REVISTA EMA
2002, VOL. 7, Nº 2, 206-226

LO ARBITRARIO Y LO NECESARIO: APOYO A LA MEMORIA[1]

DAVE HEWITT

Esta es la segunda parte del artículo "Lo arbitrario y lo necesario" cuya primera parte fue publicada en el número anterior de esta Revista. Aquí el autor se centra en lo arbitrario como uno de los aspectos integrantes del currículo de matemáticas y hace énfasis en el papel que debe jugar el profesor para apoyar las tareas de memorización de lo arbitrario por parte de los estudiantes, teniendo en cuenta que tal memorización no es un fin en sí mismo. Analiza tres posibilidades para la decisión pedagógica relativa al apoyo que puede dar un profesor al aprendizaje de lo arbitrario en matemáticas: enfatizar inicialmente el nombre, enfatizar primero las propiedades y las relaciones asociadas a un nombre y luego presentarlo, o, atender tanto al nombre como a las propiedades y relaciones simultáneamente.

DIVISIÓN DEL CURRÍCULO: LO ARBITRARIO Y LO NECESARIO

En la primera parte de este artículo (Hewitt, 1999), presenté una forma de ver el currículo de matemáticas en términos de aquellas cosas que un estudiante no puede saber sin que alguien le informe de ellas (arbitrarias) y de aquellas cosas que *alguien* puede desarrollar por su cuenta y saber que lo que hizo es correcto (necesarias) sin ser informado por otros.

Lo que es arbitrario, lo es para todos en el sentido de que nadie puede conocerlo sin que alguien le informe de ello. Lo arbitrario se refiere a nombres y convenciones que han sido establecidos dentro de una cultura y que deben ser adoptados por parte de los estudiantes si se quiere que participen y se comuniquen exitosamente dentro de tal cultura. Lo arbitrario reside en el ámbito de la memoria ya que los estudiantes no pueden abordar estas cosas a través de su propia consciencia. Por tanto, el papel de los estudiantes consiste en memorizar lo arbitrario.

Un profesor tiene que informar a sus estudiantes de lo arbitrario y apoyarlos en la tarea de memorización. Si los profesores no hacen esto, son los

1. Traducción realizada por Patricia Perry y Hernando Alfonso, del original Hewitt, D. (2001). Arbitrary and necessary: Part 2 Assisting memory. *For the Learning of Mathematics, 21* (1), 44-51. Agradecemos a David Pimm, editor de *For the Learning of Mathematics* por haber autorizado la traducción al español y la publicación de este artículo en la *Revista EMA*.

estudiantes quienes tienen que inventar nombres y convenciones, tarea para la que están perfectamente capacitados y que puede responder a un propósito educativo, pero que muy improbablemente logrará nombres y convenciones que coincidan con los adoptados dentro de la cultura matemática.

Si algo tiene la calidad de necesario, ello no implica que *todo el mundo* pueda conocerlo a través de su propia consciencia. Lo que significa es que, con suficiente y apropiada consciencia, es ciertamente posible conocer lo necesario sin que otros tengan que informarlo. Lo necesario se refiere a las propiedades y relaciones y éstas residen en el ámbito de la consciencia. El papel de un estudiante es educar su propia consciencia de manera que pueda llegar a saber con certeza que una cierta propiedad o relación debe ser como es y no de otra manera.

El papel del profesor es proporcionar tareas adecuadas para ayudar a los estudiantes a cumplir el papel de educar su propia consciencia. La eventualidad en la que un profesor decide informar a los estudiantes de aquello que tiene carácter de necesario, la describo como *saber aceptado*, que el estudiante tiene que memorizar o hacer un trabajo adicional para tratar de convertir el saber aceptado en algo que pueda llegar a conocer a través de su propia consciencia.

La Figura Nº 1 resume lo anterior y dado que en la primera parte del artículo comenté otros aspectos de lo que he llamado *cuestiones dadas* y *cuestiones generadas (lo generado)*, aquí no trataré más ese tema. En cambio, desarrollaré en detalle las implicaciones que para la enseñanza tiene esta división entre 'arbitrario' y 'necesario' y luego analizaré formas prácticas destinadas a los profesores que proyecten actividades de clase compatibles con la división mencionada. Este artículo se centrará en los aspectos arbitrarios de la enseñanza y el aprendizaje. En la tercera parte del artículo se tratarán los aspectos necesarios.

	Lo arbitrario		**Lo necesario**	
Profesor	el profesor informa ↓	el profesor no informa ↓	el profesor informa ↓	el profesor propone una actividad apropiada ↓
Alumno	los estudiantes tienen que memorizar	los estudiantes tienen que inventar	saber aceptado, los estudiantes tienen que memorizar a menos que tengan éxito al usar su consciencia para llegar a saber	los estudiantes utilizan su consciencia para llegar a saber

Figura Nº 1. Resumen de las elecciones del profesor y las consecuentes formas de trabajar por parte del estudiante

IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA: EL ÁMBITO DE LA MEMORIA

Lo arbitrario reside en el ámbito de la memoria; por tanto, el papel de un profesor es doble. En primer lugar, lo arbitrario debe proveerse, y en segundo lugar, los estudiantes requieren apoyo con su tarea de memorizar exitosamente lo arbitrario. El segundo papel es tan importante como el primero ya que si los estudiantes no memorizan exitosamente, recae sobre el profesor la tarea de darles información otra vez y el proceso de memorización comienza de nuevo.

Memorizar lo arbitrario es un asunto importante, aunque no sea ahí donde residen las matemáticas. El aprendizaje de nombres y convenciones juega un papel vital para involucrarse con las matemáticas y comunicarse con otros sobre el tema, pero por sí mismo no constituye las matemáticas. Puede ser un ejercicio útil para un departamento de matemáticas examinar el esquema de trabajo y hacerse la pregunta: *¿qué tanto de este esquema de trabajo consiste en la memorización de nombres y convenciones?* Algunas veces puede verse, de manera errónea, que el tiempo gastado en tal trabajo es tiempo gastado en las matemáticas, cuando el propósito real de aprender nombres y convenciones es facilitar el trabajo que se haga en donde las matemáticas residen realmente, o sea en aquello que tiene el carácter de necesario.

Así, aunque en esta parte se aborda la seria labor que debe realizarse para informar a los estudiantes de lo arbitrario y asistirlos en su trabajo de memorización, el tiempo gastado en ello sólo será de valor si se considera que el aprendizaje de los nombres y convenciones no es un fin en sí mismo sino que tiene el propósito de apoyar el trabajo sobre aquello que tiene el carácter de necesario.

¿QUÉ ES LA MEMORIA?

Algunas veces el término 'memoria' se usa en un contexto relativamente amplio, casi como si todo lo que retenemos estuviera sostenido por la 'memoria'. No veo particularmente útil esta metáfora de espacio de almacenamiento cuando considero cómo aprende la gente y el trabajo que se requiere para que, en una fecha posterior, esté disponible algo nuevo que se haya encontrado, para que ciertas acciones lleguen a realizarse con mayor perfección o para que se desarrollen ciertos significados. Estoy particularmente interesado en examinar el aprendizaje en términos de la naturaleza del trabajo que alguien debe o no realizar para que ocurra el aprendizaje.

De modo que no responderé a la pregunta '¿Qué es la memoria?', porque quiero atender a la actividad humana involucrada en un proceso de aprendizaje en vez de atender a los fenómenos mentales o físicos que de manera conjunta se denominan 'memoria'. Me preocupa más la pregunta '¿Qué es memorizar?' y es una pregunta que trataré de responder en primer lugar, estableciendo diferencias entre la actividad de memorizar y otras actividades de aprendizaje.

Hacia la mitad del siglo XVIII, Rousseau (1762/1986, p. 110) criticaba así la enseñanza de la geometría: "En cambio de hacernos descubrir demostraciones, nos las dictan; en vez de enseñarnos a razonar, sólo se emplea nuestra memoria."

En palabras de Rousseau, las demostraciones pueden ser razonadas en vez de memorizadas. En mi fraseología, algo que tiene calidad de necesario se presenta como si fuera arbitrario (saber aceptado) y tuviera que ser memorizado. Se requiere un trabajo bien diferente de parte de los que aprenden si deben razonar (en vez de memorizar), evocando habilidades diferentes a las que se requieren para memorizar. Por ejemplo, Rousseau se refiere luego a la imaginación. El razonamiento requiere usar la consciencia de las relaciones y propiedades que tienen que ver con el teorema que se quiere demostrar, mientras que la memorización no requiere de ello. Es perfectamente posible memorizar una demostración como una colección de símbolos arbitrarios puestos en un cierto orden y en ciertas posiciones particulares. Debo confesar que sé de este caso ya que aprobé algunos exámenes de mi grado en matemáticas sobre esta base. La reproducción de los símbolos involucrados en una demostración no implica que se esté dando significado a la relación de los símbolos con las matemáticas involucradas en el teorema.

Skemp (1987, p. 15) señaló que dentro de su investigación:

> parecía haber una diferencia cualitativa entre dos clases de aprendizaje que podemos denominar aprendizaje habitual, o memorístico, y aprendizaje que involucra la comprensión, es decir, aprendizaje inteligente.

Como lo señalaba un estudiante mío en una de sus reflexiones:

> Personalmente, no puedo aprender cosas memorizando una vasta cantidad de hechos porque no soy bueno para ello. Aprendo cosas cuando trato de comprenderlas. De esa forma, evito tener que aprender una cantidad de hechos. Por eso prefiero las matemáticas y las ciencias, porque mi conocimiento de esas materias depende más de mi comprensión que de mi habilidad para memorizar hechos.

Tales comentarios indican que se advierte, en un nivel personal, la diferencia entre memorizar y otros tipos de actividad en los que lo que se produce se genera, de alguna manera personalmente, a través de la propia consciencia en lugar de reproducir la consciencia o el conocimiento de otro. Pero, ¿qué es lo que está involucrado en el intento de memorizar? La memorización es de todas maneras una actividad compleja que, al contrario de lo que expresa la anterior cita de Skemp, con frecuencia requiere una actividad 'inteligente'.

Wood (1988, p. 60) aludió a

> la *multiplicidad* de actividades intelectuales que por lo común (y de manera errada) se juntan bajo denominaciones tales como 'memoria'.

Él analizó el contraste entre la dificultad de los niños en edad preescolar con ciertas tareas de memoria en experimentos que realizó y el hecho de que muchos de los niños podrían, por ejemplo, evocar dónde vieron por última vez una cámara si se les dice que se ha perdido y se les pide que la encuentren. Wood comentaba que:

> Las habilidades puestas en juego por niños en edad preescolar en las situaciones que se acaban de esbozar [encontrar la cámara] son de diferente clase a la de aquellas exigidas en los primeros experimentos presentados, que demandaban la memorización 'deliberada'. Básicamente, lo que los niños aprenden y recuerdan son cosas que surgen como consecuencia 'natural' y con frecuencia *incidental* de sus actividades. En el juego en grupo, no se necesita alertar a los niños de preescolar para indicarles que se espera que ellos recuerden la localización de un objeto. La exposición deliberada de un cuerpo de información para someterla a la memoria es un asunto claramente diferente de los ejemplos de recuerdo espontáneo, en donde lo que se evoca es lo que uno realmente ha manipulado, a lo que ha asistido, o de lo que ha sido consciente en el curso de alguna actividad práctica. (p. 60)

La diferencia entre *la exposición deliberada de un cuerpo de información para someterla a la memoria* y otras formas en las que algo puede ser evocado, como el último lugar en que fue vista una cámara, es muy significativa en términos de la naturaleza del trabajo personal involucrado. Para darse cuenta de esta diferencia, trate de memorizar la 'palabra' *pimolitel* y trate de pronunciar dicha 'palabra' al finalizar la lectura de este artículo, sin haberla releído. También le invito a evocar algún detalle de un salón que haya visitado en pocas ocasiones, quizás una sola vez.

Estos dos ejemplos difieren en lo siguiente:

a. el trabajo realizado en el momento de encontrar por primera vez la palabra/el salón;

b. el trabajo realizado en el tiempo transcurrido entre el primer encuentro y la solicitud de recordar la palabra o evocar detalles del salón;

c. el trabajo requerido en el momento en que se pidió recordar o evocar.

Sugiero, además, que las diferencias usualmente son como se muestra en la Figura Nº 2.

Tiempo	**Naturaleza del trabajo requerido**	
	Recordar una palabra arbitraria	**Evocar detalles de un salón poco visitado**
(a) En el momento del encuentro.	Actividad consciente para 'comprometer a la memoria'.	No hay actividad consciente para 'comprometer a la memoria'. Pero sí involucramiento en una actividad (quizás, nada asociado con el detalle del salón en sí mismo) estando en el salón.
(b) Entre el encuentro y la solicitud de recordar/evocar.	Práctica frecuente.	Ninguna.
(c) En el momento de pedir que se recuerde/evoque.	Actividad consciente para reproducir la palabra.	Actividad consciente de 'regresar' a estar en el salón y expresar verbalmente (quizás por primera vez) algún detalle.

Figura Nº 2. Diferencias entre recordar y evocar

Mi experiencia anecdótica de llevar a cabo una actividad similar con varios grupos de personas es que el éxito en recordar la palabra fue limitado. Usualmente menos de la mitad de los participantes tuvo éxito en recordar la palabra después de aproximadamente una hora. Los que tuvieron éxito y de hecho algunos de los que no lo tuvieron, reportaron haber realizado algún trabajo durante la hora y todos los que se involucraron con la tarea (como algunos, quizás usted, eligieron no hacerlo) reportaron una actividad consciente en el momento en que se les presentó la palabra. Encontré que había muy poco éxito en evocar después de algunas semanas, a pesar de que algunas personas hicieron un considerable esfuerzo consciente en los primeros minutos, quizás más tiempo, después de haberles dicho la palabra.

En cuanto a la petición de evocar algún detalle de un salón raramente visitado, todos pudieron expresar algún detalle, lo que no es sorprendente ya que en cualquier caso se podía elegir otro salón. Sin embargo, esto no nos aleja del hecho de que muchas personas expresaron una cantidad considerable de detalles, y ninguno de ellos 'comprometió a la memoria' de manera consciente. De hecho, no se llevó a cabo ningún trabajo consciente para mantener esta información antes de hacer la petición, puesto que nadie sabía que se les iba a solicitar tal cosa. Más aun, puede haber transcurrido largos períodos —meses, quizás años— entre la última y quizás única, visita al salón en referencia y el momento en que se hizo esta solicitud.

Restringiré el uso que hago del término *memorización* para describir un proceso consciente en el que alguien, *en el momento de recibir información y después de ello*, activa técnicas para mantener esa información de manera que esté disponible en un futuro. Esto contrasta con la actividad de evocar detalles de un salón, lo cual tiene que ver con la afectividad, la capacidad de describir imágenes y el acceso a ellas. (No exploraré más en este artículo el detalle de lo que está involucrado en la evocación).

APOYO A LA MEMORIA

El ámbito de la memoria tiene que ver con aquellas cosas que son arbitrarias —nombres y convenciones— debido a su naturaleza como entidades socialmente acordadas. Un papel del profesor es informar a los estudiantes de lo que es arbitrario. Sin embargo, si el papel del profesor para ahí, entonces los estudiantes tienen que motivarse a sí mismos para realizar el trabajo requerido en el momento de comenzar el proceso de memorización, y hacer acopio de disciplina para continuar la práctica en las semanas o meses por venir.

Por tanto, ¿qué puede hacer un profesor para apoyar a los estudiantes en su tarea de memorizar? Una respuesta común es que el profesor evalúe regularmente. Esto proporciona una oportunidad para que los estudiantes practiquen aquellas cosas que han recordado satisfactoriamente, y se hagan conscientes de aquellas cosas de las que no eran conscientes. Esto puede ser un ejercicio útil, si se da tiempo y atención para que los estudiantes identifiquen qué cosas no han recordado y para que comiencen de nuevo el proceso de memorización. Sin embargo, con mucha frecuencia no se dedica tiempo y atención a tales actividades; en cambio, algunos profesores sienten que su trabajo queda concluido al hacer la evaluación y pasan a otros tópicos una vez que se obtienen las respuestas.

Esto significa que sólo aquellas cosas que han sido memorizadas se practican y la otra mitad del trabajo queda sin atender. Al mismo tiempo, se dicen nuevas cosas a los estudiantes y hay más cosas para memorizar. Así, gradualmente, se olvidan más cosas y no se dedica tiempo a renovar y mantener el proceso de memorización. Comienza y continúa un proceso de olvido que dura la mitad de la vida: poco importa que los estudiantes retengan relativamente tan poco, que los profesores se sientan obligados a enseñar las mismas cosas año tras año y que los estudiantes terminen por tener siempre mal las respuestas en sus exámenes.

Paso a considerar lo que está involucrado en la memorización y algunas formas en que un profesor debería actuar, si pretende ayudar a los estudiantes a memorizar y usar nombres y convenciones dentro de un contexto matemático apropiado. El proceso para memorizar un nombre involucra no sólo memorizarlo sino también vincularlo a propiedades y relaciones apropiadas (véase la Figura Nº 3).

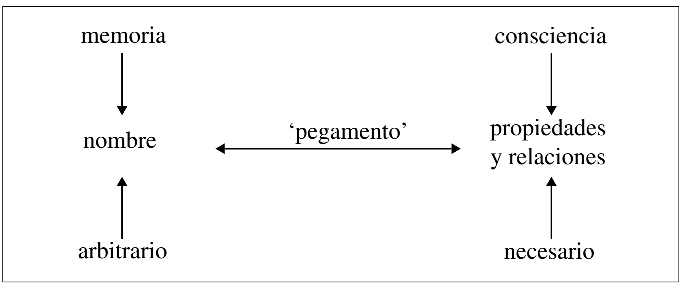

Figura Nº 3. Vinculación de un nombre con sus propiedades y relaciones asociadas

Los estudiantes pueden ser capaces de memorizar una palabra, tal como 'isósceles', pero otra cosa es asociarla con propiedades particulares de un triángulo. El 'pegamento' para ayudar a pegar el nombre a ciertas propiedades o relaciones también debe considerarse, lo mismo que la memorización del nombre. Por tanto, el aprendizaje de un nombre (lo que está en el ámbito de la memoria) está vinculado con el ámbito de la consciencia a través de propiedades y relaciones asociadas con tal nombre. Es una decisión pedagógica determinar cuándo poner atención a cada uno de estos dos ámbitos. ¿Debe enfatizarse inicialmente el aprendizaje del nombre? O, ¿deben enfatizarse primero las propiedades y las relaciones? O, ¿deben atenderse tanto el nombre como las propiedades y relaciones simultáneamente? Consideraré a continuación, una a una, cada posibilidad.

Énfasis inicial en nombres y convenciones

Enfatizar nombres puede ser útil puesto que algunas palabras no son usuales, como es el caso de *conmutativo*, y además no tan fáciles de pronunciar para algunos alumnos. Emma Leaman me ha contado que gasta algún tiempo con los estudiantes pidiéndoles que canten una nueva palabra de manera que se ejerciten en los movimientos físicos de sus bocas, lenguas, etc., requeridos para pronunciarla. Esto ayuda con la práctica de pronunciar la palabra, pero sigue existiendo la tarea de ayudar a los estudiantes a vincular la palabra con ciertas propiedades. Un enfoque común para formar este vínculo es establecerlo como parte de una definición de la palabra: para un ejemplo, véase la Figura Nº 4.

Definición
Una operación, $\oplus$, en un conjunto S, es conmutativa si $x \oplus y = y \oplus x$ para todo x y y en S.

Figura Nº 4. Una manera de presentar, por primera vez, una palabra

Esto mantiene el énfasis en la memoria. La palabra no es solamente algo para memorizar, sino que la presentación de una definición puede estimular a un estudiante a percibir que la *propiedad* que hace parte de la definición, debe ser memorizada también. En esta etapa, la propiedad no es algo de lo que necesariamente los estudiantes estén conscientes.

El lema *primero la palabra - luego las propiedades* puede conducir a una carga *extra* para la memoria al situar en el ámbito de la memoria tanto la palabra como las propiedades Esto sólo cambiará si el estudiante logra desarrollar una consciencia de la propiedad, a partir de lo que se establece en la definición. La necesidad de generalidad dentro de una definición puede significar que el lenguaje no hace particularmente accesible la propiedad para los estudiantes. Más aun, no siempre se da tiempo para que el estudiante convierta un enunciado dado por el profesor (saber aceptado) en algo que conozca a través de su propia consciencia.

Si se da tiempo y atención a esto, entonces la propiedad puede volver a su lugar correcto, el del ámbito de la consciencia. Sin embargo, con frecuencia este no es el caso y por tanto las matemáticas se pueden percibir como algo para memorizar, más que para comprender. El asunto de ayudar con el 'pegamento' —la asociación entre palabra y propiedades— merece atención todavía. Una definición sólo presenta el vínculo; no hace nada para ayudar a establecerlo.

La visualización y asociación de imágenes son usadas comúnmente por quienes se especializan en la habilidad de recordar vastas colecciones de cosas arbitrarias (véase por ejemplo, Luria, 1969). Esto puede ser utilizado por los profesores al ofrecer imágenes para ayudar a vincular palabras y convenciones con propiedades y relaciones. De hecho, los estudiantes mismos lo utilizan frecuentemente en la vida diaria como técnica para ayudarse a memorizar ciertas cosas. Por ejemplo, la memorización de un número telefónico mediante la imagen visual y cinéstesica de un dedo moviéndose sobre el teclado del teléfono. Un amigo mío describe el asunto moviendo su dedo sobre un teclado imaginario y mirando a dónde se dirige el dedo cuando se le pregunta por un número telefónico particular.

En muchas clases, he trabajado con la tarea de *pensar un número* (véase OU, 1991 para más detalles) en la que describo operaciones que realizo sobre un número desconocido y doy el resultado final. Desde mi perspectiva, el objetivo de la tarea es ayudar a que los estudiantes articulen las operaciones inversas involucradas para llegar a obtener mi número y a que puedan escribir las expresiones involucradas con la notación algebraica 'correcta'. Durante esta tarea he usado imágenes auditivas para ayudar a que pongan atención a un aspecto de la notación arbitraria. Por ejemplo, en una clase estaba describiendo lo que estaba haciendo con mi número y en el tablero obtuve lo siguiente:

$$\frac{25\left(\frac{x-16}{4}+16.289331\right)-2}{43.92}$$

A continuación iba a sumar 15, y varios estudiantes escribieron el signo de adición continuando, en la parte superior de la expresión y no después del signo de división.

$$\frac{25\left(\frac{x-16}{4}+16.289331\right)-2+15}{43.92}$$

Por tanto, ofrecí una imagen para ayudar a los estudiantes a retener esta convención arbitraria dentro de la notación algebraica. Cuando decía *sumen*, con la tiza apuntaba al extremo izquierdo del signo de división y silbaba una sola nota a medida que iba recorriendo la línea de división hacia la derecha y luego paraba de silbar. Mi mano continuaba moviendo la tiza en la misma dirección de la línea de la división y escribía un signo de adición.

$$\frac{25\left(\frac{x-16}{4}+16.289331\right)-2}{43.92}+$$

La imagen auditiva no es usual y he encontrado que algunas veces permanece en los estudiantes cuando ellos comienzan a escribir sus propias expresiones. Algunas veces escucho a los estudiantes hacer un ruido similar a medida que van trazando la línea de división y tienen que poner un signo de adición o sustracción a continuación de dicha línea. Se pueden retener las imágenes sin tener que memorizar nada. Junto con la imagen va el movimiento y la posición del signo de adición o sustracción.

Un recurso mnemotécnico contenido en la 'palabra' SOHCAHTOA[2] se suele usar para que los estudiantes memoricen las razones correspondientes a los nombres 'seno', 'coseno' y 'tangente'. Hay, por otra parte un recurso visual consistente en un triángulo, como el de la Figura Nº 5 con el que se ayuda a los estudiantes a construir una ecuación apropiada, dependiendo de lo que se quiera expresar: el seno de la medida de un ángulo dado, la longitud del cateto opuesto, o la longitud de la hipotenusa.

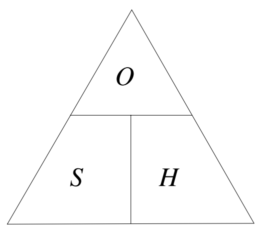

Figura Nº 5. Una imagen diseñada para ayudar con la trigonometría

Si es sen θ el que se debe encontrar, entonces la imagen se lee como $sen\theta = \frac{O}{H}$ porque visualmente 'O' está arriba de 'H'. De manera similar, si se requiere la hipotenusa, entonces se leerá como $\frac{O}{sen\theta} = H$. Si fuera el cateto opuesto el que se requiere, entonces se lee como $O = sen\theta \times H$, porque la 'S' y la 'H' son vecinas en la misma línea. Esto es claro y ayuda a la memoria.

2. Aquí S representa seno; O, cateto opuesto; H, hipotenusa; C, coseno; A, cateto adyacente; T, tangente. [N.T.]

Sin embargo, no hay intento de educar la consciencia de alguien acerca de por qué estas variaciones son como son; solamente se ayuda a la memorización. Varios profesores me han expresado cuán exitosa es esta imagen y yo les creo. Es una imagen poderosa que ayuda a la *memoria*. No obstante, la manipulación de una ecuación está en el ámbito de la consciencia, y esta imagen evita completamente cualquier sentido de lo necesario. Esta imagen sólo sirve de ayuda para ecuaciones de la forma $a = \frac{b}{c}$ y un estudiante que encuentre una forma diferente de ecuación tal como $v = u + at$ no podrá hacer absolutamente nada para manipular esta ecuación, a partir de tal imagen.

La imagen triangular, a la que me he referido, produce resultados de corto plazo y altamente limitados. Ayuda a que un estudiante no tenga en cuenta la consciencia y en cambio memorice y en tal situación subestime la necesidad de ser capaz de manipular las ecuaciones lineales conscientemente, sabiendo lo que hace y por qué lo hace y que tal consciencia se puede aplicar a una variedad infinita de ecuaciones.

Énfasis inicial en propiedades

Para enfatizar en primer lugar las propiedades, se puede diseñar una tarea en la que éstas puedan convertirse en el foco de atención. Al mismo tiempo, el profesor tiene que hacer una decisión consciente para no introducir la palabra asociada hasta más tarde. Por ejemplo, considérense dos tareas: la primera puede involucrar el uso de los números 1, 2 y 3 junto con '-' para tener tantas respuestas como sea posible, con las reglas siguientes: los números no se pueden 'combinar' por yuxtaposición para obtener 12, por ejemplo, y los tres números deben usarse una y solo una vez. A esto sigue una segunda tarea similar, en la que se usan los mismos números pero con '+'.

Probablemente los estudiantes comentarán (entre otras cosas) que aunque hay diversas soluciones diferentes para '-' (tales como $3 - 2 - 1 = 0$; $2 - 3 - 1 = -2$; $1 - 2 - 3 = -4$), sólo es posible una respuesta con '+'. La discusión sobre el por qué ocurre esto, puede conducir a advertir conscientemente que $3 - 2$ y $2 - 3$, por ejemplo, son diferentes mientras que $3 + 2$ y $2 + 3$ son iguales. El momento en el que los estudiantes se dan cuenta, de manera consciente, de propiedades relevantes es el momento para introducir la palabra asociada. Entonces la palabra se pega a la consciencia —hay un gancho del que se puede colgar el nombre.

El principio general que se aplica aquí es introducir una palabra sólo cuando las propiedades asociadas se han establecido y constituyen el foco de la atención del estudiante. Esto fortalece el contacto inicial entre la palabra y sus propiedades relacionadas. Ayudar a que el 'pegamento' actúe requiere que esto sea solamente el principio del proceso, continuando con actividades tales como la observación de otras operaciones y otros conjuntos numéricos, el uso frecuente de la palabra por parte del profesor, e incluso el uso general de la palabra a través de discusiones que el profesor mismo promueve.

Con respecto a este ejemplo, señalaré que se trata de una tarea pedagógica creada artificialmente y diseñada para 'forzar' una consciencia. Uso la palabra 'forzar' en este contexto siguiendo el uso que Gattegno hace de ella (véase por ejemplo Gattegno, 1987), para significar que comprometerse en la tarea tiende a dar como resultado que el estudiante se hace consciente de una propiedad predeterminada por el profesor.

He dicho que para que el pegamento actúe, es importante que la palabra se use continuamente dentro de las discusiones. Aunque se anime a los estudiantes a usar la palabra, en realidad algunos pueden no querer hacerlo. Entonces, ¿qué puede hacer un profesor para que incluso los alumnos reacios practiquen realmente el uso de la nueva palabra? Aquí también puede usarse la idea de 'forzar', diseñando una tarea artificial que requiere (de hecho, *demanda* como parte de la estructura de la actividad) usar una y otra vez la palabra.

Como ejemplo, considere algunas palabras asociadas con los triángulos, tales como 'equilátero', 'isósceles', 'rectángulo', 'acutángulo' y 'obtusángulo'. La tarea incluye tomar copias del conjunto de triángulos de la Figura Nº 6. Los estudiantes trabajan en parejas en las que sólo uno de los dos tiene los dibujos de las formas que se quieren obtener y que aparecen en la Figura Nº 7. Este estudiante tiene que conseguir que su compañero arme cada una de las formas que se quieren obtener, sucesivamente. Hay, sin embargo, reglas estrictas de comunicación:

a. no se permite señalar ni directa (i.e., señalar físicamente) ni indirectamente (e.g., decir "el que está cerca de usted");

b. sólo se permite hablar a la persona que tenga las formas que se van a construir;

c. todas las referencias a los triángulos deben comenzar con una o más de las siguientes palabras: equilátero, isósceles, rectángulo, acutángulo obtusángulo.

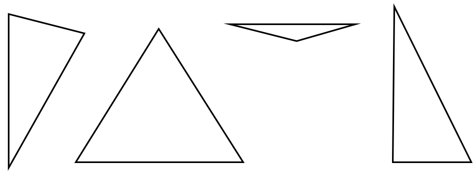

Figura Nº 6. Triángulos dados

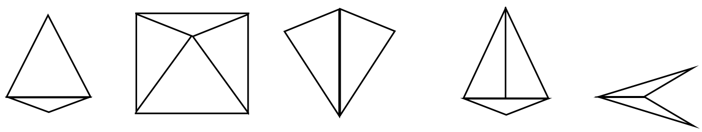

Figura Nº 7. Formas para construir

Estas reglas, creadas artificialmente, están diseñadas para 'forzar' la práctica de nombrar mientras se dirige la atención a una tarea diferente, en este caso, creación de ciertas formas. Así que en vez de mirar el dibujo de una de las formas dadas y mover físicamente los triángulos para armarla, las reglas de la tarea fuerzan las cosas para que el lenguaje tenga un papel mediador en el logro de la meta deseada (véase Figura Nº 8).

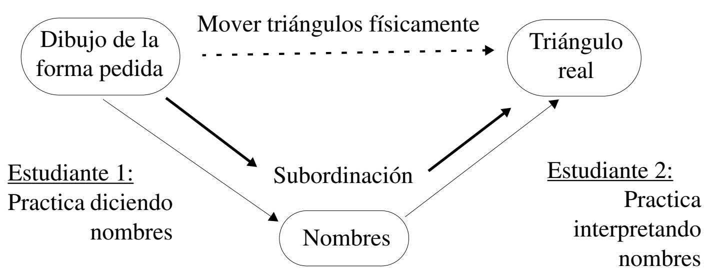

Figura Nº 8. Una tarea diseñada pedagógicamente para subordinar la práctica de nombrar dentro de una tarea creada artificialmente

Este es un ejemplo pedagógico explícito del papel que todos los signos juegan como actividad mediada. Como Vygotsky (1978, p. 54) comentaba, su análisis proporcionó:

> una base aceptable para asignar el uso de signos a la categoría de actividad mediada, ya que la esencia del uso del signo consiste en afectar el comportamiento del hombre a través de signos.

Una tal tarea involucra las características de subordinación (Hewitt, 1996) en donde se requiere practicar algo para realizar otra tarea. Más aun, el aspecto que ha sido subordinado, en este caso el nombrar las formas, tiene un efecto directo sobre la tarea principal. Por ejemplo, si el Estudiante 1 nombra incorrectamente el triángulo que se quería que el Estudiante 2 moviera, se observará que el Estudiante 2 toma un triángulo distinto del que se requería. Así, el Estudiante 1 obtiene realimentación acerca de lo acertado o no de lo que ha dicho.

De la misma manera, la interpretación del Estudiante 2 acerca de lo dicho por el Estudiante 1 recibe realimentación con lo que dice el Estudiante 1 (e.g., "No; me gustaría mover el triángulo acutángulo isósceles, no el obtusángulo"). De hecho, con esta tarea se practican varias cosas, no solamente las propiedades de triángulos para dirigir y manipular los triángulos en sus posiciones apropiadas. Así que se presta atención a las matemáticas de las propiedades de triángulos a la vez que se sigue practicando el uso de las componentes arbitrarias, los nombres. Esto quiere decir que la práctica de lo arbitrario no significa que la actividad matemática tenga que relegarse. La subordinación ofrece una forma de combinar los dos aspectos dentro de una tarea diseñada apropiadamente desde el punto de vista pedagógico.

La subordinación se logra a través del diseño de reglas de una tarea para forzar a los estudiantes a que se involucren en algo (llamémoslo A) para trabajar en la tarea principal (llamémosla B). En el ejemplo anterior, A era un conjunto de nombres y B era la tarea de ajustar triángulos de una determinada manera. Sin embargo, el principio general se puede aplicar a otras situaciones. Por ejemplo, en la tarea *¿Nos encontramos?*, el profesor y el alumno tienen diferentes posiciones iniciales en una cuadrícula. Al estudiante se le pide que se mueva y que dibuje una línea a donde se movió. El profesor se moverá al mismo tiempo de acuerdo con una regla tácita conectada con el movimiento del estudiante. El propósito es que el estudiante (sin saber la regla de antemano) se mueva a un lugar en donde logren encontrarse con el profesor. Para un ejemplo de un juego en el que la regla tácita del profesor consiste en una rotación de 90^{o} en la dirección de las agujas del reloj, véase la Figura Nº 9 en la página siguiente.

Una vez que los estudiantes han visto una o dos instancias del juego, pueden jugarlo en parejas con las mismas o diferentes reglas para el movimiento. El juego ofrece muchas posibilidades de aprendizaje acerca de transformaciones y simetría en las que no profundizaré aquí. Sin embargo, mientras este aprendizaje esté teniendo lugar es posible, al mismo tiempo, subordinar otra parte del currículo de matemáticas: los vectores y la notación para ellos. Como se ha descrito, el juego consiste en que un estudiante dibuje cada una de las líneas. En cambio de esto, se puede crear una regla artificial (y significativa desde el punto de vista pedagógico) en donde no se permita al estudiante dibujar o señalar, sino sólo escribir un vector tal como $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

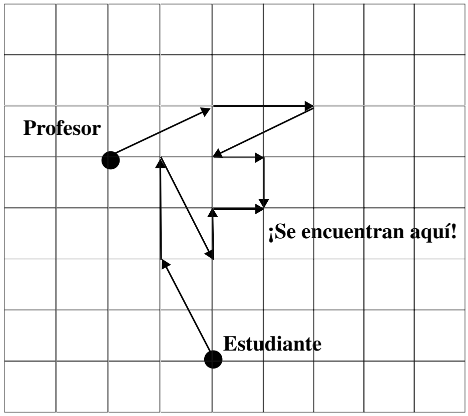

Figura Nº 9. Instancia del juego ¿Nos encontramos?

El profesor (o quien quiera que esté jugando ese papel) dibuja entonces el movimiento de acuerdo con el vector escrito, seguido de su propio movimiento según su regla geométrica secreta (existe por supuesto la opción de escribir también el movimiento del profesor como un vector). Esto fuerza la práctica de las convenciones arbitrarias de la notación vectorial mientras se progresa en asuntos que tienen que ver con transformaciones y simetría. Describo esto como *práctica mientras se progresa* —se practica una parte del currículo mientras se progresa en otra parte del mismo.

Sostuve en Hewitt (1996) que este tipo de práctica es particularmente efectivo para ayudar a que algo se vuelva fluido, que es lo que clásicamente se requiere al adoptar lo arbitrario. La naturaleza de lo arbitrario es tal que se requiere adoptarlo y usarlo con fluidez en vez de que sea el foco de atención y consideración consciente. Por tanto, practicar con lo arbitrario mientras se progresa con lo necesario es particularmente poderoso, puesto que tiene lugar la práctica efectiva de lo arbitrario mientras no se 'malgasta' tiempo haciendo esto, ya que simultáneamente la atención está dirigida hacia las matemáticas de lo necesario.

El computador puede ser un recurso poderoso para la noción de subordinación de ciertos nombres y convenciones, puesto que siempre se requiere que haya una manera en que un estudiante se comunique con el computador. Como señala Ainley (1997) acerca del papel que el computador juega con su 'profesor' (el autor prefiere considerar que un estudiante 'enseña' al computador y no lo contrario):

> el computador es pedante ya que regula su comunicación con su profesor aceptando sólo las instrucciones que siguen convenciones particulares. (p. 93)

La elección cuidadosa por parte de quienes desarrollan software puede 'forzar' a que la comunicación se dé a través de convenciones y nombres arbitrarios que luego deben ser practicados mientras que la tarea principal del software involucra oportunidades y material para trabajar en lo necesario.[3]

Énfasis inicial tanto en propiedades como en nombres

Los nombres tienen que ser proporcionados por el profesor ya que ellos son arbitrarios; las propiedades son necesarias y como tales se pueden conocer a través de la consciencia. Por tanto, el hacer énfasis inicialmente tanto en las propiedades como en los nombres requiere poner atención en llegar a ser consciente de nuevas propiedades mientras se presenta, al mismo tiempo, un nuevo nombre. Abordar el nombre 'isósceles' implica una tarea inicial en la que el objetivo para los estudiantes es llegar a ser conscientes de las propiedades asociadas con los triángulos isósceles a la vez que se les informa de la palabra 'isósceles'.

Una tarea como esta involucra una gran colección de triángulos diferentes (o dibujos de triángulos). Un profesor puede señalar un triángulo y enunciar: "este es un triángulo isósceles", luego señalar otro triángulo haciendo el mismo enunciado, o quizás puede decir: "este no es un triángulo isósceles". Se invita a los estudiantes a hacer un enunciado similar sobre un triángulo diferente a la vez que ellos piensan en si se trata o no de un triángulo isósceles. Después de cada enunciado, el profesor dirá si el enunciado es o no correcto.

Se puede variar esta actividad involucrando a los estudiantes en la tarea de dibujar un triángulo isósceles, o puede ser que el profesor introduzca más de un nombre. Insisto aquí en que tal tarea se diseña para una clase de estudiantes que no conocen el término 'isósceles'. Esta *no* es una tarea de práctica ni está diseñada para evaluar si alguien recuerda el término (aunque por supuesto se puede usar de tal manera). Así que comienza con el uso de un nombre desconocido para los estudiantes y de cuyas propiedades asociadas

3. Nathalie Sinclair ha desarrollado una versión del juego *¿Nos encontramos?* (denominada *Encontrando a Lulu*) para la red, en http:// hydra.educ.queensu.ca/maths/ que tiene la característica de forzar la comunicación a través de vectores y coordenadas al mismo tiempo que se realiza la tarea.

no son conscientes los alumnos en esta etapa. Al usar este tipo de tareas en las clases, he encontrado que los alumnos no necesitan que les explique lo que deben hacer. Invariablemente quedan intrigados y deseosos de trabajar en lo que es un triángulo isósceles. Naturalmente, algunos eligen ser perezosos y quieren que yo les diga pero no les toma mucho tiempo advertir que no se los voy a decir.

Un ejemplo equivalente, usando tecnología, proviene del uso de un archivo particular del programa *Active geometr*y[4] de la colección de archivos y tareas para usar con Geometer´s Sketchpad (o Cabri-Géomètre). Este archivo —*Quadinc*— se refiere a nombres de cuadriláteros y tiene un cuadrilátero en la pantalla que se puede manipular. Para cada una de las formas que tome el cuadrilátero, aparecen en la pantalla los nombres asociados a tales formas (véase en la Figura Nº 10 un ejemplo en el que la forma de un cuadrilátero está asociada a las palabras ‘cometa’ y ‘cíclico’).

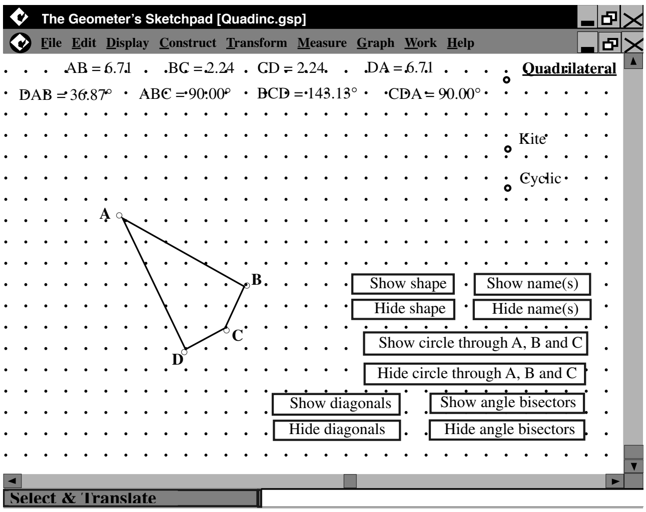

Figura Nº 10. Todos los nombres asociados con la forma aparecen sobre la pantalla y esto cambia dinámicamente al tiempo con la forma

A algunos profesores les parece que es necesario enseñar a los estudiantes las propiedades de cada uno de los nombres antes de usar este archivo. Sin embargo, el archivo ofrece la oportunidad para que los estudiantes encuentren, al mismo tiempo, estos nombres (algunos de los cuales no conocían antes) y las propiedades abstractas relacionadas.

4. Tanto *Active Geometry* como *Geometer´s Sketchpad* o *Cabri Géomètre* están disponibles en: Association of Teachers of Mathematics, 7 Shaftesbury Street, Derby DE23 8YB, U.K.

Tales tareas hacen que los estudiantes trabajen en un forma muy similar a como lo tuvieron que hacer cuando niños. Cuando comenzaban a aprender su lengua materna, nadie les explicó la primera colección de palabras que aprendieron ya que no tenían el lenguaje para comprender cualquier explicación que se les diera. Los adultos usaban unas palabras y a los niños les tocaba abstraer los significados del contexto dentro del cual se usaban las palabras. El hecho de que esos niños pudieran adquirir su lengua materna y ahora estén sentados en la clase de matemáticas comunicándose a través de tal lengua, significa que todos los niños tienen la capacidad de abstraer propiedades. Tristemente, esta capacidad parece aprovecharse rara vez en la clase de matemáticas, dado que muchos profesores creen que deben explicar las propiedades a los estudiantes y dar las definiciones de las palabras que usan.

Este enfoque, en el que se pide a los estudiantes que abstraigan significado de las palabras mientras participan en una tarea que involucra el uso de tales palabras tiene vínculos con lo que Lave y Wenger (1991, p. 29) denominan ‘participación periférica legítima’:

> [La participación periférica legítima] tiene que ver con el proceso mediante el cual los recién llegados se hacen parte de una comunidad de práctica. Compromete las intenciones de una persona para aprender y el significado de aprendizaje se configura a través del proceso de llegar a ser un participante cabal en una práctica sociocultural. Este proceso social incluye, en realidad subsume, el aprendizaje de habilidades muy desarrolladas.

Los niños pequeños comienzan a participar dentro de la práctica de la conversación en una lengua particular mientras que realizan otras prácticas asociadas con dicha lengua. De esa manera, a estos mismos niños, pero ahora como niños mayores involucrados en la clase de matemáticas con el archivo de computador mencionado antes, se les pide que participen en una práctica que inicialmente les es desconocida. Lave y Wenger prosiguen diciendo:

> Para los recién llegados, entonces el propósito no es aprender *a partir de*l habla como un sustituto de la participación periférica legítima; el propósito es aprender *a* hablar como una clave para legitimar la participación periférica. (p. 109)

Quizás con mucha frecuencia los enfoques de enseñanza esperan que los estudiantes aprendan *a partir de* lo que se habla (e.g., recibiendo explicaciones y definiciones de un profesor) en vez de aprender *a* hablar en formas particulares (e.g., llamándoseles a abstraer propiedades asociadas con ciertas palabras mientras se comprometen en una actividad que usa esas palabras).

RESUMEN

La división del currículo de matemáticas en lo arbitrario y lo necesario trae implicaciones para los respectivos trabajos que profesores y estudiantes tienen que realizar en la clase. En este artículo he considerado implicaciones que el asunto de aprender y enseñar aquellas cosas que son arbitrarias —nombres y convenciones— tiene para estudiantes y profesores. Lo arbitrario está en el ámbito de la memoria y los estudiantes tienen la labor de memorizarlo. Los profesores tienen la labor de informar a los estudiantes de lo arbitrario pero también de asistir a los estudiantes en el trabajo de memorización. (A propósito, ¿cuál fue la palabra que les pedí que memorizaran?)

Esto se puede hacer a través del uso de *imágenes* y *asociación*, o a través de la *subordinación* de lo arbitrario al trabajo que involucra la consideración de lo que es necesario —*práctica mientras se progresa*. De manera alternativa, se puede apelar al ámbito de la consciencia para aquellas situaciones que tienen que ver con nombrar propiedades. El nombre se puede usar mientras los estudiantes se involucran en el uso de su consciencia para *abstraer* las propiedades asociadas con el nombre.

Este lado de la división del currículo —lo arbitrario— no es en donde se encuentran las matemáticas y, aun así, se puede asignar una cantidad considerable de tiempo de las clases y espacio del libro de texto para introducir, practicar y evaluar lo arbitrario. Sugiero que esto es una indicación de que el trabajo de ayudar a los estudiantes a la memorización de lo arbitrario no es tan efectivo como debiera y que considerar este trabajo como un reto pedagógico serio debería producir considerables frutos para una memorización más efectiva, que dé como resultado la liberación de tiempo para aquello en lo que realmente residen las matemáticas, es decir, lo necesario.

Que las matemáticas no residan en el ámbito de lo arbitrario no riñe con el papel vital que juegan los nombres y las convenciones dentro del aprendizaje de las matemáticas. Ambos hechos proporcionan formas en que puede progresar la actividad matemática. Que se puedan ver de esa manera, es lo que es importante para los estudiantes. Con mucha frecuencia, se les pide a ellos memorizar y practicar un nombre o una convención como si fuera un fin en sí mismo y no como un vehículo a través del cual comunicar la consciencia matemática y el progreso con tareas matemáticas.

Con frecuencia también se pide a un estudiante memorizar un nombre *per se,* en vez de propiciarle una experiencia consciente acerca de una propiedad matemática con suficiente significación como para que amerite darle un nombre ya que la propiedad considerada es tal que se vincula con las actividades matemáticas del presente y del futuro. El aprendizaje de lo arbitrario debe ponerse en el lugar adecuado, es decir, debe ligarse íntimamente

con la educación de la consciencia (matemática). La tercera y última parte de este artículo se centrará en el reto pedagógico de educar la consciencia (matemática).

REFERENCIAS

Ainley, J. (1997). Roles for teachers and computers. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 90-98). Helsinki: Lahti Research and Training Centre, University of Helsinki.

Gattegno, C. (1987). *The science of education: Part 1- Theoretical considerations.* New York: Educational Solutions.

Hewitt, D. (1996). Mathematical fluency: The nature of practice and the role of subordination. *For the Learning of Mathematics, 16* (2), 28-35.

Hewitt, D. (1999). Arbitrary and necessary: Part 1 A way of viewing the mathematics curriculum. *For the Learning of Mathematics, 19* (3), 2-9.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Luria, A.R. (1969). *The mind of a mnemonist*. London: Jonathan Cape.

OU (199l). *Working mathematically on symbols in key stage 3* (videotape). Milton Keynes, Buck: The Open University.

Rousseau, J. (1762/1986). *Emile.* London: Dent (Everyman's Library).

Skemp, R.R. (1987, segunda edición). *The psychology of learning mathematics*, Harmondsworth, Middlesex: Penguin Books.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wood, D. (1988). *How children think and learn: The social contexts of cognitive development*. Oxford: Basil Blackwell.

Dave Hewitt
School of Education
University of Birmingham
Edgbaston
Birmingham
B15 2TT
United Kingdom