

UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN EN EL CONTEXTO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Salvador López-López, Guadalupe Cabañas-Sánchez

Resumen

El artículo analiza una situación de modelación en el contexto de la función cuadrática. Se articula al actual proceso de reforma educativa implementado en el bachillerato de la Universidad Autónoma de Guerrero, cuyo enfoque está centrado en el desarrollo de competencias tanto disciplinares como genéricas. La postura teórica de modelación que se asume, parte de que el modelo tiene que ser construido por los estudiantes a través de la idealización, especificando y matematizando la situación del mundo real. En la interpretación y explicación de la situación se prevé que emerjan tres tipos de modelos: el algebraico, el tabular y el gráfico. Asimismo, que discutan la solución en términos de los modelos y de la situación.

Palabras clave: modelación matemática, situación de modelación, competencia matemática.

Introducción

El presente trabajo es parte de una investigación más amplia que caracteriza los modelos matemáticos construidos por estudiantes de Nivel Medio Superior (NMS), al interpretar y explicar una situación de modelación asociada a la función cuadrática. Se enmarca en el actual proceso de reforma educativa implementado en este nivel de enseñanza, en la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), cuyo enfoque está centrado en el desarrollo de competencias tanto disciplinares como genéricas. Los planteamientos pedagógicos, filosóficos y metodológicos, de esta reforma se delimitan en el Modelo Educativo de la UAGro (ME), el que declara como uno de sus objetivos centrales, formar de manera integral al estudiantado en los ámbitos del saber, saber hacer, saber convivir con los demás y saber ser (UAGro, 2013). Visto desde las unidades de aprendizaje (antes asignaturas), en particular para el área de Matemáticas, el desarrollo de competencias se plantea a través de situaciones (o fenómenos) del entorno inmediato del estudiante y de su comunidad (UAGro, 2010a; 2010b). En ese proceso, la modelación matemática se concibe fundamental, a fin de favorecer que los estudiantes le den sentido y significado a la matemática. Desde la perspectiva de esta reforma, el desarrollo de competencias se apoya de tres *componentes de competencias*: a) conceptual, b) procedimental, y; c) actitudinal. El rol del profesor por su parte, además de ser un facilitador y mediador de aprendizajes, debe ser respetuoso y disciplinado, diseñar estrategias y ambientes de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de competencias. En ese contexto, se adaptó una situación de aprendizaje en el ámbito del entorno inmediato del estudiante. El objetivo central es que los estudiantes de bachillerato construyan e interpreten modelos matemáticos asociados a la función cuadrática, mediante el uso de procedimientos algebraicos. El reporte se centra en dar respuestas a las preguntas siguientes: (1) ¿Qué modelos matemáticos se construyen al

interpretar y explicar una situación asociada a la función cuadrática?, y; (2) ¿Qué componentes de competencia emergen en la construcción y uso de modelos cuadráticos en las explicaciones de los estudiantes?

Fundamentos teóricos

Los fundamentos teóricos que respaldan la investigación en general y el diseño de la situación de modelación asociada a la función cuadrática (SMFC) en particular, son los conceptos de modelación matemática, modelo matemático, realidad y competencia matemática.

a) Modelación matemática y realidad

Hay diferentes perspectivas sobre modelación, que los investigadores pueden adoptar en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas (Kaiser & Sriraman, 2006 en Ärlebäck & Doerr, 2014). Stillman (2012) distingue entre modelación y aplicación. Con las aplicaciones, de acuerdo con el investigador, la dirección que se sigue es *matemáticas* → *realidad* y la pregunta que se hacen quienes siguen esta ruta, es ¿dónde puedo usar esta particular pieza de conocimiento matemático? Desde esta perspectiva, significa que el modelo ya fue aprendido y construido. Con la modelación matemática, sostiene, que la dirección es contraria, es *realidad* → *matemáticas*. La pregunta central aquí, es ¿Qué matemáticas puedo usar para resolver este problema? Desde esta postura, el modelo tiene que ser construido a través de la idealización, especificando y matematizando la situación del mundo real. Ambos tipos de tareas, ocupan un lugar importante en el salón de clases. En este trabajo, la ruta que sigue la situación de aprendizaje, es la segunda, donde la *realidad*, se entiende en el sentido de Córdoba (2011, p. 11), *como todo lo que es y ocurre (interna y externamente al sujeto) y que pueda ser no sólo percibido sino también imaginado o representado por un individuo a partir de sus sentidos y procesos mentales, y en cuya interpretación y análisis influye tanto su propia subjetividad como el contexto en el que se encuentra inmerso*.

b) Modelo matemático y Modelación Matemática

El concepto de modelación matemática está anclado al concepto de modelo en general, y modelo matemático en particular (Vargas, 2015). Tanto el concepto de modelación matemática como el de modelo, se asume desde la postura de Biembengut y Hein (1997). Así visto, un modelo matemático es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen el fenómeno en cuestión o una situación problema. Este puede ser formulado mediante expresiones numéricas o formulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, tablas, etc. La Modelación Matemática por su parte, se entiende como el proceso involucrado en la obtención de un modelo. Este proceso, desde cierto punto de vista, puede ser considerado artístico, ya que para elaborar un modelo, además del conocimiento matemático, el modelador debe tener una dosis significativa de intuición-creatividad para interpretar el contexto, discernir qué contenido matemático se adapta mejor y tener sentido lúdico para jugar con las variables involucradas.

c) Competencia matemática

Este concepto se retoma de la OECD (2012, p. 9), quien lo define como la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y

herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.

Esta concepción de competencia matemática, resulta conveniente en nuestro estudio, por la importancia que se le da a que los individuos, en nuestro caso los estudiantes, usen conceptos, herramientas, hechos y procedimientos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos. En ese marco, el uso del conocimiento matemático, se articula a la descripción y explicación de una situación específica en el marco de la función cuadrática.

Aspectos metodológicos

1. Población objetivo y contexto

La población objetivo son estudiantes matriculados en décimo grado en una Unidad Académica Preparatoria de la UAGro. Su desarrollo se plantea en condiciones de enseñanza, como parte de los objetivos de la Unidad de Aprendizaje Matemáticas I. Los antecedentes académicos básicos para interactuar con la situación, son el concepto de función, ecuación y el trabajo con gráficas. Las interacciones de los estudiantes con la SMFC en el salón de clases se ha diseñado en tres momentos, trabajo individual, en equipo y discusión grupal. El propósito de esta última etapa, es discutir el o los modelos matemáticos que explican la situación y distinguir entre la solución al modelo y el de la situación. Está planteada para realizarse en un ambiente de lápiz y papel, en un tiempo promedio de cuatro sesiones de 90 minutos cada una.

2. Situación de modelación en el marco de la función cuadrática

La SMFC pasó por un proceso de validación con estudiantes de décimo grado y con profesores de bachillerato de la UAGro. Está estructurada mediante dos actividades, cada una con objetivos específicos y constituida por tareas.

Actividades de la SMFC

Actividad 1. El objetivo de la actividad es que el estudiante construya el modelo matemático que explica la situación involucrada, en particular de tipo algebraico. Son ocho tareas las que la componen y el tiempo promedio para su desarrollo es de dos sesiones.

Tarea 1.1: Los estudiantes escuchan y comprenden la situación narrada por el profesor, es la siguiente:

La empresa “Súper-Clima” quiere aumentar sus ganancias por servicio de mantenimiento de aire acondicionado. De sus clientes que tiene actualmente da servicio a 10 equipos, cobrando semestralmente por cada equipo \$600.00. Para aumentar sus ganancias solicita un estudio de mercadotecnia, el cual recomienda aplicar algunas veces, un descuento de \$60.00 en el costo del servicio semestral. Se estima, que por cada descuento aplicado incorporará 5 equipos (adaptación de la actividad 3, en Farfán, et al, 2014, p. 80).

Tarea 1.2: Ubica al estudiante a trabajar de forma individual a fin de que escriba el relato narrado por el profesor, incorporando en esta redacción, la pregunta que relaciona lo que se quiere determinar en ella.

Tarea 1.3: En equipo, comparan sus redacciones sobre la situación y a partir de ello, proponen una sola.

Tarea 1.4: De manera individual, discriminan las partes relevantes de la situación, para luego escribirlas tanto en lenguaje común como en lenguaje algebraico.

Tarea 1.5: En equipo, comparten y comparan las representaciones a las que arribaron en la etapa previa y acuerdan una sola.

Tarea 1.6: Proponen en forma individual una expresión algebraica que integre todas las partes identificadas en la fase anterior. Este deberá ser el modelo matemático que permita explicar la situación, sin que el estudiante lo llegue a reconocer como modelo.

Tarea 1.7: En equipo comparan el (o los) modelo (s) al que arribaron, con la intención de validarlo, y de ser posible, acordar uno solo.

Tarea 1.8: Exponen el (o los) modelo (s) que planteó cada equipo y lo (s) comparan con el fin de acordar uno solo, la cual permitirá dar continuidad a la situación en la actividad 2.

Actividad 2. El objetivo es que el estudiante interprete y explique cuál es la solución a la situación, a través de los modelos tabular y gráfico. Y que distinga, que el modelo matemático tiene más de una solución, y que una de ellas, es la que explica la situación. Son nueve las tareas que la componen. El tiempo promedio para su desarrollo es de dos sesiones. Las tareas de la 2.1 a la 2.8 se realizan de forma individual, se comparan y validan en equipo. La 2.9, de manera grupal, bajo la dirección del profesor, a fin de discutir la solución de la situación a partir de la (s) solución (es) del modelo matemático. El tiempo promedio para su desarrollo es de dos sesiones.

Tarea 2.1: Completan una tabla de valores utilizando la expresión algebraica (modelo) obtenida en la actividad 1, en la que relacionan los descuentos aplicados con el costo del servicio para obtener las ganancias, de acuerdo con lo planteado en la situación.

Tarea 2.2: Con base en los datos de la tabla, representan en el plano cartesiano la gráfica correspondiente (modelo gráfico).

Tarea 2.3: Analizan los resultados de la tabla y de la representación gráfica para determinar la máxima ganancia.

Tarea 2.4: Identifican el número de descuentos que debe aplicar para obtener ganancia máxima. Tarea 2.5: Identifican el intervalo en donde no se obtienen ganancias y se le solicita también lo marquen con rojo en la gráfica.

Tarea 2.6: Analizan si tiene sentido seguir aplicando descuentos cuando la ganancia es cero pesos.

Tarea 2.7: Ubican en la tabla y gráfica las ganancias cuándo deja de aplicarse el descuento por servicio prestado.

Tarea 2.8: Identifican el intervalo que comprende el incremento en las ganancias y discuten ¿por qué en el resto del modelo gráfico no se obtienen?

Tarea 2.9. Exponen y explican en grupo, apoyándose en los modelos tabular y gráfico que usaron, cuál es la solución a la situación. Discuten además, que el modelo matemático tiene más de una solución, y que una de ellas, es la que explica dicha situación.

3. Unidades de análisis

Desde el punto de vista metodológico, el análisis de las competencias se sustenta de Unidades de Análisis (UA). Fundamentales para reconocer qué componentes de competencia (disciplinares y genéricos) favorecen las tareas de cada actividad y con ello, cuáles va construyendo el estudiante, mientras las analiza y discute en los tres momentos ya descritos. Entendiéndose por UA en el sentido de Cabañas-Sánchez (2011) como una entidad representativa de lo que va a ser objeto específico de estudio en una medición y se refiere al qué o quién es objeto de interés en una investigación, en este caso las competencias matemáticas en un proceso de modelación matemática.

En este contexto, se han delimitado diecisiete unidades de análisis asociadas a componentes de competencia disciplinares, se describen en seguida:

Actividad	Tarea	Unidades de Análisis (UA)
1	1.1	UA1. Comprende la situación narrada.
	1.2	UA2. Representa la situación en lenguaje común.
	1.3	UA3. Comparan y comparten su representación en lenguaje común de la situación.
	1.4	UA4. Representa en lenguaje algebraico los datos relevantes de la situación identificando también constantes y variables.
	1.5	UA5. Comparan y comparten su representación algebraica de los datos relevantes de la situación.
	1.6	UA6. Construye el modelo matemático de la situación, mediante la relación de los datos relevantes y lo que se desea determinar.
	1.7	UA7. Comparan y comparten su representación del modelo matemático de la situación.
	1.8	UA8. Unifican criterios en el grupo al confrontar las representaciones del modelo matemático construyendo la expresión final de la situación.

2	2.1	UA9. Construyen una tabla de valores con la finalidad de analizar la situación utilizando el modelo matemático.
	2.2	UA10. Representan gráficamente los resultados obtenidos en el modelo tabular.
	2.3	UA11. Analizan los datos y resultados obtenidos en los modelos tabular y gráfico, determinando la solución en términos de la situación.
	2.4	UA12. Ubican en los modelos el momento en el que se genera la solución de la situación.
	2.5	UA13. Analizan e identifican el intervalo donde no se genera ganancias dentro de la situación.
	2.6	UA14. Analizan la pertinencia de seguir aplicando descuentos a partir de la obtener cero pesos en las ganancias.
	2.7	UA15 Identifican el monto de la ganancia cuando no se aplican descuentos.
	2.8	UA16. Identifican el intervalo de incremento en las ganancias.
	2.9	UA17. Validan las soluciones en el marco del modelo matemático y en términos de la situación.

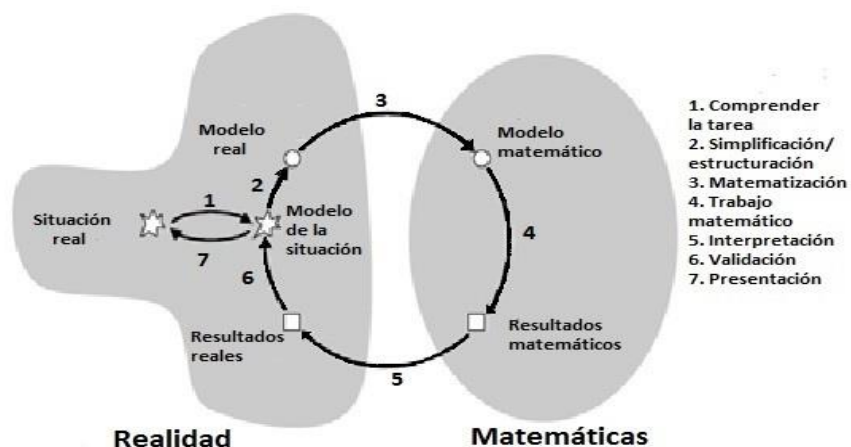
En el marco de la SMFC, los componentes de competencia que permitirán valorar el desarrollo de las de tipo disciplinar y genéricas son los siguientes:

Conceptual	Procedimental	Actitudinal
1. Funciones cuadráticas 2. Ecuaciones de segundo grado	-Traduce al lenguaje algebraico fenómenos de su región descritos en lenguaje común. -Construye expresiones completas de 2° grado que representan fenómenos descritos en lenguaje común. -Ubica en el modelo algebraico las magnitudes que intervienen en el fenómeno. -Distingue las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes.	-Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos. -Confronta sus preconcepciones acerca de las expresiones de 2° grado con el nuevo conocimiento algebraico, mejorando sus argumentos para explicar la realidad. -Valora el lenguaje algebraico como herramienta de síntesis de información

	<p>-Transforma las expresiones aplicando las reglas de las operaciones algebraicas.</p> <p>-Representa gráficamente las expresiones algebraicas y/o sus soluciones.</p>	<p>acerca de los fenómenos de su entorno.</p>
--	---	---

4. Proceso de modelación de la situación

El análisis se sustenta además, de las fases del ciclo de modelación propuesto por Blum y Leiß (2006, en Blum y Borromeo, 2009), en el que se reconocen siete fases: comprender la tarea, la simplificación/estructuración, la matematización, el trabajo matemático, la interpretación, la validación y la presentación.



Ciclo de Modelado de Blum / Leiß (Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46)

El proceso de modelación articulado con la situación, se proyecta que se desarrolle de la forma siguiente:

1. *Comprensión de la situación* (considerada real). El objetivo es que los estudiantes sean capaces de representar mentalmente, los elementos datos relevantes de la situación.
2. *Simplificación/estructuración*. Se espera que sean capaces de arribar a un modelo real, que puede ser estructurado de manera interna o mediante la representación escrita, algebraica, dibujos, etc.
3. El proceso de *matematización* se logra utilizando las representaciones de la etapa previa, mediante el manejo de expresiones algebraicas, dando como resultado el modelo matemático.
4. El *trabajo matemático* está relacionado con la elección de los métodos que les permitirán obtener los resultados matemáticos.
5. Los *resultados matemáticos* son analizados o interpretados con base en la situación planteada.
6. La *validación* contribuye a determinar cuál o cuáles de las soluciones cumplen con la situación planteada y cuáles al modelo matemático.

7. En la *presentación*, se analizan los resultados obtenidos por el grupo de estudiantes. Ello, a partir del modelo matemático al que arribaron, con la situación real. De existir discrepancias entre ambos, se repite el proceso, hasta obtener el modelo que represente dicha situación.

Este proceso no se concibe lineal, pues es posible que el estudiante no tenga necesidad de transitar por algunas de las etapas e incluso que deba regresar a una de ellas.

5. *Recolección de la información*

La recolección de los datos de la actividad matemática en el salón de clases, se sustentará de diferentes medios e instrumentos: a) Las producciones escritas desarrolladas en las etapas individual y en equipo, y; b) Las discusiones en equipo y las grupales. Para ello nos apoyaremos de las videograbaciones, así como de notas de campo del investigador.

Consideraciones finales

Mediante la SMFC se contribuye a que los estudiantes reconozcan que desde el punto de vista de la matemática, hay más de una solución al modelo matemático, y que una de ellas es la que satisface la situación planteada. La ruta que se sigue *realidad* \rightarrow *matemáticas* (mediante la situación de aprendizaje), favorece además, a que se le dé sentido y significado a la matemática, pues los modelos matemáticos aparecen a modo de uso, mientras interpretan y explican una situación de su entorno inmediato. Esta ruta, se sugiere al profesor en la reforma educativa de la UAGro, para el desarrollo de competencias disciplinares y genéricas. En la interpretación y explicación de la SMFC emergen tres tipos de modelos: el algebraico, el tabular y el gráfico.

Referencias bibliográficas

- Ärlebäck, J. B., Doerr, H. M. (2014). *At the core of modelling: connecting, coordinating and integrating models*. Descargado de: <http://www.cerme9.org/products/wg6/>
- Biembengut, M.; Hein, N. (1997). *Modelo, modelación y modelaje. Métodos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas*. Recuperado de: matesup.utralca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf
- Blum, W., Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application* 1(1), 45-58.
- Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86–95. doi:10.1007/BF02655883
- Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico (Tesis de doctorado)*. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México, Distrito Federal.
- Cantoral, R., Farfán, R., Montiel, G., Lezama, J., Cabañas, G., Castañeda, A. Martínez, G. y Ferrari, M. (2014). *Matemáticas 3. Serie desarrollo del pensamiento matemático*. México: Mc Graw Hill.
- Córdoba, F. (2011). *La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. (Tesis de maestría). CICATA-IPN, México, D.F.

- OECD, (2012). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA. Ministerio de Educación, Cultura y el Deporte.* Madrid. Recuperado de: <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d>
- Stillman, G. (2012). *Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt?* (pp. 902–921). Presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, 8 July – 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea, Seoul, Korea.
- UAGro (2013). *Modelo Educativo. Hacia una educación de calidad con inclusión social.* México: Universidad Autónoma de Guerrero.
- UAGro (2010a). *Plan de estudios por competencias de Educación Media Superior 2010.* México: Universidad Autónoma de Guerrero. Recuperado de <http://cgro.uagro.mx/>
- UAGro (2010b). *Plan de estudios por competencias 2010. Programa de estudios de la Unidad de Aprendizaje Matemáticas II.* México: Universidad Autónoma de Guerrero. Recuperado de <http://cgro.uagro.mx/>
- Vargas, A. (2015). *La modelación matemática en la interpretación de una situación asociada a lo lineal* (tesis inédita). México: Universidad Autónoma de Guerrero.

Autores

Salvador López-López; CIMATE, UAGro. México; slopezl@uagro.mx
Guadalupe Cabañas-Sánchez; CIMATE, UAGro. México; gcabanas.sanchez@gmail.com