

# SUCESIONES FIGURATIVAS DE SEGUNDO ORDEN, UNA SECUENCIA DIDÁCTICA UTILIZANDO LAS VARIABLES COMO NÚMEROS GENERALES

*José Rolando Palomino Iraburo, Nancy Janeth Calvillo Guevara, Leticia Sosa Guerrero*

## Resumen

En este escrito se presenta una problemática relacionada con el uso de sucesiones figurativas utilizando la variable como número general en secundaria (estudiantes que tienen entre 12 y 15 años), en particular, los jóvenes no pueden identificar patrones o comportamientos al hacer uso de sucesiones, tanto numéricas como figurativas, sobre todo cuando son del tipo cuadrático. Para enfrentar tal situación se propone diseñar y aplicar una secuencia didáctica. Se considera que la teoría de situaciones didácticas de Brousseau brindará elementos importantes para su diseño, empleando sucesiones figurativas. Como metodología se utilizará la ingeniería didáctica. Se espera que con la implementación de la secuencia los estudiantes logren el reconocimiento de patrones en sucesiones figurativas y por ende, lleguen a la generalización.

**Palabras clave:** sucesiones figurativas, patrones, generalización, secundaria.

## Introducción

Cuando se estudia el tema de Patrones y Ecuaciones en secundaria, las sucesiones son un concepto que está inmerso en dicho contenido y ayuda al desarrollo del pensamiento algebraico a través del uso de las variables como números generales, “hay quienes consideran que el álgebra tiene que ver esencialmente con los procesos de generalización, y ponen énfasis en el uso de expresiones generales en las que los símbolos literales representan números generales” (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005, p. 21), en ese sentido, Ferrini, Lappan y Phillips (1997, p. 112) señalan que “el estudio de patrones es una forma productiva para desarrollar el pensamiento algebraico en grados elementales o básicos”. Osorio (2012) y Vergel (2015) concluyen que al tratar con sucesiones figurativas los estudiantes conjeturan y se inician en los principios del álgebra, debido a que hacen uso de expresiones verbales, palabras, dibujos y símbolos que les permiten acercarse a la simbolización. En particular, Vergel (2015) observó que el hecho de contar con secuencias figurales propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico.

Las sucesiones aparecen en el tema estudio de la variable como número general, la cual se ve desde el primer año de educación secundaria, es aquí donde se comienza a trabajar con sucesiones numéricas y sucesiones figurativas, entendidas éstas como “conjunto de figuras con la propiedad de que hay un patrón de crecimiento que permite encontrar todas las figuras, empezando por la que ocupa el primer lugar de la sucesión; luego la que ocupa el

segundo lugar; luego la que ocupa el tercer lugar y así sucesivamente” (Araujo, García, García y López, 2006, p. 40), presentándose en ese momento una serie de conflictos de aprendizaje, como son el no comprender el uso de literales y el comportamiento de patrones, entre otras, como consecuencia éstos pueden acarrear obstáculos y errores durante toda su vida escolar. Al respecto, la principal conclusión del estudio realizado por Przenioslo (2005) con estudiantes de secundaria y de universidad, fue que muchas de las concepciones de los estudiantes universitarios que ya habían cursado análisis matemático, probablemente habían sido formadas desde que estudiaron en secundaria.

Por otra parte, se considera que algunos de los libros de apoyo para los estudiantes de primer año de secundaria, como el de “Matemáticas 1. Construcción del Pensamiento” (Sánchez, 2012) en su primer acercamiento con sucesiones numéricas y figurativas, contiene tareas que los estudiantes pueden resolver sin dificultad, donde pocas veces se les plantean ejercicios donde puedan llegar a la generalización, como se puede ver en la figura 1, donde solo se consideran ejercicios en los que no se les pide que lleguen a la generalización, sino solamente ir completando la información para casos concretos.

1. Analicen la sucesión numérica presentada en la tabla y establezcan la regla de formación que permite calcular los primeros términos de la sucesión. Calculen el sexto término de esta sucesión.

Posición	1	2	3	4	5	6
Término	3	12	48	192	768	

2. Números pares. El valor de la posición se multiplica por 2.

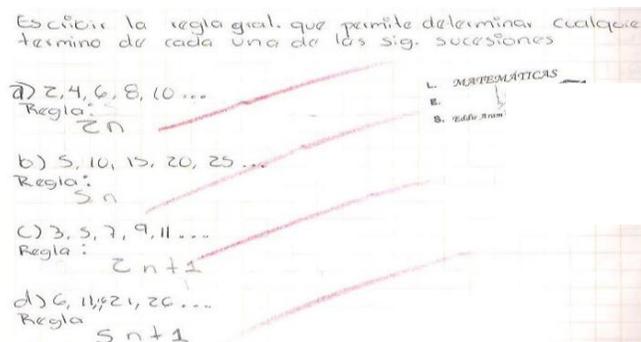
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6							

3. Números impares. El valor de la posición se multiplica por 2 y al resultado se le resta 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	5							

Figura 1. Ejercicios planteados para el tema de sucesiones

Otro aspecto a señalar es que algunos profesores plantean a los estudiantes ejercicios con sucesiones tanto figurativas como numéricas, pero el énfasis es en estas últimas. Por ejemplo, revisando las notas de clase de una estudiante de la escuela secundaria “J. Jesús Larios Guzmán” ubicada en la cabecera municipal de Gral. Pánfilo Natera, Zacatecas, observamos en la figura 2 que si bien resuelve los ejercicios propuestos por su maestro, no es claro cuál fue el proceso que utilizó, ya que solo escribió el resultado. Esto nos deja varias interrogantes como son: ¿realmente la estudiante identificó el patrón?, ¿Cuál fue su estrategia?, ¿Cómo logró la generalización?, ¿Comprendió efectivamente el uso de sucesiones numéricas y figurativas?



*Figura 2. Ejercicios propuestos para el tema de sucesiones*

Es por esto que consideramos importante que cuando el profesor aborde contenidos con sucesiones, éste ponga especial atención al uso de sucesiones figurativas, en donde los estudiantes podrían identificar y deducir las reglas que los rigen, pues mediante su implementación, se tendría una mejor comprensión de la generalización, y por ende, de la variable. En ese sentido, Osorio (2012, p. 81) menciona que “los estudiantes identifican mejor el patrón cuando se trata con figuras, debido al tipo de arreglos, pues permite observar claramente las regularidades, porque se analizan todas sus partes, desde que se descompone, por así decirlo, a la figura”, igualmente, Pérez, Pérez y Hernández (2013) en su investigación, detectaron que a los alumnos se les facilita el tránsito de lo aritmético a lo algebraico mediante la construcción de figuras geométricas y tablas con patrones numéricos.

Asimismo, según Vergel (2015) la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela. Sin embargo, se presentan dificultades cuando a través de dicho proceso se estudian secuencias figurales. Muestra de ello es lo que advirtió Ursini (1994 citada en Vergel, 2015) cuando un grupo de profesores no pudo simbolizar patrones al tratar problemas donde se requería reconocer secuencias, por ejemplo, una de las preguntas que implicaba expresar analíticamente la regla general de una secuencia visual, obtuvo un 0% de aciertos.

Por su parte, Londoño, Kakes y Álamo (2014) descubrieron que los alumnos, al pasar de la identificación de patrones a la generalización, cuando se pide completar una tabla en forma correcta para valores específicos, no encuentran dentro de su lenguaje algebraico una expresión que represente lo que se pide de manera correcta.

Además, según Osorio (2012) cuando se trata de relacionar una figura o número cuyo patrón es de tipo cuadrático, varios alumnos no se percatan de qué está sucediendo de un término a otro, no observan qué pasa de una figura a otra. Así, el problema radica en que los estudiantes no alcanzan a percibir los cambios que presenta una figura respecto a otra; no identifican el patrón numérico para llegar a su posible generalización. Esto muestra que el proceso de generalización no se establece solo a partir de la detección de las regularidades del proceso observado (Velasco y Acuña, 2010).

En particular, uno de los estándares curriculares de matemáticas, que comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos al terminar la educación secundaria es que “el alumno resuelve problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión” (México, 2011, p.16), propuesta por la Secretaría de Educación Pública (SEP) en México, mediante Los Programas de Estudio 2011 de educación secundaria en matemáticas. Es aquí donde se recurre al uso de sucesiones numéricas y figurativas y donde los estudiantes enfrentan una serie de problemas que están relacionados principalmente con:

- El tránsito de la aritmética al álgebra: esto podría ser porque en la escuela primaria los niños están más familiarizados con conocimientos del tipo aritmético (Pérez, Pérez y Hernández, 2013).

- Procesos sobre generalización de patrones: en este caso los estudiantes al momento de tratar de llegar a una expresión algebraica, pueden tener dificultades, ya que en ocasiones no logran percibir los cambios que se presentan de una figura a otra, lo mismo ocurre cuando trabajan con números, en consecuencia no identifican un patrón y no logran llegar a la generalización (Osorio, 2012).

Así que se puede sospechar que las dificultades que enfrentan los estudiantes en los procesos de generalización y cuando hacen uso de sucesiones en los niveles de educación básica, media superior y superior mucho dependerán de la experiencia vivida con las mismas y por consecuencia podría afectar su comprensión cuando se den los primeros acercamientos al álgebra.

Por otra parte, según Osorio (2011) en secundaria se da cierta preferencia a los modelos lineales cuando se presentan secuencias figurativas para generalizar, ya que el número de actividades de secuencias figurativas de segundo orden o cuadráticas que se plantean son escasas, hecho que pudimos constatar al inspeccionar las notas de clase de una alumna de secundaria, lo cual se antepone a uno de los propósitos del estudio de las matemáticas de la educación secundaria donde menciona que los estudiantes “Modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones” (México, 2011, p.14).

### **Problema de investigación**

Los estudiantes de secundaria presentan dificultades al no poder identificar patrones o comportamientos al hacer uso de sucesiones, tanto numéricas como figurativas, sobre todo cuando las sucesiones son del tipo cuadrático.

### **Objetivo General**

Diseñar y aplicar una situación didáctica que ayude a los estudiantes en la generalización del comportamiento de una sucesión figurativa de tipo cuadrático.

Objetivos particulares.

- Realizar un análisis preliminar que permita rescatar elementos para el diseño de una secuencia didáctica.
- Diseñar una secuencia didáctica relacionada con sucesiones figurativas del tipo cuadrático.
- Aplicar la secuencia didáctica a estudiantes de secundaria.
- Analizar los resultados obtenidos para mejorar el diseño.

### **Hipótesis**

Se considera que con la implementación de la secuencia didáctica, los estudiantes lograrán el reconocimiento de patrones en sucesiones figurativas de tipo cuadrático y en consecuencia llegarán a la generalización.

El hecho de que el profesor solo sea una guía en el desarrollo de la secuencia didáctica y el hecho de que los estudiantes logren por sí solos llegar a la generalización, podría generar en ellos una comprensión más significativa de las sucesiones.

### **Justificación**

El tema de sucesiones numéricas se aborda en los planes y programas de estudio en diferentes niveles de educación en México como son preescolar, primaria, secundaria y medio superior (Torres, Borjón y Hernández, 2013), es decir, durante todo el proceso educativo básico los estudiantes deben de estar trabajando con actividades en donde se vea implícito el tema de sucesiones.

Esto ayudaría en principio al desarrollo del pensamiento algebraico; sin embargo, la realidad dista en buena medida de lo que se propone en los documentos oficiales, por ejemplo Londoño, Kakes y Álamo (2014) encontraron que alumnos que han aprobado varios cursos de álgebra elemental, no cuentan, en la preparatoria, con herramientas algebraicas que les permitan llegar al proceso de generalización, más aún los resultados encontrados en (Ursini y Trigueros, 2006, citados en Juárez, 2011) permiten expresar que estudiantes universitarios que habían llevado cursos de matemáticas avanzadas siguen teniendo dificultades para manejar este concepto, llegando a evitar cualquier acercamiento algebraico y retornando a procedimientos de carácter aritmético. Esto quiere decir que respecto al currículo, de manera transversal, es necesario reforzar este tema.

Además, se ha identificado que cuando se abordan problemas relacionados con sucesiones en primer año de secundaria, se presentan mayormente sucesiones numéricas y en menor cantidad sucesiones figurativas, pero además si abonamos dos factores más, como es el que las sucesiones son en su mayoría del tipo lineal y que son escasos los problemas en donde se les pide que lleguen a la generalización, esto podría acarrear un vacío en el aprendizaje de los estudiantes. Es por eso que proponemos implementar una secuencia didáctica en la que se involucren secuencias figurativas de segundo orden o cuadráticas, en donde los estudiantes logren por sí solos visualizar el comportamiento o el patrón de una figura y con esto tengan mayores posibilidades de llegar a una generalización.

Asimismo Osorio (2012) y Vergel (2015) consideran que los estudiantes perciben mejor un patrón cuando hacen uso de sucesiones figurativas que cuando se emplean sucesiones numéricas y en consecuencia los estudiantes podrían tener más probabilidad de llegar a la generalización. Al respecto, en este trabajo los estudiantes podrán experimentar con sucesiones figurativas de segundo orden que les permita tener una comprensión de la generalización en la educación secundaria.

### **Fundamento Teórico y Metodológico**

Para el diseño de una propuesta didáctica es importante saber qué actividades debemos plantear y de qué manera, para lograr el aprendizaje que pretendemos. Por esta razón es que nos basaremos en la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Brousseau (1986), pues ésta propone el estudio de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos, y menciona que los alumnos aprenden por adaptación al medio.

Así, dentro de esta teoría se propone un modelo que intenta explicar el comportamiento didáctico, para ello utiliza conceptos que describen el proceso enseñanza – aprendizaje, algunos de estos conceptos son la clasificación de los tipos de situaciones en las que se encuentra un alumno: acción, formulación, validación, institucionalización.

Además, es una teoría amplia que permite considerar que todos los fenómenos pertinentes puedan ser tomados en consideración, así podremos utilizar modelos adecuados para trabajar en la mayoría de los casos.

Por otro lado como metodología de la investigación se propone La Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), que comprende cuatro fases:

- **Análisis preliminares.** Donde realizaremos un estudio epistemológico para analizar la manera en que las sucesiones figurativas se constituyeron como tema de estudio en secundaria. Además se efectuará revisión acerca de la manera en que se trabajan las sucesiones figurativas en secundaria, y una inspección para analizar qué problemas en particular tienen los sujetos de nuestro estudio con respecto al tema.
- **Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.** Con base en los resultados de los análisis preliminares se retomarán aquellos elementos que se consideren pertinentes para el aprendizaje de las sucesiones figurativas. Esto permitirá organizar una situación de aprendizaje en la que habremos de distinguir las variables didácticas. También plantearemos dicha situación y realizaremos el análisis a priori respectivo, donde explicitaremos los supuestos, los probables y los seguros, de manera que nos permitan trazar la mayoría de las rutas que los alumnos pudieran tomar en la experimentación.
- **Experimentación.** Esta fase comprende la descripción de la manera en que se llevará a cabo la puesta en escena y la manera en que se hará la recopilación de evidencias.
- **Los análisis a posteriori y validación.** En esta fase se analizará lo que sucedió en la puesta en escena. Para la validación (interna) se realizará una confrontación entre los análisis a priori y a posteriori.

En general, se realizará un estudio del tipo cualitativo, donde se trabajará con estudiantes de educación secundaria, implementando una secuencia didáctica.

### **Reflexiones/Conclusiones**

Hasta el momento se ha identificado que el sentido del estudio de las sucesiones numéricas de segundo orden, en secundaria, se ve limitado al tipo de situaciones en la que se pide "encontrar la regla definida por  $x$  sucesión"; es decir, la enseñanza de este tema deja de lado aquellas situaciones donde el estudiante habría de descubrir el por qué o para qué encontrar dicha regla. Es por esta razón que para su aprendizaje proponemos incluir sucesiones figurativas.

Al término de la investigación se espera proponer una herramienta didáctica para mejorar el aprendizaje del uso de la variable como número general, y por consecuencia aportar para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por otra parte, consideramos que la elección de la teoría de situaciones didácticas como marco teórico y de la ingeniería didáctica como metodología, nos aportarán varios elementos teóricos que nos ayudarán a comprender el fenómeno de la enseñanza, por ende, nos facilitarán tanto la elaboración de la situación didáctica, como su validación.

## Referencias

- Araujo, M., García, S., García, J. y López, O. (2006). *Matemáticas I. Volumen I. Telesecundaria*. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de: [http://issuu.com/sbasica/docs/matematicas1voll\\_1314](http://issuu.com/sbasica/docs/matematicas1voll_1314).
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: M. Artigue, *Ingeniería Didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Grupo editorial Iberoamérica.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-155. (versión castellana).
- Ferrini-Mundy, J., Lappan, G., y Phillips, E. (1997). Experiences with patterning. *Teaching Children Mathematics*, 3, 282-289.
- Juárez, J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 76, 83-103. Recuperado de: [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/76/Articulos\\_04.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/76/Articulos_04.pdf).
- Londoño, N., Kakes, A. y Álamo, A. (2014). Del reconocimiento de patrones a la generalización. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 361-367. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf>
- México. Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011, Guía para el maestro. Educación básica secundaria. Matemáticas*. D.F., México.
- Osorio, J.C. (2012). Procesos de generalización que intervienen en el aprendizaje del alumno al hacer uso de sucesiones. R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 75-83. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf>
- Osorio, J. C. (2011). Dificultades para la construcción de un modelo algebraico de segundo orden a través de sucesiones, para definir el enésimo término. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 24, 13-22. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf>
- Pérez, A. R., Pérez, A. D. y Hernández, H. (2013). Secuencia didáctica para facilitar la transición entre la aritmética y el álgebra. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 863-871. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme26v.2.pdf>
- Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Students in Mathematics*. 60: 71 – 93.
- Sánchez, F. (2012). *Matemáticas I: Construcción del pensamiento*. México: Fernández educación.

- Torres, M., Borjón, E. y Hernández, J. (2013). Una aproximación al concepto de sucesión con uso de tecnología por medio de representaciones semióticas en el nivel bachillerato. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 2011-2018. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme26.pdf>
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.
- Velasco, K. y Acuña, C. (2010). El uso de patrones geométricos para la construcción del lenguaje simbólico en estudiantes de nivel medio superior. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 805-811. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215.

### **Autores**

José Rolando Palomino Iraburo; UAZ. México; [palomino\\_rolando@outlook.com](mailto:palomino_rolando@outlook.com)

Nancy Janeth Calvillo Guevara; UAZ. México; [nancycalvillo@gmail.com](mailto:nancycalvillo@gmail.com)

Leticia Sosa Guerrero; UAZ. México; [lsosa19@hotmail.com](mailto:lsosa19@hotmail.com)