401-408.

Llinares, S. (1994). The development of prospective elementary teachers' pedagogical knowledge and reasoning. The school mathematical culture as reference. En N. Malara y L. Rico (Eds.), *First Italian- Spanish Symposium on Mathematics.* Modena, Italia*:* Dpto. di Matemática di Modena.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO, 17*, 51-63.

Marks, R. (1991). When should teachers learn pedagogical content knowledge? Comunicación presentada en la *AERA*. Chicago.

Mellado, V. y Bermejo, M.L. (1995). Los diarios de práctica en la formación de maestros. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 23,* 121-136.

Moje, E.B. y Wade, S.E. (1997). What case discussion reveal about teacher thinking. *Teaching and Teacher Education, 13* (7), 691-712.

Ponte, J.P. y Oliveira, H. (2001). Information technologies and the development of professional knowledge and identity in teacher education. Artículo presentado en *CERME 2*, Marianske Lazne (República Checa).

Porlán, R. y Rivero, A. (1998). *El conocimiento de los profesores.* Sevilla: Díada.

Porlán, R. (1998). La formación inicial de maestros en didáctica de las ciencias. Análisis de un caso. *Investigación en la Escuela, 35*, 33-42.

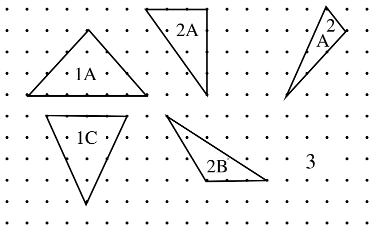
Shulman, L.S. (1992). Toward a pedagogy of cases. En J. Shulman (Ed.), *Case methods en teacher education* (1-30). New York: Teachers College Press.

Spiro, R.J. et al. (1987). Knowledge acquisition for application: Cognitive flexibility and transfer in complex domains. En B.C. Britton (Ed.), *Executive control processes*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

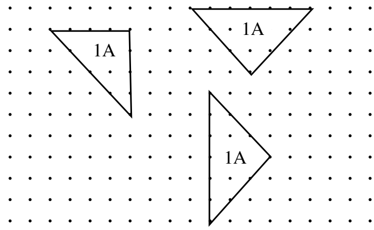
Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Nuria Climent
José Carrillo
Universidad de Huelva
Campus El Carmen. Avda. Fuerzas Armadas, s/n
Tel.: 34(9)5901924746
Huelva, España
E-mail: climent@uhu.es
carrillo@uhu.es

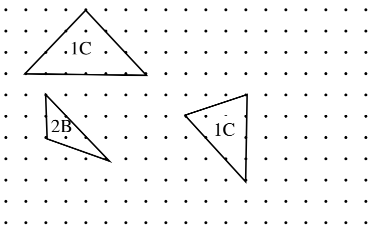
ANEXO



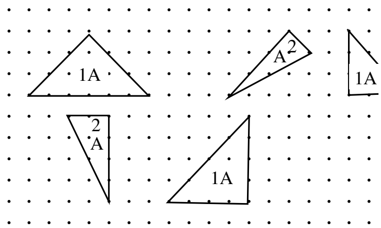
Ficha del Grupo 1



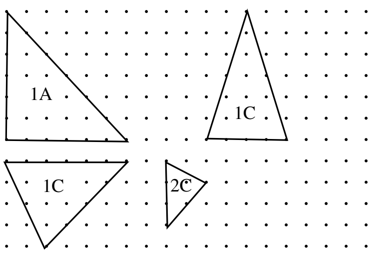
Ficha del Grupo 2



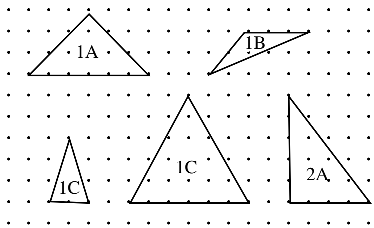
Ficha del Grupo 3



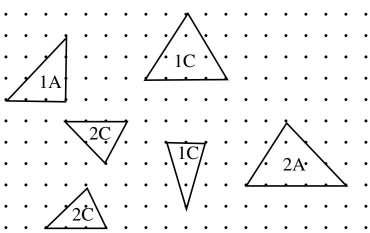
Ficha del Grupo 4



Ficha del Grupo 5



Ficha del Grupo 6



Ficha del Grupo 7

Fichas de los niños y cómo quedaron clasificadas

1: triángulos isósceles
2: triángulos escalenos
3: triángulos equiláteros
A: triángulos rectángulos
B: triángulos obtusángulos
C: triángulos acutángulos