REVISTA EMA
2002, VOL. 7, Nº 3, 251-292

# ANÁLISIS DIDÁCTICO Y DISEÑO CURRICULAR EN MATEMÁTICAS

PEDRO GÓMEZ

*En este artículo describo el análisis didáctico como una conceptualización del modo en el que el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Este procedimiento permite abordar la problemática de la planificación curricular a nivel local, al identificar herramientas conceptuales y metodológicas y sugerir estrategias sistemáticas para cerrar la brecha entre la planificación global que surge de las directivas gubernamentales e institucionales y la actuación de profesor y escolares en el aula.*

## INTRODUCCIÓN

En circunstancias de descentralización curricular, como las que existen en Colombia y España, los profesores de matemáticas enfrentan frecuentemente un problema de planificación y gestión de clase. Las directivas gubernamentales y la planeación estratégica de la institución educativa determinan los contextos social, educativo e institucional en los que se produce el diseño curricular global de cada asignatura. Sin embargo, este diseño curricular global no aporta pautas específicas para el día a día de la práctica docente de los profesores. Usualmente los profesores planifican y realizan sus clases con ayuda de su experiencia y de los documentos y materiales de apoyo disponibles, y muchos de ellos se basan exclusivamente en las propuestas de los libros de texto. Si esperamos que los profesores de matemáticas aborden su trabajo diario de manera sistemática y reflexiva, basándose en un conocimiento profesional, entonces ellos deberían conocer y utilizar principios, procedimientos y herramientas que, fundamentados en la didáctica de la matemática, les permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje que pueden conformar su planificación de clase.

Rico et al. (1997) y Segovia y Rico (2001) han identificado esta problemática al poner de manifiesto las dificultades de los profesores con la noción de currículo en el nivel de la planificación global. En este nivel, el profesor debe identificar unos objetivos, unos contenidos, una metodología y un esquema de evaluación con el que se pretende describir el currículo como plan de formación para una asignatura o para una porción amplia de una asignatura. Yo pretendo diferenciar entre los problemas de diseño curricular global (para la totalidad de una asignatura, por ejemplo) y los problemas de diseño curricular local (para una unidad didáctica o una hora de clase sobre una estructura matemática específica o uno o más aspectos de ella). Si enfocamos únicamente los problemas de diseño curricular global (con el esquema de objetivos, contenidos, metodología y evaluación), entonces el profesor tiende a ver la planificación como la secuenciación de contenidos matemáticos y a considerar la enseñanza como el "cubrimiento" de estos contenidos. Al no tener en cuenta las problemáticas conceptuales, cognitivas y de instrucción de las estructuras matemáticas específicas, el profesor tiene que describir los objetivos, la metodología y la evaluación en términos generales. Por lo tanto, lo que diferencia a las distintas parcelas del diseño curricular global son los contenidos. Cuando tratamos a nivel local los problemas de diseño curricular y nos concentramos en una estructura matemática específica, es posible ampliar esta visión de la planificación y de la enseñanza. Para ello, propongo una conceptualización de ese nivel de la planificación y la gestión de clase, el análisis didáctico, como un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje.

En este artículo considero algunas de las cuestiones que mencioné en Gómez (2000) con relación al "modelo de los organizadores del currículo" propuesto por Rico et al. (1997). En particular, presento una estructura conceptual que organiza y relaciona las nociones de la educación matemática que estos autores proponen. En este sentido, la mayor parte del artículo se basa en los trabajos que Rico ha desarrollado en este tema (ver, por ejemplo, Rico et al., 1997; Rico, 1995a, 1997a, 1998a, 1998b). Este esfuerzo de sistematización también surge de la experiencia que he vivido al tener la oportunidad de compartir con Rico la responsabilidad docente en la asignatura "Didáctica de la Matemática en el Bachillerato" en la Universidad de Granada (España) durante los últimos dos años y de discutir con él y otros colegas sobre la problemática de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria[1].

El artículo comienza describiendo brevemente el "ciclo de enseñanza de las matemáticas" propuesto por Simon (1995), con el que este autor aborda explícitamente el problema del diseño curricular a nivel local en matemáticas. En seguida, se introducen las ideas centrales que componen la noción

1. Habiendo aclarado que la mayor parte de las ideas contenidas en este artículo han sido propuestas por Rico y otros autores en diversas publicaciones, asumo la responsabilidad de la manera como las he interpretado y organizado aquí.

de currículo. El análisis didáctico se describe a continuación, comenzando por una reflexión sobre las creencias y las metas del profesor y sobre los contextos que condicionan su práctica docente, para después presentar los diferentes análisis que lo componen: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. El artículo termina con una reflexión sobre el conocimiento didáctico que el profesor pone en juego cuando realiza el análisis didáctico.

## CICLO DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Simon (1995) centra su atención en la problemática de la planificación local y reflexiona sobre cómo debería ser la enseñanza, si se asume una posición constructivista social del aprendizaje de los escolares. Él resume su trabajo de la siguiente manera:

> […] partiendo de una perspectiva de constructivismo social sobre el desarrollo del conocimiento, el artículo continúa la discusión sobre las deliberaciones pedagógicas que llevan a la determinación de los contextos de problemas que promueven la participación de los estudiantes. En particular, el artículo extiende la noción de enseñanza como indagación, examina el papel de diferentes aspectos del conocimiento del profesor, y explora el reto intrínseco y actual para integrar los objetivos y la dirección del profesor para el aprendizaje con la trayectoria del pensamiento y el aprendizaje matemático de los estudiantes. (p. 121)

Simon propone, en términos de Steffe y D'Ambrosio (1995), un modelo de enseñanza coherente con los principios constructivistas del aprendizaje de las matemáticas. Este modelo reconoce al profesor como agente reflexivo y cognitivo. Esto es, como alguien que construye su conocimiento al adaptarse a las experiencias que vive dentro de su contexto.

Este modelo, llamado por Simon el *ciclo de enseñanza de las matemáticas,* es un "modelo esquemático de la interrelación de aspectos del conocimiento, pensamiento, toma de decisiones y actuaciones del profesor" (p. 135). Según este modelo (ver Figura Nº 1), la enseñanza, desde la perspectiva del profesor, está guiada por la *trayectoria hipotética de aprendizaje.* Esta trayectoria consiste en la predicción que el profesor hace acerca del camino por el cual puede proceder el aprendizaje. "Una trayectoria hipotética de aprendizaje le da al profesor criterios para seleccionar un diseño instruccional particular; por lo tanto, yo tomo mis decisiones de enseñanza basado en mi mejor conjetura acerca de cómo va a proceder el aprendizaje" (p. 135).

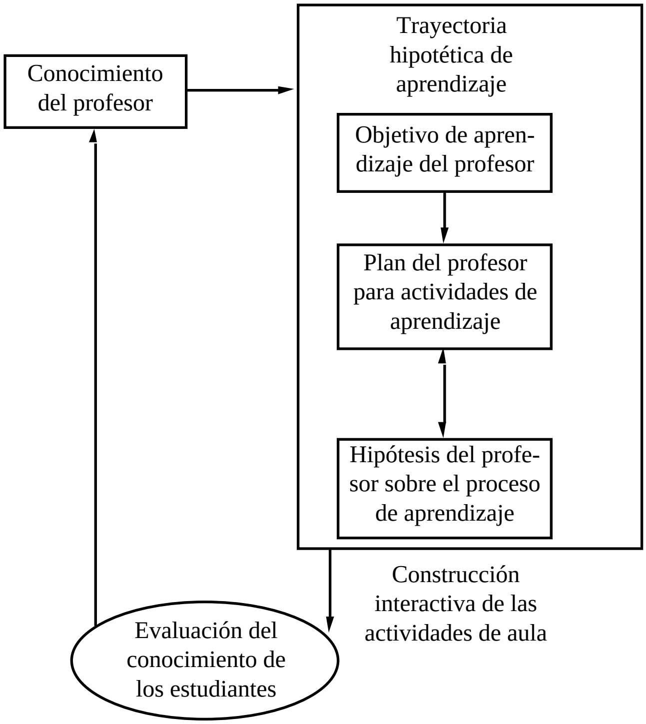


*Figura Nº 1. Ciclo de enseñanza de las matemáticas*

La trayectoria hipotética de aprendizaje tiene tres componentes, relacionadas entre sí: la visión que el profesor tiene del objetivo de aprendizaje, la planificación del profesor para las actividades de aprendizaje y las hipótesis del profesor acerca del proceso de aprendizaje. El objetivo de aprendizaje es la guía que le permite al profesor decidirse por unas actividades de aprendizaje. Esa decisión la toma teniendo en cuenta también sus hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. Y estas actividades afectan, a su vez, dichas hipótesis.

El centro de la propuesta consiste en sugerir que se trata de un proceso dinámico y cíclico. La trayectoria hipotética de aprendizaje no se determina con anterioridad a la realización de la clase y no permanece estática durante ella. Por el contrario, la trayectoria hipotética de aprendizaje estará en permanente evolución a lo largo de la clase porque la puesta en práctica de las actividades y la permanente evaluación del conocimiento de los alumnos llevará al profesor a revisar dinámicamente la trayectoria hipotética de aprendizaje. El profesor diseña y revisa la trayectoria hipotética de aprendizaje con base en la evaluación de los conocimientos de los alumnos y su propio conocimiento.

En resumen, las principales características del modelo son las siguientes:

- el pensamiento de los estudiantes juega un papel central;
- el conocimiento del profesor evoluciona permanentemente;
- la planificación para la enseñanza incluye la generación de una trayectoria hipotética de aprendizaje;
- el cambio continuo en el conocimiento del profesor produce un cambio continuo en la trayectoria hipotética de aprendizaje;
- el modelo es local en el sentido de que se centra en la enseñanza de un tópico específico para una sesión de clase.

## NOCIÓN DE CURRÍCULO

Como noción que permite organizar y describir un plan de formación, el concepto de currículo pretende responder a una serie de cuestiones con respecto a la naturaleza del conocimiento que se va a enseñar, del aprendizaje, de la enseñanza y de la utilidad de ese conocimiento. Estas cuestiones dan lugar a cuatro *dimensiones* que permiten estructurar el análisis y el diseño del currículo:

- dimensión cultural/conceptual,
- dimensión cognitiva,
- dimensión ética/formativa,
- dimensión social.

Como veremos en seguida, la noción de currículo, como herramienta analítica del proceso educativo, se puede utilizar en múltiples niveles. Por esa razón, resulta ilustrativo utilizar una representación geométrica, como la de la Figura Nº 2, en la que cada dimensión se representa en un eje (Rico, 1997b, pp. 387-388).

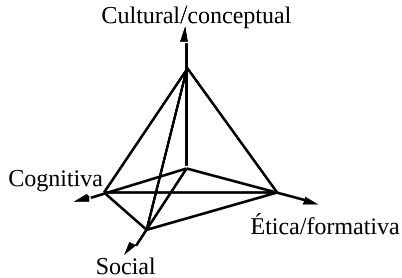


*Figura Nº 2. Dimensiones del currículo*

En Rico (1997b) se estudian cuatro niveles de reflexión sobre el currículo. Para cada uno de estos niveles, es posible determinar unas *componentes* que corresponden a cada una de las dimensiones, como se muestra en la Tabla Nº 1.

| | | *Dimensiones del currículo* | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1ª dimensión | 2ª dimensión | 3ª dimensión | 4ª dimensión |
| | | Cultural/ conceptual | Cognitiva o de desarrollo | Ética o formativa | Social |
| Niveles | Planificación para los profesores | Contenidos | Objetivos | Metodología | Evaluación |
| | Sistema educativo | Conocimiento | Alumno | Profesor | Aula |
| | Disciplinas académicas | Epistemología e Historia de la Matemática | Teorías del aprendizaje | Pedagogía | Sociología |
| | Teleológico o de fines | Fines culturales | Fines formativos | Fines políticos | Fines sociales |

*Tabla Nº 1. Componentes del currículo según los niveles y dimensiones (tomada de Rico (1997b, p. 409))*

El nivel de planificación para los profesores representa la versión más conocida del currículo. Es el esquema con el que tradicionalmente se describen los planes de formación a cargo de un profesor en el espacio de un aula. El segundo nivel representa la reflexión curricular cuando el ámbito de actuación es la institución educativa y el encargado es la administración. Los dos últimos niveles tienen un carácter más teórico. El tercer nivel considera las disciplinas que fundamentan la noción de currículo y que aportan la información necesaria para el estudio del currículo de matemáticas. El último nivel considera las finalidades para la educación matemática. El análisis didáctico, que describiré a continuación, se constituye en otro nivel del currículo, como procedimiento de planificación local de los profesores.

## ANÁLISIS DIDÁCTICO: UN PROCEDIMIENTO PARA ORGANIZAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

En lo que sigue, describo un procedimiento, que denomino *análisis didáctico*[2], y que representa mi visión ideal de cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. El análisis didáctico se ubica en un nivel local del currículo. Mi preocupación se centra en el procedimiento en virtud del cual el profesor planifica, lleva a la práctica y evalúa una unidad didáctica, una hora de clase o una porción de una clase. Entiendo por unidad didáctica "una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos" (Segovia y Rico, 2001, p. 87). Por lo tanto, el contenido matemático que es objeto de la instrucción es una estructura matemática específica o uno o más aspectos de una estructura matemática. El periodo de tiempo en el que tiene lugar la instrucción es limitado y la especificidad del contenido permite profundizar en sus múltiples significados. Esta visión local de la enseñanza es similar a la adoptada por Simon (1995), quien también se centra en las actividades que conciernen un periodo limitado de tiempo y un contenido matemático específico, y constituye una reflexión curricular diferente de aquella que corresponde a la planificación global para los profesores.

La descripción de un ciclo del análisis didáctico seguirá la secuencia propuesta en la Figura Nº 3, a la que haré referencia permanentemente en lo que sigue. Describiré las herramientas conceptuales y metodológicas que el

2. Una búsqueda en Internet con el término "análisis didáctico" produce, a comienzos de 2002, más de quinientos resultados. Este término se ha convertido en una expresión genérica utilizada en muchos campos con diferentes significados. Por ejemplo, Freud (1981) lo utilizó cuando se refirió a la formación de psicoanalistas. En la didáctica de la matemática varios autores utilizan el término (e.g., Puig, 1997 y González, 1998). Puig (1997) lo define de la siguiente manera: "el análisis didáctico de las matemáticas, esto es, el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos" (p. 61). Yo utilizaré el término para designar un procedimiento que se encuentra en el centro del modelo de enseñanza que quiero describir en este artículo.

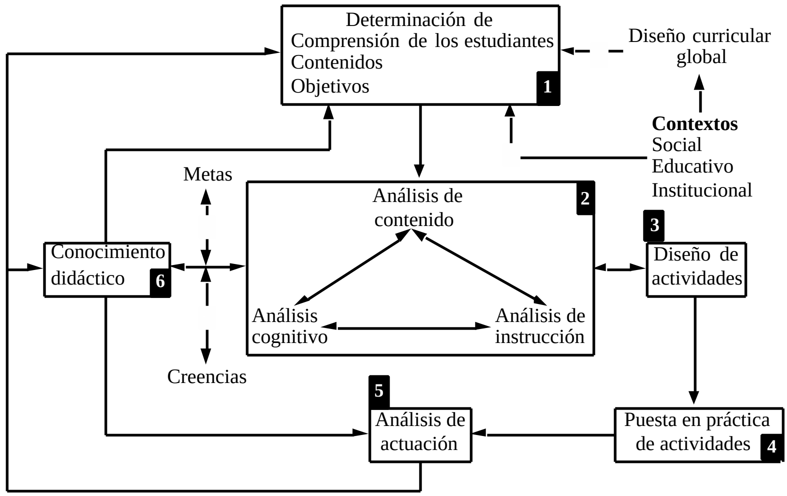


*Figura Nº 3. Ciclo de análisis didáctico*

profesor debe poner en juego para realizar el análisis didáctico, y haré énfasis en las múltiples relaciones entre los análisis que lo componen y las herramientas que se ponen en juego. El análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción (cuadro 1 de la Figura Nº 3). A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación simbiótica entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende de y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis (cuadro 2). La selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo de análisis, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje (relación entre cuadros 2 y 3). El profesor pone en práctica estas actividades (cuadro 4) y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los escolares para obtener información que sirve como punto de inicio de un nuevo ciclo (cuadro 5). El conocimiento didáctico (cuadro 6) es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso.

La realización de un ciclo del análisis didáctico se encuentra condicionada por las creencias y las metas del profesor y por los contextos social, educativo e institucional (relaciones a, b, c y d de la Figura Nº 3). Inicio la descripción del ciclo con una reflexión sobre estas condiciones para después describir las diferentes fases y análisis que se proponen en la Figura Nº 3.

## CREENCIAS, METAS Y CONTEXTOS

Las metas y las creencias del profesor, por un lado, y los contextos institucional, educativo y social, por el otro, condicionan la práctica docente. En este apartado hago algunas consideraciones sobre el papel del contexto y de las metas y las creencias del profesor en sus decisiones y actuaciones, como factores que influyen en y condicionan la manera como él aborda el análisis didáctico de una estructura matemática.

Schoenfeld (2000), en su propuesta para construir un modelo del profesor de matemáticas, describe de la siguiente manera la relación entre las creencias, las metas, el conocimiento del profesor y su práctica docente: "Postulamos que, sea el profesor consciente o no de sus creencias, metas y conocimiento, éstos son factores claves en el proceso de toma de decisiones y tal proceso toma en cuenta esos factores [...] El modelo de un profesor particular contendrá representaciones de metas, creencias y conocimiento atribuidos a ese profesor y un mecanismo de toma de decisiones que sugiere cómo, en unas circunstancias dadas, esas metas, creencias y conocimiento configuran la decisión del profesor con respecto a qué hacer 'después'" (pp. 248-249). Las metas son lo que uno quiere lograr. Las metas pueden ser globales con respecto a los estudiantes en periodos largos de tiempo, en las lecciones, en partes particulares de la lección y locales a una interacción particular. Pueden estar orientadas epistemológicamente (con respecto al contenido) o socialmente. Pueden estar predeterminadas o pueden ser emergentes. Usualmente hay varias metas operativas en un momento dado (p. 250). "Las creencias del profesor [...] configuran lo que el profesor ve como creíble, posible o deseable. Por lo tanto, las creencias configuran la selección de metas y planes de acción" (p. 253).

Se han realizado una gran variedad de estudios sobre el papel de las creencias en la actuación del profesor (Thompson, 1992). No obstante, no se puede afirmar que esta relación sea evidente (Lerman, 2001). En todo caso, "como sucede en las demás áreas, las creencias configuran la percepción que el individuo tiene de su experiencia. Ellas configuran las metas que el profesor se impone para la interacción en el aula, las opciones que el profesor cree que están disponibles para lograr esas metas, y la manera en que estos recursos (en este caso, diferentes tipos de enseñanza y de contenido matemático, rutinas de clase, etc.) se pueden emplear" (Schoenfeld, 2000, p. 248). La línea divisoria entre creencias y conocimiento no es evidente. En este artículo considero como creencias las visiones que el profesor tiene de las matemáticas como disciplina, de las matemáticas escolares, de su enseñanza y de su aprendizaje. El profesor puede y debe tener un conocimiento sobre las diferentes posturas que es posible asumir en estos temas y asume consciente o inconscientemente una de ellas. Su posición sobre estas cuestiones afecta y condiciona la manera como él aborda las diferentes fases del ciclo del análisis didáctico.

El contexto social, educativo e institucional condiciona la instrucción. Este contexto determina las normas y valores que rigen social e institucionalmente y determina aquello que se valora como deseable en el proceso educativo. De esta manera, el contexto restringe las opciones que el profesor tiene disponibles para realizar su práctica docente. Por ejemplo, las normas legales pueden determinar unas finalidades de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, mientras que el proyecto educativo del centro puede promover modelos de evaluación particulares. Adicionalmente, el profesor debe tener en cuenta los intereses, conocimientos y capacidades de sus estudiantes y reconocer las diferencias entre ellos. Estos y otros factores hacen parte del contexto social, educativo e institucional que conforman el marco en el que el profesor realiza su trabajo. Por otro lado, el contexto del aula es el entorno estructurado dentro del cual tiene lugar la construcción del conocimiento matemático por parte de los escolares. Este contexto es el espacio en el que se constituye y se desarrolla una comunidad de práctica de las matemáticas escolares. Este contexto se negocia y se conforma conjuntamente entre profesor y estudiantes y, por consiguiente, no restringe la instrucción.

En la Figura Nº 3, la relación (a) expresa relación entre los diferentes contextos y la instrucción. La relación (b) muestra que la planificación local tiene lugar dentro del entorno de una planificación global. Esta planificación global debe tener en cuenta las condiciones impuestas por los contextos social, educativo e institucional. Las relaciones (c) y (d) muestran (en uno de los sentidos) cómo las metas y las creencias del profesor influyen en sus decisiones en el proceso de planificación. Incluyo también aquí la influencia que el proceso de planificación, puesta en práctica y evaluación de las actividades de enseñanza y aprendizaje puede tener en las metas y creencias del profesor (el otro sentido de las flechas). Estas relaciones representan las condiciones que las creencias, las metas y el contexto imponen en la actividad del profesor. Estas condiciones se expresan, entre otros, en el diseño curricular global de la asignatura. El diseño curricular global y lo que haya sucedido en las sesiones anteriores, determinan unos objetivos que se deben lograr, un contenido que se debe tratar y unos esquemas generales para la gestión de la clase y la evaluación de los estudiantes. En la mayoría de las ocasiones, las indicaciones que provienen del diseño curricular global son de carácter general y no tienen en cuenta la especificidad de la estructura matemática que se desea tratar, ni las condiciones cognitivas e instruccionales de la hora de clase que se quiere planificar. El profesor tiene que realizar un proceso de planificación local (el análisis didáctico) que tenga en cuenta estas especificidades conceptuales, cognitivas e instruccionales. Inicio a continuación la descripción de este procedimiento.

## INICIO DEL CICLO

En este apartado describo el comienzo de un ciclo a partir de las condiciones iniciales que acabo de formular. Me refiero al cuadro identificado con el número 1 en la Figura Nº 3. En los apartados siguientes examinaré secuencialmente cada uno de los cuadros en el orden en el que aparecen en el esquema. El ciclo se inicia con la determinación, por parte del profesor, de la comprensión que los estudiantes tienen en ese momento, de los contenidos que se pretenden tratar y de los objetivos que se quieren lograr. El diseño curricular global delimita inicialmente esos objetivos y contenidos. Pero la determinación de los objetivos específicos que se deben buscar y de los contenidos matemáticos particulares que se deben tratar también depende del resultado del ciclo anterior del análisis didáctico. El análisis de actuación (cuadro 5 del esquema) proporciona al profesor información sobre las actuaciones y producciones de los escolares al final del ciclo anterior. Con esta información, el profesor debe hacer una descripción de la comprensión de sus estudiantes sobre la estructura matemática en cuestión. Esta descripción deberá identificar:

- las tareas que sus estudiantes pueden resolver,
- las tareas que no pueden resolver,
- los errores en los que los estudiantes han incurrido al abordar las tareas,
- las dificultades que subyacen a esos errores,
- los obstáculos que es necesario superar para resolver esas dificultades.

Describiré con mayor detalle este procedimiento cuando considere, más adelante, el análisis cognitivo. Esta información sobre asuntos cognitivos es central para determinar con suficiente especificidad los objetivos y los contenidos de la unidad didáctica o la hora de clase que se pretende planificar. La manera como el profesor recoja, analice e interprete esta información dependerá de sus conocimientos y sus creencias. El resultado de esta etapa inicial del análisis didáctico debe ser la identificación de una estructura matemática específica y la delimitación de los objetivos que se quieren lograr con respecto a esa estructura matemática. La siguiente etapa del análisis didáctico es el análisis de contenido que describo a continuación (cuadro 2 del esquema).

## ANÁLISIS DE CONTENIDO

El contenido matemático es el eje central del análisis didáctico. El proceso de planificación, puesta en práctica y evaluación de las actividades de enseñanza y aprendizaje se refiere a una estructura matemática específica. Las herramientas conceptuales y metodológicas en las que se basa el análisis didáctico, y que describiré a continuación, adquieren sentido cuando se utilizan para analizar los diferentes significados de esa estructura matemática. Por lo tanto, el análisis de contenido, siendo el análisis matemático de esa estructura matemática, debe ser el punto de inicio y de referencia en el proceso cíclico del análisis didáctico. El análisis de contenido es un análisis de las matemáticas escolares. Su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula.

Rico (1997c, p. 31) describe el conocimiento conceptual así:

> Los conceptos son aquello con lo que pensamos y, según su mayor o menor concreción, podemos distinguir tres niveles de conocimientos en el campo conceptual:
> i) los *hechos*, que son unidades de información y sirven como registros de acontecimientos;
> ii) los *conceptos* propiamente tales, que describen una regularidad o relación de un grupo de hechos, suelen admitir un modelo o representación y se designan con signos o símbolos;
> iii) las *estructuras conceptuales*, que sirven para unir conceptos o para sugerir formas de relación entre conceptos constituyendo, a veces, conceptos de orden superior, ya que pueden establecer algún orden o relación entre conceptos no inclusivos.

La anterior es una descripción, desde una perspectiva cognitiva, de la noción de concepto en sus distintos niveles de concreción. Su interpretación desde la perspectiva de las matemáticas escolares, en la dimensión conceptual, permite organizar el conocimiento matemático en hechos, conceptos y estructuras conceptuales. Restrinjo el análisis de contenido a los conceptos y a las estructuras conceptuales. Los hechos pueden ser utilizados como ejemplos o casos particulares de los conceptos, pero no los incluiré formalmente en el análisis.

En el análisis de contenido se busca identificar y describir estructuradamente los diversos significados matemáticos de la estructura matemática. Este análisis se hace desde la perspectiva de las matemáticas escolares y tiene en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico). A continuación considero cada uno de estos significados.

## Estructura conceptual

La estructura conceptual, como herramienta para el análisis de las matemáticas escolares, es la descripción, a nivel de conceptos y relaciones entre ellos, de la estructura matemática en cuestión. Por lo tanto, la estructura conceptual no es solamente la enumeración de los conceptos que se encuentran involucrados en la estructura matemática. La construcción de la estructura conceptual es un proceso que se inicia con la identificación de los conceptos y algunas de sus relaciones pero que se desarrolla en la medida en que se tienen en cuenta los sistemas de representación, los modelos y los fenómenos asociados. La Figura Nº 4 muestra una versión inicial de la estructura conceptual para la función de segundo grado (Gómez y Carulla, 2001).

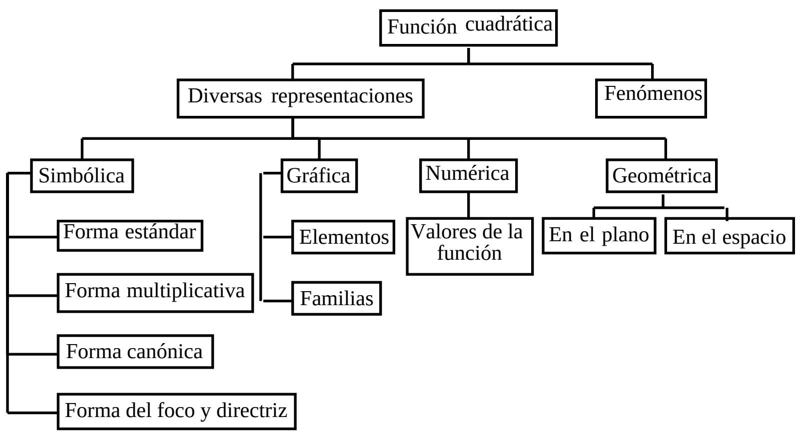


*Figura Nº 4. Estructura conceptual de la función de segundo grado*

El nivel de detalle con en el que se presenta la estructura matemática en la estructura conceptual de la Figura Nº 4 no es posible identificar los conceptos involucrados. Para ello, tenemos que entrar en mayor detalle. La Figura Nº 5 muestra algunos aspectos de la representación simbólica de la función cuadrática. En este caso, aparecen los parámetros de las diversas formas simbólicas. Cuando podemos identificar conceptos dentro de la estructura conceptual, vemos la necesidad de establecer relaciones. En la figura se insinúan relaciones entre los parámetros de las formas simbólicas. Por otro lado, cuando representamos los conceptos en la estructura conceptual, aparece la necesidad de establecer las relaciones entre estos conceptos y sus representaciones. La Figura Nº 6 muestra un ejemplo de diferentes relaciones o

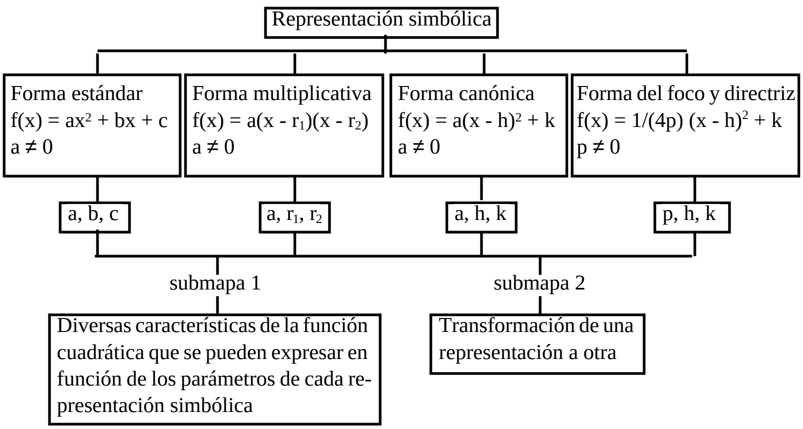


*Figura Nº 5. Representación simbólica de la función cuadrática*

conexiones que es posible establecer en una parte de la estructura conceptual de la función cuadrática. Se pueden identificar diferentes tipos de conexiones:

- conexiones que establecen relaciones entre diferentes elementos de la estructura matemática (por ejemplo, entre las diferentes formas simbólicas y sus parámetros),
- conexiones que asocian las diferentes representaciones de un mismo elemento (por ejemplo, los parámetros de la forma multiplicativa y las raíces de la parábola),
- conexiones que muestran transformaciones de un elemento en otro dentro de un sistema de representación (por ejemplo, el pro-

cedimiento de factorización para pasar de la forma simbólica estándar a la forma simbólica multiplicativa),

- conexiones que muestran la relación entre categorías de fenómenos y las subestructuras que los modelizan (por ejemplo, la relación entre las propiedades del foco de la parábola y los fenómenos de óptica que utilizan estas propiedades —que no se muestra en la figura).

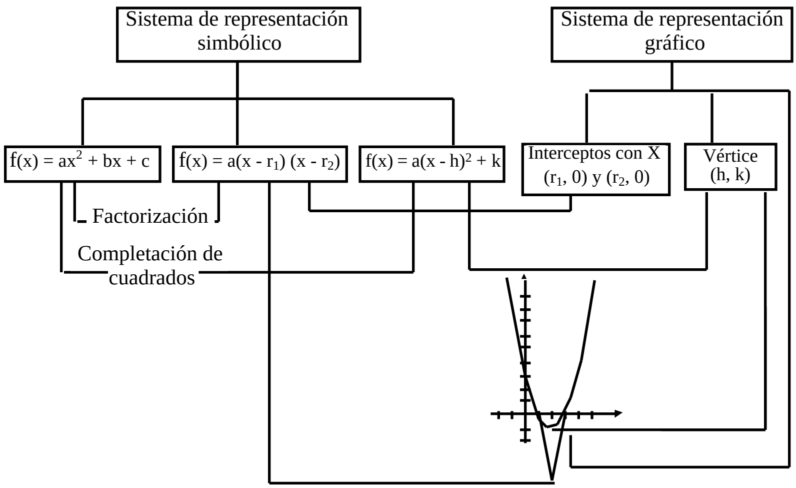


*Figura Nº 6. Conexiones en una estructura conceptual*

La construcción de la estructura conceptual se basa en los sistemas de representación. A continuación describo algunas de las características de los sistemas de representación y estudio su papel en el análisis de contenido.

## Sistemas de representación

El análisis de contenido se centra en la noción de sistema de representación. La estructura conceptual deberá representar la estructura matemática en todos sus posibles sistemas de representación. Cada uno de estos sistemas de representación aporta un significado de la estructura matemática desde la perspectiva de las matemáticas escolares. El término “sistema de representación” tiene diferentes significados en la didáctica de la matemática (Goldin y Janvier, 1998, pp. 1-2) y he hecho una selección de ellos que describo a continuación.

Utilizamos los sistemas de representación para representar diferentes facetas de un concepto o estructura matemática y trabajamos con los sistemas de representación bajo el supuesto de que se ciñen a un conjunto de reglas que se encuentran condicionadas por las matemáticas, en general, y por el concepto matemático específico, en particular. Por estas razones, considero que la definición de Kaput (1992) sobre sistema de notación se adapta a mis necesidades. De acuerdo con esta definición, un sistema de representación es "un sistema de reglas para (i) identificar o crear caracteres, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)" (p. 523). Complemento esta definición de Kaput con la primera de las definiciones de Goldin y Janvier (1998), en la que un sistema de representación puede ser también "una situación física externa estructurada, o un conjunto de situaciones estructuradas en un ambiente físico que pueden ser descritas matemáticamente o pueden interpretarse en el sentido de involucrar ideas matemáticas" (p. 1). Esta definición complementaria permite considerar, como parte de las características de un concepto o estructura matemática, al conjunto de fenómenos sociales, naturales y matemáticos que pueden ser organizados por subestructuras de dicha estructura.

La noción de sistema de representación permite describir las actividades matemáticas que tienen lugar en el discurso matemático del aula. Esta descripción se basa en cuatro operaciones que se pueden realizar con respecto a los sistemas de representación y que es posible representar en la estructura conceptual (ver Figura Nº 4, Figura Nº 5 y Figura Nº 6).

La primera operación es la *creación de signos o expresiones*. Esta operación está regida por las normas que regulan el sistema de representación y es importante en las matemáticas escolares porque es la que produce expresiones válidas e inválidas ( $(x) f = 2x^2 + 1$ es un ejemplo de una expresión inválida).

Las operaciones segunda y tercera son las *transformaciones sintácticas variantes e invariantes*. Estas son transformaciones de una expresión en otra dentro de un mismo sistema de representación. Por ejemplo, en $f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$ tienen lugar dos transformaciones sintácticas invariantes (el objeto matemático no cambia), mientras que la traslación vertical de la parábola A a la parábola B en la Figura Nº 7 es una transformación sintáctica variante (el objeto matemático cambia).

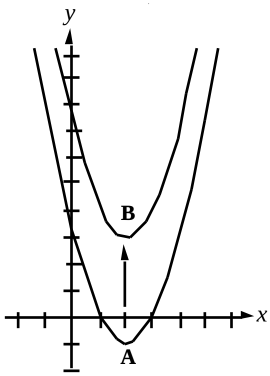


*Figura Nº 7. Transformación sintáctica variante*

La cuarta operación es la *traducción entre sistemas de representación*. Se refiere al paso de un sistema de representación a otro. Es el caso, por ejemplo, de asociar la parábola A de la Figura Nº 7 con su representación simbólica $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

Es posible imaginar los sistemas de representación como planos paralelos conectados. En un plano dado, uno puede crear signos o expresiones (primera operación) o transformar sintácticamente expresiones (segunda y tercera operaciones). Y uno puede pasar de un plano a otro por medio de traducciones entre sistemas de representación (cuarta operación). Detrás de estas operaciones hay dos elementos que las regulan: los conceptos matemáticos representados y las normas de los sistemas de representación.

Para construir la estructura conceptual de un tópico, el profesor debe atender a tres dimensiones que se complementan y se desarrollan paralelamente: los conceptos, los sistemas de representación y las conexiones. En la medida en que el profesor identifica conceptos que conforman la estructura matemática, él debe determinar las diversas representaciones de esos conceptos. Y, al distinguir estas representaciones, él tendrá que establecer las relaciones entre ellas. Algunas de estas relaciones serán de pertenencia. Por ejemplo, al afirmar que el foco es un elemento de la representación gráfica de la función cuadrática o que la dilatación (parámetro a) es un elemento de todas sus representaciones simbólicas. El profesor tendrá que identificar y explicitar en la estructura conceptual las diversas representaciones de un mismo concepto y las relaciones entre ellas. Estas relaciones determinan las traducciones entre sistemas de representación. También tendrá que exponer las relaciones entre los conceptos dentro de un mismo sistema de representación. Estas relaciones describen las transformaciones sintácticas. La construcción de la estructura conceptual con base en los sistemas de representación es un proceso cíclico en el que, en la medida en la que se avanza, se descubren nuevos aspectos que se deben considerar. Al realizar este proceso, el profesor debe poner en juego su conocimiento matemático. Sin embargo, no bastará con movilizar el conocimiento simbólico formal preponderante en las matemáticas disciplinares. El profesor tiene que abordar el análisis de la estructura matemática desde la perspectiva de los significados estructurales y representacionales expuestos hasta ahora y profundizar en la descripción de esos significados para la estructura matemática en la que trabaja. La descripción detallada de la estructura conceptual con base en los sistemas de representación permite identificar y delimitar las subestructuras matemáticas que conforman la estructura matemática representada. Algunas de esas subestructuras pueden modelizar fenómenos sociales, naturales y matemáticos. Considero a continuación esa posibilidad.

## Análisis fenomenológico y modelos

La mayoría de las directivas gubernamentales e institucionales resaltan la relación entre las matemáticas y la experiencia. El profesor debe analizar esta relación para identificar, describir, caracterizar y clasificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser organizados (modelizados) por subestructuras contenidas en la estructura en cuestión. El profesor debe incluir este análisis dentro de la estructura conceptual que resulta del análisis de contenido. Este procedimiento se denomina *análisis fenomenológico*. Para describirlo, comienzo con algunos ejemplos.

La función cuadrática permite modelizar multitud de fenómenos naturales, sociales y matemáticos. Con base en ese proceso de modelización es posible resolver problemas relacionados con esos fenómenos. El problema de prever y describir la trayectoria de una pelota de golf o del obús de un cañón, el problema de optimizar el área de un terreno que debe tener un perímetro fijo, el diseño de antenas de satélite o de lentes, y el problema de hallar dos números que cumplen ciertas condiciones con respecto a su suma y producto son ejemplos de este tipo de problemas. En general, la resolución de estos problemas utiliza sólo algunos de los elementos y propiedades de la estructura matemática. Por ejemplo, el diseño de antenas de satélite o de lentes utiliza propiedades del foco de la parábola o el problema de optimizar el área de un terreno con un perímetro dado utiliza el hecho de que el vértice de una parábola con dilatación negativa es su punto máximo. En otras palabras, la resolución de estos problemas pone en juego una subestructura de la estructura matemática en cuestión.

Los ejemplos que he presentado muestran que una misma subestructura se puede relacionar con diversos fenómenos. Por ejemplo, la subestructura que permite abordar el problema de la trayectoria de una pelota de golf, modeliza todos aquellos fenómenos que se refieren al movimiento de cuerpos en un campo de fuerza uniforme. Podemos por lo tanto establecer una relación entre subestructuras y fenómenos en la que a cada fenómeno le asignamos la subestructura que lo modeliza. Se pueden establecer parejas ($\text{Subestructura}_i$, $\text{Fenómeno}_j$), en las que el $\text{Fenómeno}_j$ es modelizado por la $\text{Subestructura}_i$. La Figura Nº 8 muestra un esquema de estas relaciones.

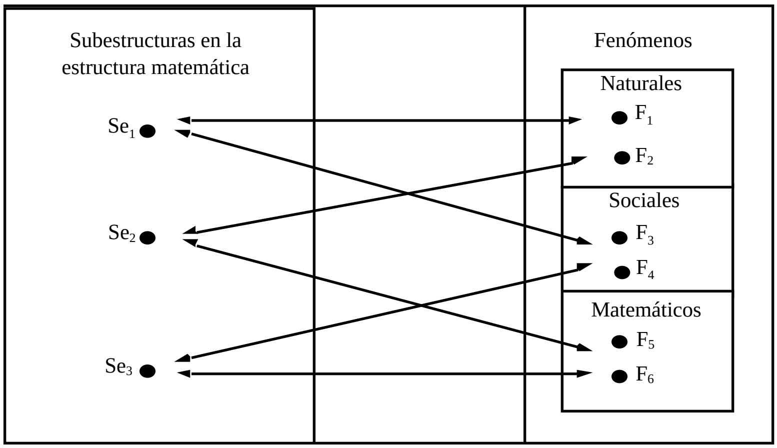


*Figura Nº 8. Análisis fenomenológico y modelos*

El análisis fenomenológico de una estructura matemática consiste en la identificación de las subestructuras correspondientes a esa estructura, de los fenómenos organizados por ellas y de la relación entre subestructuras y fenómenos. De esta manera se puede establecer una relación de equivalencia en la que cada clase de equivalencia, representada por una subestructura dada, organiza todos aquellos fenómenos que pueden ser modelizados por ella. "El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto y la estructura con esos fenómenos" (Puig, 1997, p. 63). Denominamos modelo a la tripla (subestructura, fenómeno, relación) en la que la subestructura modeliza el fenómeno de acuerdo con una relación. Esta relación identifica aquellas características estructurales del fenómeno que se pueden representar con elementos y propiedades de la subestructura en cuestión. Por lo tanto, el término modelo se puede referir a una tripla en la que se identifica un fenómeno específico (por ejemplo, la caída libre de una pelota de una masa específica desde una altura dada), o al conjunto de triplas que reúne a todos los fenómenos de caída libre de objetos, o, inclusive, a todos los fenómenos que se refieren al movimiento de cuerpos no relativistas en un campo de fuerzas. Dado que la subestructura matemática organiza y caracteriza los fenómenos, en algunas ocasiones se utiliza el término modelo para designar la subestructura misma. Utilizaré el término *modelo matemático* para ello.

El análisis fenomenológico no consiste únicamente en establecer la relación entre subestructuras y fenómenos y clasificar los fenómenos de acuerdo con las subestructuras con las que están relacionados. En el análisis fenomenológico el profesor debe también describir esas relaciones. En esta descripción, el profesor debe caracterizar los aspectos relevantes del fenómeno (o del problema que se quiere resolver dentro del contexto del fenómeno) que pueden asociarse (modelizarse) con elementos y propiedades específicas de la estructura matemática. Por ejemplo, en el caso de los reflectores parabólicos se pone en juego una propiedad de la parábola, por un lado, y un principio de la física, por el otro. La propiedad de la parábola establece que la tangente en cualquier punto de la parábola forma ángulos iguales con el segmento que une el punto con el foco y con la recta que pasa por el punto y es paralela al eje de simetría de la parábola. El principio de la física afirma que cuando un rayo choca con una superficie reflectora, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Por lo tanto, en el análisis fenomenológico se identifican, por un lado, aquellas características del fenómeno (o de un problema relacionado con el fenómeno) que son relevantes dentro del problema desde el punto de vista matemático y se relacionan con elementos y propiedades de la estructura matemática en uno o más sistemas de representación, por el otro (ver Figura Nº 9). Más adelante, en el apartado correspon-

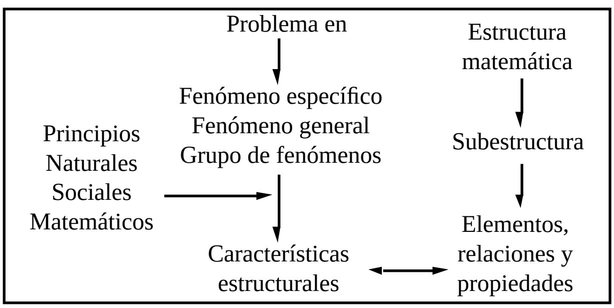


*Figura Nº 9. Análisis fenomenológico*

diente al análisis de instrucción, consideraré con más detalle el proceso de modelización que aquí se insinúa. El propósito de la modelización no es únicamente el de describir matemáticamente (en uno o más sistemas de representación) aspectos relevantes de un fenómeno. La potencia de la modelización surge de la capacidad que nos da el modelo matemático (y las propiedades de la estructura matemática en la que se representa) para resolver problemas relacionados con el fenómeno, que no se podrían resolver en el contexto no matemático del fenómeno.

La discusión sobre los sistemas de representación en la didáctica de la matemática puede llevar a una serie de paradojas (Rico, 2000). Algunas de estas paradojas tienen que ver con la condición ontológica de los objetos matemáticos y con la dualidad entre las representaciones internas y externas. Con respecto a la existencia de los objetos matemáticos, suponemos, siguiendo a Sfard (2000) y Dörfler (2000), que ellos no existen por fuera del discurso matemático. Sin embargo, "la sensación de los participantes [en el discurso] de que los objetos existen es una condición necesaria para el uso eficiente de los significantes" (Sfard, 2000, p. 91). Por lo tanto, aunque los objetos matemáticos no existen por fuera del discurso, quienes participan en él se comportan como si existieran. Para Cobb, Yackel y McClain (2000) la dualidad entre representaciones internas y externas desaparece: símbolo y significado se construyen dinámicamente. Lo importante es la actividad de simbolización en la que el sujeto se hace capaz de actuar socialmente compartiendo significados. El significado para un sistema de símbolos se construye en la medida en que se llegan a acuerdos sociales sobre la manera como se manejan los símbolos. Estas aclaraciones resaltan el papel de la noción de sistemas de representación en las actividades de profesor y escolares en la construcción del conocimiento matemático y la relación entre el análisis de contenido y el análisis cognitivo que considero a continuación.

## ANÁLISIS COGNITIVO

Dada su percepción de la comprensión de los estudiantes al final de un ciclo del análisis didáctico, y teniendo en cuenta los objetivos que él se ha propuesto para el siguiente ciclo, el contenido que pretende tratar, y el contexto, en el análisis cognitivo, el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje. El análisis cognitivo es un análisis *a priori*. Con él, el profesor pretende prever las actuaciones de los escolares en la fase posterior del ciclo en la que se ponen en juego las actividades de enseñanza y aprendizaje que él ha diseñado. Estas hipótesis deben estar sustentadas por una descripción de aquellos aspectos cognitivos que se relacionan directamente con la estructura matemática sobre la cual se trabaja en dichas actividades. Por lo tanto, el análisis de contenido sirve de punto de partida y de punto de referencia para el análisis cognitivo.

El análisis cognitivo de una estructura matemática es, por un lado, la identificación, descripción y caracterización sistemática, detallada y fundamentada de las tareas (relacionadas con dicha estructura matemática) que los escolares pueden resolver en ese momento y de aquellas tareas que deberían poder abordar durante la sesión que se está planificando. El análisis cognitivo es también la identificación, descripción y caracterización de los errores en los que los escolares pueden incurrir al abordar dichas tareas, de las dificultades que subyacen a esos errores y de los obstáculos que es necesario superar para resolver dichas dificultades. Describiré el significado de estos términos más adelante.

La estructura conceptual que el profesor ha producido en el análisis de contenido, su conocimiento sobre el aprendizaje y la comprensión en matemáticas, y su conocimiento sobre la estructura matemática en cuestión le permiten caracterizar las tareas que los escolares pueden resolver y las que deberían poder abordar desde la perspectiva de:

(a) los elementos (conceptos y estructuras conceptuales) involucrados en la tarea,

(b) las representaciones de esos conceptos y estructuras conceptuales,

(c) las relaciones entre esas representaciones,

(d) las relaciones entre los elementos de una misma representación,

(e) los modelos involucrados.

Vemos, por lo tanto, la relación entre el análisis de contenido y el análisis cognitivo. Cada tarea involucra unos conceptos (o estructuras conceptuales) pertenecientes a la estructura matemática sobre la que se está trabajando. El punto (a) requiere que el profesor identifique aquellos elementos de la estructura conceptual que pueden llegar a ponerse en juego cuando los escolares aborden la tarea. Es posible que una tarea pueda abordarse poniendo en juego más de un grupo de conceptos. Es decir, que su resolución no requiera de la puesta en juego de una única subestructura. La identificación de estos elementos (conceptos y estructuras conceptuales) debe hacerse en aquellos sistemas de representación que, en principio, podrían o deberían activarse en la resolución de dicha tarea. De nuevo, diferentes aproximaciones a la tarea pueden poner en juego diferentes representaciones de los conceptos involucrados. Mientras que en el análisis de contenido, el profesor identifica estos elementos desde la perspectiva matemática, en el análisis cognitivo, el profesor busca identificar estos elementos desde la perspectiva del conocimiento conceptual que el escolar debería movilizar para poder abordar las tareas. Estos aspectos se refieren a los puntos (a) y (b).

Los puntos (c) y (d) tienen que ver con el conocimiento procedimental. Desde la perspectiva del análisis de contenido, en estos puntos el profesor identifica relaciones entre representaciones de un mismo concepto, entre diferentes expresiones de ese concepto dentro de un mismo sistema de representación y entre diferentes conceptos de la estructura conceptual. Desde la perspectiva del análisis cognitivo, el interés del profesor se debe centrar en identificar las capacidades de los escolares para establecer las relaciones necesarias para abordar y resolver la tarea en cuestión. Relaciono estas capacidades con los niveles del conocimiento procedimental (Rico, 1997c, p. 31):

> Los procedimientos son aquellas formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas; igualmente podemos distinguir tres niveles diferentes en el campo de los procedimientos:
> i) las destrezas consisten en la transformación de una expresión simbólica en otra expresión; para ello hay que ejecutar una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos; por lo general, las destrezas se ejecutan procesando hechos;
> ii) los razonamientos se presentan al procesar relaciones entre conceptos, y permiten establecer relaciones de inferencia entre los mismos;
> iii) las estrategias, que se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones; las estrategias operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos implicados.

Las destrezas tienen que ver entonces con dos de las relaciones que el profesor identifica en el análisis de contenido: las relaciones entre diferentes representaciones de un mismo concepto (por ejemplo, la representación gráfica y simbólica de la función cuadrática) y las transformaciones de las expresiones de un concepto dentro de una misma representación (por ejemplo, la completación de cuadrados como procedimiento para transformar una forma simbólica de la función cuadrática en otra). Los razonamientos, por su parte, describen la capacidad de los escolares para relacionar dos o más conceptos dentro un sistema de representación (por ejemplo, la relación entre el foco y la directriz de la parábola en la representación gráfica de la función cuadrática). Las estrategias tienen que ver, al menos parcialmente, con el punto (e).

El punto e) se refiere al análisis fenomenológico descrito en el análisis de contenido. En este análisis, el profesor debe identificar, describir, caracterizar y clasificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser organizados (modelizados) por subestructuras contenidas en la estructura en cuestión. Por lo tanto, desde la perspectiva matemática se da un juego entre fenómenos por un lado y modelos matemáticos por el otro. Se establecen parejas de fenómenos y subestructuras matemáticas que los modelizan. Desde la perspectiva del análisis cognitivo, cuando los escolares abordan una tarea cuya formulación involucra fenómenos y no está descrita en lenguaje matemático, su resolución requiere estrategias. Estas estrategias tienen que ver con la identificación del fenómeno, la representación del fenómeno en términos matemáticos dentro de la subestructura que lo modeliza, la resolución del problema dentro de las representaciones matemáticas, la traducción e interpretación de los resultados de la resolución en términos del fenómeno original, y la verificación de la solución. Estas estrategias componen el proceso de modelización que consideraré más adelante.

La identificación, descripción y caracterización del conocimiento conceptual y procedimental que puede llegar a ponerse en juego cuando los escolares abordan unas tareas específicas es la primera parte del análisis cognitivo. El análisis cognitivo también involucra la identificación, descripción y caracterización de los errores en los que los escolares pueden incurrir, de las dificultades que subyacen a esos errores y de los obstáculos que es necesario superar para resolverlas. Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta (Radatz, 1979). Los errores se identifican en las producciones de los escolares cuando ellos abordan tareas específicas poniendo en juego el conocimiento que tienen en ese momento. Por lo tanto, la mayor parte de los errores son consecuencia de ese conocimiento y de la manera como los escolares lo movilizan para resolver la tarea. Los errores se pueden clasificar de múltiples maneras (Rico, 1995b). En el análisis cognitivo, el profesor identifica aquellos errores que son producto del conocimiento de los escolares y los puede clasificar en dos categorías: aquellos que son producto de un conocimiento que es independiente de la estructura matemática que se está trabajando y aquellos que surgen de un conocimiento que es específico a esa estructura matemática. Por ejemplo, los escolares pueden incurrir en errores porque no conocen o no utilizan apropiadamente reglas lógicas de deducción. Éste es un conocimiento que no es específico a la estructura matemática que se pone en juego en la tarea. El conocimiento que el profesor debe tener sobre el aprendizaje y la comprensión en matemáticas y la investigación que él haga en la literatura le deben permitir identificar esos errores. Por otro lado, cada estructura matemática tiene asociados unos errores que son específicos a ella.

Mientras que los errores se expresan en la resolución de una tarea específica y, por lo tanto, son producto de la actuación del escolar, las dificultades organizan los errores y se refieren al conocimiento que se pone en juego cuando los errores se producen. Una manera de clasificar las dificultades consiste en disponerlas en dos categorías: aquellas que son específicas a la estructura matemática que se está trabajando y aquellas que no lo son. Las dificultades que son específicas a la estructura matemática pueden ser organizadas de acuerdo con la dualidad entre conocimiento conceptual y procedimental. Por ejemplo, cuando los escolares no pueden identificar el foco en la gráfica de una parábola, ellos pueden incurrir en errores, puesto que no conocen apropiadamente hechos que son necesarios en la resolución de la tarea. De la misma manera, se puede incurrir en un error cuando se ponen en juego uno o más conceptos o cuando la tarea requiere relacionar esos conceptos. Éste sería el caso de confundir las coordenadas del foco de una parábola con las coordenadas de su corte con el eje de las ordenadas. Por otro lado, los escolares pueden incurrir en errores al desconocer o aplicar mal una destreza, realizar un razonamiento o poner en juego una estrategia. Por ejemplo, los escolares pueden incurrir en errores al relacionar elementos de la representación simbólica en la representación gráfica (para obtener las coordenadas del foco a partir de la forma estándar), al relacionar diferentes expresiones dentro de un mismo sistema de representación (en el procedimiento de completación de cuadrados), al establecer relaciones entre dos conceptos (al hacer la equivalencia entre las soluciones de la ecuación cuadrática y los valores para los cuales la función cuadrática se anula), o al interpretar un fenómeno en términos de una representación matemática (al resolver problemas de tiro parabólico).

Las dificultades se conectan y se refuerzan en redes complejas. Cuando estas relaciones entre dificultades resultan en conocimientos firmemente establecidos que han funcionado con éxito en el pasado, resulta difícil resolverlas. Es el caso entonces de un conocimiento parcial, arraigado, cuya movilización genera errores en algunas circunstancias. Nos encontramos con un obstáculo. Un obstáculo es un conocimiento adquirido que tiene un dominio de eficacia. Los escolares lo utilizan para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado. No obstante, cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto se generan respuestas inadecuadas, y se producen errores. En resumen, "las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores" (Socas, 1997, p. 125).

Los diferentes elementos del análisis cognitivo están relacionados. He establecido la relación entre obstáculos y dificultades, entre errores y dificultades, entre las tareas y los errores en los que los escolares incurren cuando las abordan, y entre la descripción de esas tareas y el resultado del análisis de contenido de la estructura matemática. Para identificar, describir y caracterizar las tareas, los errores, las dificultades y los obstáculos el profesor debe movilizar diversos conocimientos. El profesor debe tener un conocimiento y asumir una postura con respecto a la comprensión y el aprendizaje en matemáticas. Este conocimiento, que es independiente de la estructura matemática en cuestión, le permite identificar algunos errores, dificultades y obstáculos. Por otro lado, el profesor necesita profundizar en el significado cognitivo de la estructura matemática para efectos de identificar, describir y caracterizar las tareas que los escolares pueden abordar y los errores en los que ellos pueden incurrir al hacerlo, las dificultades que subyacen a esos errores y los obstáculos en donde se originan.

De la misma manera que los resultados del análisis de contenido pueden implicar la necesidad de revisar la formulación de los contenidos propuestos al inicio del ciclo, los resultados del análisis cognitivo pueden llevar al profesor a reformular los objetivos que desea lograr. Por otra parte, la información que se produce en el análisis cognitivo depende de la información que se produce en el análisis de contenido. La descripción que se hace de las tareas que los escolares pueden abordar se basa en la identificación de los diversos elementos y relaciones de la estructura conceptual que pueden estar involucrados en la tarea. Estos elementos y relaciones (conceptos y conexiones entre ellos) están en la base de las dificultades que son específicas a la estructura matemática y que subyacen a una parte de los errores en los que los escolares pueden incurrir cuando abordan las tareas. Al profundizar en el análisis cognitivo, el profesor revisará el análisis de contenido. Esta revisión puede dar lugar a reformulaciones de esa información. De esta manera, el profesor mantiene una relación biunívoca entre el análisis de contenido y el análisis cognitivo (que se representa por la flecha en los dos sentidos en la Figura Nº 3). La relación entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción es similar. Con el análisis cognitivo el profesor busca predecir los errores en los que los escolares pueden incurrir cuando aborden las tareas que conformarán las actividades de enseñanza y aprendizaje que él diseñe en el análisis de instrucción. Estas tareas deberán ser escogidas y diseñadas de tal manera que pongan en juego el conocimiento (dificultades y obstáculos) que subyace a esos errores. Por lo tanto, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción deben hacerse de manera coordinada. En el apartado que sigue describo el análisis de instrucción.

## ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

El resultado del análisis de instrucción debe ser la identificación y descripción de las tareas que es posible utilizar en el diseño de las actividades de enseñanza y aprendizaje. Utilizo el término “actividades de enseñanza y aprendizaje” en un sentido amplio. Una actividad puede ser una presentación introductoria hecha por el profesor o la resolución de una tarea por parte de los escolares, entre otras. Las actividades se refieren al contenido descrito en la estructura conceptual y examinado en el análisis de contenido y deben tener como propósito lograr los objetivos descritos al comienzo del ciclo. Por lo tanto, deben abordar los errores, dificultades y obstáculos identificados en el análisis cognitivo. Como veremos en el siguiente apartado, el diseño de actividades se centra en la selección y justificación de las tareas que conformarán esas actividades a partir de un universo de tareas que son compatibles con el análisis de contenido y el análisis cognitivo. En el análisis de instrucción el profesor organiza este universo y lo complementa con dos consideraciones adicionales: la resolución de problemas y los materiales y recursos disponibles.

La importancia que se da a la relación entre las matemáticas y la experiencia en las directivas gubernamentales e institucionales nos lleva a resaltar la modelización de fenómenos en la selección de las tareas que pueden componer las actividades de enseñanza y aprendizaje. En el marco del análisis de contenido describí la idea de modelo como una relación biunívoca entre elementos y propiedades de una subestructura de la estructura matemática y características estructurales de fenómenos sociales, naturales y matemáticos y establecí su relación con el análisis fenomenológico. Estas relaciones entre estructura matemática y fenómenos se expresan en el proceso de modelización y en las destrezas, los razonamientos y las estrategias que los escolares deben desarrollar para identificar el modelo matemático que corresponde a un fenómeno (o a un problema en términos de un modelo real que resulta de simplificar y estructurar el fenómeno original), para expresar ese fenómeno o problema en términos de uno o más sistemas de representación, para resolver el problema o interpretar el fenómeno dentro de esos sistemas de representación, para traducir la solución o la interpretación en términos del fenómeno, y para verificar esa solución o interpretación. En la Figura Nº 10 he identificado estos procedimientos. Por otro lado, también he identificado (subrayado) dos procedimientos que el profesor debe realizar para diseñar la tarea: el análisis fenomenológico, como el procedimiento que le permite establecer la relación entre fenómenos (y los problemas que se refieren a ellos) y la estructura matemática; y la descripción que el profesor debe hacer del problema del mundo real en un texto del tipo que comúnmente se conoce como problema de palabras (Ortiz, 2000, p. 15).

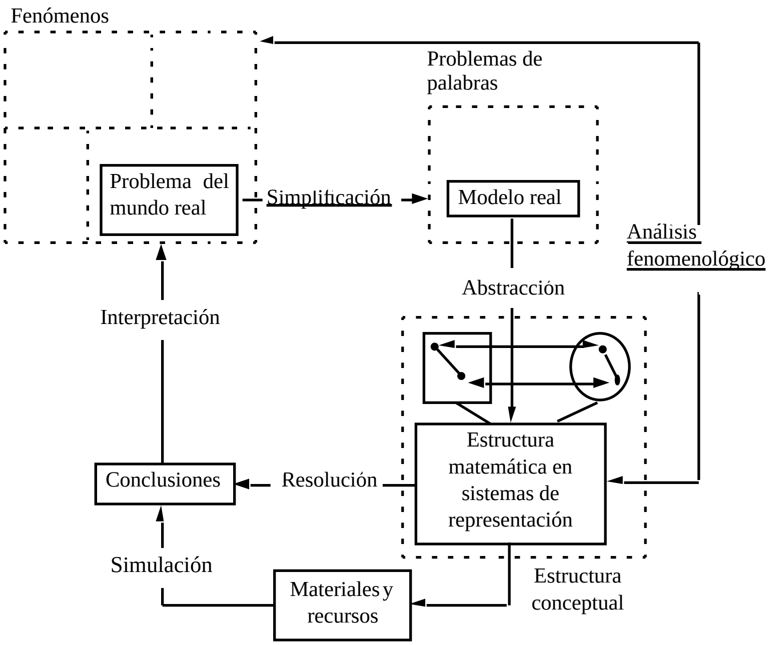


*Figura Nº 10. Análisis fenomenológico, resolución de problemas y modelización*

Desde la perspectiva del análisis de instrucción, la gestión de tareas que busquen el desarrollo de destrezas, razonamientos y estrategias de modelización implica la necesidad de que el profesor tenga conocimientos sobre resolución de problemas. En este sentido se establece una relación entre el análisis fenomenológico como parte del análisis de contenido, las estrategias de modelización como parte del análisis cognitivo, y la resolución de problemas como parte del análisis de instrucción.

El universo de tareas posibles puede ampliarse cuando el profesor tenga en cuenta los materiales y recursos que tiene disponibles y la manera como estos materiales y recursos permiten diseñar experiencias matemáticas complementarias a aquellas que es posible proponer con papel y lápiz. Los materiales y recursos pueden transformar la manera como profesor y escolares representan los conceptos y estructuras conceptuales que hacen parte de la estructura matemática. Por ejemplo, algunos materiales manipulativos pueden convertirse en “modelos no matemáticos”[3] de subestructuras de la estructura matemática que se desea tratar. Con estos modelos físicos (como el ábaco) es posible establecer una relación biunívoca entre algunos elementos de la estructura matemática y elementos del modelo, y entre las normas que rigen el manejo del modelo y las normas matemáticas que regulan los elementos correspondientes de la estructura matemática. De esta manera, la manipulación del modelo permite “simular” el funcionamiento de la estructura matemática y genera un nuevo significado para ella. Otros materiales y recursos, como las calculadoras y algunos programas de ordenador, pueden verse como sistemas de representación complementarios en los que no sólo se representan los conceptos involucrados, sino que también es posible manipular dinámicamente estos conceptos. Estos modelos y estas nuevas representaciones pueden sugerir formas alternativas en las que los escolares ponen en juego su conocimiento al resolver tareas y, por lo tanto, pueden insinuar nuevas tareas que permitan abordar los errores, dificultades y obstáculos identificados en el análisis cognitivo.

## SELECCIÓN DE TAREAS Y DISEÑO DE ACTIVIDADES

Para cualquier estructura matemática existen multitud de tareas disponibles en los libros de texto y en la literatura de investigación e innovación curricular. Por lo tanto, el problema de la planificación en esta fase del análisis didáctico no es necesariamente el de crear nuevas tareas, sino el de seleccionar justificadamente un grupo de tareas que sean coherentes con los contenidos y objetivos propuestos al inicio del ciclo y con los resultados de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción (cuadro 3 del esquema de la Figura Nº 3).

La selección de contenidos y objetivos al inicio del ciclo determina unos marcos conceptuales y cognitivos para el análisis didáctico. Dentro de este contexto, en el análisis de contenido se identifican:

a. los conceptos y estructuras conceptuales a tratar,

b. las representaciones de estos conceptos y estructuras conceptuales,

c. las conexiones entre diversas representaciones de un mismo elemento de la estructura conceptual,

3. Recordemos que la noción de modelo involucra una tripla (fenómeno, estructura matemática, relación). En esta caso, el fenómeno es el material junto con las normas que regulan su utilización. Por lo tanto, aquí estoy utilizando el término “modelo” con dos significados relacionados, pero diferentes.

d. las conexiones entre diferentes elementos en un mismo sistema de representación,
e. los modelos involucrados.

En el análisis cognitivo se determinan:

- los significados que se pueden construir (hechos, conceptos y estructuras conceptuales relacionados con los puntos a y b anteriores),
- los procedimientos que se pueden desarrollar (destrezas, razonamientos y estrategias relacionados con los puntos c, d y e),
- los errores, las dificultades y los obstáculos que se pueden abordar (descritos en términos de los significados y los procedimientos anteriores).

Finalmente, en el análisis de instrucción se identifican:

- los procesos de modelización y de resolución de problemas específicos a la estructura matemática,
- los materiales y recursos disponibles.

De esta manera, la información que resulta de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción delimita el universo de tareas que se pueden utilizar en las actividades de enseñanza y aprendizaje. La selección de tareas y la planificación de su gestión en el aula también depende de la visión que el profesor tenga de las matemáticas escolares, su aprendizaje y enseñanza. Por ejemplo, una postura de constructivismo social con respecto al aprendizaje implica la formulación de tareas que:

- tengan en cuenta la comprensión de los escolares en ese momento,
- generen su interés,
- puedan ser abordadas por los escolares con el conocimiento que tienen en ese momento,
- representen un desafío para ellos,
- pongan en juego su conocimiento con el propósito de generar conflictos cognitivos,
- promuevan la construcción social de significados.

En esta fase del análisis didáctico, el profesor debe hacer un proceso de selección de tareas. Esta selección debe ser tal que las tareas que terminen conformando las actividades de enseñanza y aprendizaje sean coherentes con los contenidos y objetivos previstos y con el resultado de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción. Se puede pensar que el proceso va en un solo sentido: de los análisis al diseño. Y que, una vez que se han realizado los análisis, las actividades se deducen del resultado de esos análisis. Sin embargo, la riqueza de las estructuras matemáticas desde la perspectiva didáctica propuesta aquí y la complejidad de los procesos cognitivos necesarios para su comprensión implican que puede haber gran variedad de diseños que sean compatibles con unos resultados dados de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción. Por consiguiente, el diseño no se deduce de los análisis. Pero además, el profesor se encontrará siempre en un proceso sin terminar, puesto que la selección de una posible actividad requiere de su evaluación con respecto a los análisis que le dieron lugar. Al escoger o diseñar una actividad el profesor tiene que vislumbrar las diferentes maneras como los escolares pueden abordar las tareas que componen la actividad, los diferentes caminos y estrategias que ellos pueden tomar y utilizar al intentar resolverla, y las dificultades que pueden tener y los errores en los que pueden incurrir al intentarlo. En este proceso de puesta en juego hipotética de la actividad (que hace parte del diseño del análisis de actuación que considero más adelante), la información recogida en los otros análisis juega un papel central. La previsión de los caminos, estrategias, dificultades y errores (entre otros) debe surgir del análisis del contenido matemático, de los aspectos cognitivos y de los aspectos de instrucción. Cuando el profesor analice la actividad escogida a la luz de los diferentes análisis y de sus correspondientes elementos, se dará cuenta que puede revisar y mejorar esos análisis. Por consiguiente, esta evaluación de la actividad puede implicar la necesidad de reformular los análisis generando un nuevo ciclo, cuyo producto final será la selección de una nueva actividad compatible con el nuevo análisis (doble flecha entre los cuadros 2 y 3 del esquema de la Figura Nº 3).

Las reflexiones anteriores pueden dar a entender que el profesor no termina nunca de hacer análisis, seleccionar tareas y diseñar actividades, evaluarlas a la luz de los análisis, reformular esos análisis con motivo de la evaluación y volver a seleccionar tareas y diseñar actividades. Sin embargo, es el profesor quien decide cuándo termina una fase de este proceso. Habrá diferentes razones para hacerlo, entre ellas el tiempo. No obstante, el profesor deberá buscar al menos cuatro resultados:

- una selección de las tareas que conforman las actividades de enseñanza y aprendizaje;

- una justificación informada y sistemática, a la luz del análisis didáctico, de la validez de las actividades y tareas escogidas con respecto al contenido matemático en cuestión, a la comprensión de los escolares y a los objetivos que se ha propuesto;
- una previsión de las posibles actuaciones de los alumnos cuando se lleve a la práctica la actividad;
- ideas para la gestión de la clase, para el análisis de las actuaciones de los alumnos, y para sus reacciones a esas actuaciones.

Al realizar el análisis de instrucción y el diseño de tareas, el profesor pone en juego diversos conocimientos. La manera como él aborde la selección de tareas y el tipo de tareas que él seleccione dependerá de su visión y su conocimiento acerca de la enseñanza de las matemáticas. Esta visión y conocimiento están relacionados con sus visiones y conocimientos acerca de las matemáticas escolares y el aprendizaje de las matemáticas. Estas visiones y estos conocimientos no dependen directamente de la estructura matemática para la que se realiza la planificación. Sin embargo, el profesor pone también en juego conocimientos que son específicos a la estructura matemática. Es el caso de su conocimiento sobre el proceso de modelización y su relación con la resolución de problemas, por un lado, y de los materiales y recursos disponibles, por el otro. Con la selección de las tareas y la previsión de las actuaciones de los alumnos y las posibles reacciones del profesor a ellas culmina la fase de planificación del análisis didáctico. A continuación considero algunos aspectos de la puesta en práctica de esas actividades.

## PUESTA EN PRÁCTICA DE LAS ACTIVIDADES: DISCURSO EN EL AULA Y GESTIÓN DE CLASE

En este artículo no pretendo reflexionar en profundidad sobre la problemática de la gestión de la clase de matemáticas. Por ejemplo, no considero las reflexiones pedagógicas de carácter general. Me intereso por dos aspectos de la gestión de clase que están directamente relacionados con los fundamentos de las matemáticas escolares, el análisis didáctico y la estructura matemática objeto del proceso de enseñanza y aprendizaje. Se trata del discurso matemático del aula y de la planificación que, en algunas ocasiones, el profesor debe hacer sobre la marcha durante la clase.

El discurso matemático del aula juega un papel central en el proceso de construcción de los significados sociales que parten de y condicionan la conformación de los significados individuales. Esta construcción de significados (y el consiguiente desarrollo de destrezas, razonamientos y estrategias) debe surgir de la negociación de las normas que regulan ese discurso. Por lo tanto, los procesos de comunicación y justificación son centrales en el diseño y gestión de las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje. En el trabajo en grupo, los escolares deben asegurarse que el objeto de discusión es común y que existe un consenso en los significados que le asignan a ese objeto. Esta búsqueda del consenso requiere que cada quien justifique su posición y busque convencer a los otros. Paralelamente, en la comunidad de práctica del aula, grupos e individuos deben comunicarse y convencer a los demás participantes. El profesor, siendo el participante experto en esta comunidad, deberá guiar esta comunicación para resaltar las justificaciones válidas y promover la construcción de significados que estén acordes con los significados de las matemáticas escolares establecidos previamente por él. La planificación que resulta del análisis didáctico debe proveer al profesor con criterios para tomar estas decisiones y actuar durante la clase. Sin embargo, éste no es necesariamente el último nivel de la planificación.

La planificación de una hora de clase debe contener, entre otras cosas, la previsión de las actuaciones de los escolares cuando abordan las tareas que componen las actividades propuestas. La complejidad del contenido matemático y de los procesos cognitivos necesarios para construirlo hace que las actuaciones de los escolares puedan ser diferentes de aquellas previstas por el profesor en su planificación. Esta diferencia entre lo previsto y lo que realmente sucede puede ser un indicativo de dificultades y obstáculos que el profesor creía superados o que no logró prever y, por lo tanto, puede invalidar la planificación hecha previamente. El profesor puede considerar que no tiene sentido continuar con un seguimiento estricto de la planificación inicial. Tendrá entonces que reformular los objetivos y los contenidos de al menos una parte de la clase y producir una o más actividades que aborden esos errores, dificultades y obstáculos. Para ello, tendrá que realizar, sobre la marcha, un nuevo ciclo de análisis didáctico que parta de su percepción de las dificultades no previstas. En este caso, el profesor tendrá que poner en juego el análisis de contenido que ya ha producido, incluir aquellos aspectos de la estructura matemática que no se encuentren en ella y que estén en la base de las dificultades, reformular los análisis cognitivo y de instrucción y seleccionar nuevas tareas. Este tipo de análisis didáctico "sobre la marcha" debe sustentar aquellas nuevas decisiones y actuaciones que el profesor no tenía previstas en su planificación de la hora de clase. Aunque la gestión de clase incluye otros aspectos que no trato aquí (como, por ejemplo, el manejo de la disciplina), veo la gestión de las matemáticas escolares dentro del aula como un juego entre las actuaciones que el profesor tiene previstas en su planificación previa y las decisiones y las actuaciones que el profesor realiza con base en análisis didácticos “sobre la marcha” cuando las actuaciones de los escolares no corresponden a sus previsiones. Otro aspecto de la gestión de clase del profesor es la observación y registro de las producciones y actuaciones de sus alumnos. Esta actividad es el punto de partida para el análisis de actuación que considero a continuación.

## ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

El análisis de actuación es la última fase del análisis didáctico (cuadro 5 del esquema de la Figura Nº 3). El profesor recoge la información para el análisis de actuación durante la puesta en práctica de las actividades y basándose en las actuaciones de los escolares. Mientras que en el análisis cognitivo el profesor hace una previsión de las actuaciones de los escolares cuando ellos aborden las tareas propuestas, en el análisis de actuación él debe describir esas actuaciones. El análisis cognitivo es un análisis *a priori* y el análisis de actuación es un análisis *a posteriori*.

El resultado del análisis de actuación es la descripción sistemática de la comprensión de los escolares con el propósito de proporcionar información que sea útil para el inicio de un nuevo ciclo del análisis didáctico. Esta descripción debe hacerse, por un lado, en términos de las tareas que los escolares pudieron resolver. Estas tareas pueden ser indicadores del conocimiento adquirido por los escolares en ese ciclo del análisis didáctico y de las dificultades y obstáculos que ellos pudieron superar. Por el otro lado, en muchas ocasiones los escolares no podrán resolver adecuadamente todas las tareas propuestas. Aparecerán, por lo tanto, soluciones incompletas y con errores. El profesor deberá analizar estas soluciones con el objetivo de dilucidar las dificultades que subyacen a esos errores y los posibles obstáculos que explican esas dificultades. Este análisis surgirá de su experiencia y de su conocimiento sobre el aprendizaje y la comprensión de la estructura matemática en cuestión. El análisis de las actuaciones de los escolares se centra en la descripción de la manera como ellos abordan las tareas. Esta descripción seguirá esquemas similares a los utilizados en el análisis cognitivo. Es decir, el profesor debe identificar:

- los conceptos y estructuras conceptuales puestos en juego,
- las representaciones de esos conceptos que fueron utilizadas,
- las relaciones que establecieron entre los conceptos,
- las relaciones que establecieron entre las representaciones de los conceptos,
- los modelos utilizados.

Esta descripción del conocimiento conceptual de los escolares, le permite al profesor analizar al menos una parte de los errores en los que ellos hayan incurrido. Este análisis de errores conceptuales debe conjugarse con el consiguiente análisis del conocimiento procedimental. En este análisis el profesor debe determinar las destrezas, los razonamientos y las estrategias utilizados por los escolares y los errores relacionados con ellos. El resultado de este análisis será la descripción de la comprensión de los escolares en este punto de la instrucción en términos, por un lado, del conocimiento adquirido y, por el otro, de las dificultades y obstáculos que es necesario superar. Con base en esta información, el profesor podrá iniciar un nuevo ciclo del análisis didáctico.

## CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

El conocimiento didáctico es el único elemento del esquema de la Figura Nº 3 que no he considerado hasta ahora (cuadro 6). El conocimiento didáctico es el conocimiento que el profesor pone en juego y construye cuando realiza el análisis didáctico. No es posible realizar apropiadamente el análisis didáctico de una unidad didáctica o de una hora de clase a partir de la intuición o la experiencia. El análisis didáctico requiere de unos conocimientos técnicos que permiten analizar el contenido matemático con el propósito de identificar, desarrollar y organizar sus diversos significados. Estos conocimientos, que sustentan el proceso de planificación, ejecución y evaluación, tienen unos conocimientos disciplinares de referencia. Organizo estos conocimientos de referencia en tres ejes (Figura Nº 11):

- la noción de currículo,
- los fundamentos de las matemáticas escolares,
- los organizadores del currículo.

Llamo *fundamentos de las matemáticas escolares* a aquellos conocimientos relacionados con las matemáticas escolares que no son específicos a la estructura matemática sobre la que se trabaja, pero que condicionan el contexto en el que se realizan los diversos análisis del análisis didáctico. Organizo, de nuevo, estos conocimientos de acuerdo con las dimensiones del currículo: matemáticas escolares, aprendizaje, enseñanza y evaluación. Recordemos que cada uno de estos temas surgió como uno de los conocimientos que el profesor pone en juego cuando realiza el análisis didáctico. El conocimiento que el profesor tenga y la postura que él asuma con respecto a las matemáticas escolares condiciona la manera como él se aproxima al análisis de contenido. Esta relación también se mantiene entre el aprendizaje

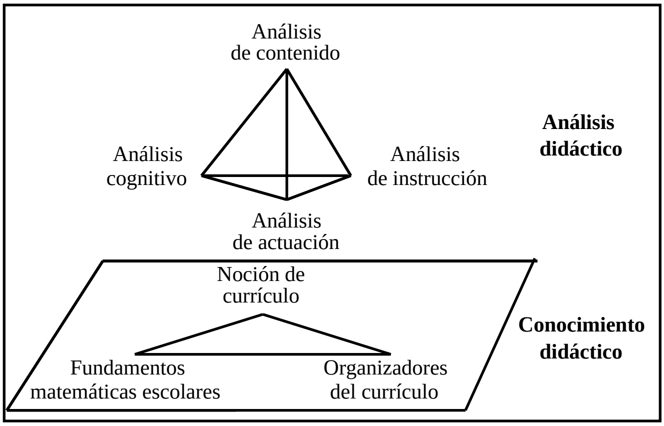


*Figura Nº 11. Conocimiento didáctico y análisis didáctico*

y el análisis cognitivo, la enseñanza y el análisis de instrucción, y la evaluación y el análisis de actuación.

Al introducir el análisis didáctico, indiqué que las decisiones que el profesor toma durante la planificación y la gestión de clase dependen parcialmente de sus creencias sobre las matemáticas, el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación. Es por ello que afirmo que el profesor asume una postura con respecto a estos temas cuando realiza el análisis didáctico. La postura que él asuma y la justificación que él pueda dar a esta postura dependerán de su conocimiento de las diferentes teorías que existen sobre cada uno de los temas.

De hecho, estas cuestiones, que Rico (1997b, p. 381) expresa en términos de cuatro preguntas:

> -¿Qué es, en qué consiste el conocimiento?
> -¿Qué es el aprendizaje?
> -¿Qué es la enseñanza?
> -¿Qué es, en qué consiste el conocimiento útil?,

permiten establecer las cuatro dimensiones del currículo y relacionan los dos primeros ejes de los conocimientos disciplinares que sirven de referencia al conocimiento didáctico del profesor: la noción de currículo y los fundamentos de las matemáticas escolares.

Al describir cada uno de los análisis que conforman el análisis didáctico, he identificado unos conocimientos que el profesor debe poner en juego en el proceso de planificación y que tienen como referencia unas nociones de la didáctica de la matemática. Con excepción del análisis histórico, que no lo he mencionado y que tiene carácter transversal puesto que puede ser puesto en juego de diferentes maneras en cada fase del ciclo, he identificado y ubicado estas nociones en cada uno de los análisis: estructura conceptual, sistemas de representación, análisis fenomenológico y modelos (análisis de contenido), errores, dificultades y obstáculos (análisis cognitivo y análisis de actuación), resolución de problemas, modelización y materiales y recursos (análisis de instrucción). La puesta en juego de estas nociones en el análisis didáctico es específica a la estructura matemática sobre la que se trabaja. Su utilización le permite al profesor identificar, organizar y caracterizar la multiplicidad de significados del tópico que es objeto del discurso matemático en el aula. Rico (1997d) utiliza el término *organizadores del currículo* para referirse a estas nociones y considera que son la referencia de "aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (p. 45). Si, como lo he propuesto antes, el propósito del discurso matemático del aula debe ser el de presentar y compartir socialmente unas normas que ponen en juego una multiplicidad de significados, de tal forma que los escolares tengan una variedad de alternativas para participar en este discurso, entonces los organizadores del currículo juegan un papel central en la identificación de estas normas y de estos significados. Cada organizador del currículo es una herramienta conceptual y metodológica que le ofrece al profesor una perspectiva desde la cual él puede identificar, desarrollar y organizar esos significados de la estructura matemática.

## DISCUSIÓN

El ciclo del análisis didáctico se inicia con la constatación de un estado inicial y pasa por una planificación, en la que se basa una actuación (de profesores y escolares), que es observada y evaluada con el propósito de dar lugar al inicio de un nuevo ciclo. Estos pasos son equivalentes a los propuestos en la investigación–acción: planificación, acción, observación y reflexión (Kemmis y McTaggart, 1988). Shulman (1987) detalla más estos pasos desde la perspectiva del profesor en su modelo de razonamiento y acción pedagógicos. En este modelo, él sugiere las fases de comprensión, transformación, instrucción, evaluación, reflexión y nueva comprensión (p. 15). De la misma manera, el modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas de Simon (1995) (Figura Nº 1), partiendo de una visión constructivista del aprendizaje, sugiere un procedimiento similar, en el que se determina un objetivo de aprendizaje, se realiza un plan de actividades, se formulan hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, se ponen en práctica las actividades y se evalúa el conocimiento de los escolares. Con la descripción detallada del análisis didáctico que he hecho en los apartados anteriores, he buscado dotar de un significado específico, desde la perspectiva de las matemáticas escolares, a este esquema cíclico que ya ha sido sugerido de diferentes maneras en la literatura.

Este artículo no tiene como propósito profundizar en la noción de conocimiento didáctico. He introducido esta noción puesto que es una pieza integral del análisis didáctico. El conocimiento didáctico es una noción compleja y sería necesario describir en detalle cómo el profesor pone en juego este conocimiento al realizar el análisis didáctico e identificar los procesos en virtud de los cuales él puede construir y desarrollar su conocimiento didáctico. También sería necesario ubicar la noción de conocimiento didáctico en el contexto de la literatura sobre el conocimiento del profesor de matemáticas y, en particular, establecer la relación entre la noción de conocimiento didáctico y la noción de conocimiento pedagógico de contenido (Shulman, 1986) y sus formulaciones posteriores (Bullough, 2001; Gess-Newsome y Lederman, 2001).

La descripción que se ha presentado del análisis didáctico y del conocimiento didáctico puede utilizarse como punto de partida para el diseño de programas de formación de profesores de matemáticas. Estas dos nociones permiten asumir una postura con respecto a los conocimientos y las capacidades que sería deseable promover y desarrollar en este tipo de planes de formación y, por lo tanto, contribuye a la identificación de sus objetivos y contenidos.

El análisis didáctico y las nociones que componen el conocimiento didáctico son herramientas útiles en muchas circunstancias de la actividad docente del profesor de matemáticas, puesto que pueden utilizarse como instrumentos de análisis y reflexión. El profesor puede utilizar estas herramientas dentro y fuera del aula, con la profundidad y el detalle que le permiten el tiempo y los recursos disponibles. Con estos instrumentos, el profesor puede examinar diseños curriculares existentes, decidir su utilidad y determinar estrategias para mejorarlos y adaptarlos de acuerdo con sus propósitos y necesidades. Por ejemplo, el análisis didáctico es una herramienta útil para la evaluación de libros de texto. Por lo tanto, la utilización sistemática del análisis didáctico, a cualquier nivel de detalle, puede contribuir permanentemente a la comprensión de los problemas didácticos que enfrenta el profesor y a su consciencia de la complejidad del conocimiento matemático escolar, de su aprendizaje en el aula y de la planificación de la actividad docente.

He presentado la función cuadrática como ejemplo de una estructura matemática para la que se puede desarrollar una estructura conceptual compleja y en la que se pueden hacer análisis cognitivos y de instrucción detallados. Sin embargo, los tópicos matemáticos que componen las matemáticas escolares son de diversos tipos. Encontramos tópicos que se concretan en un concepto específico, como la función cuadrática, la esfera o los poliedros regulares. Otros tópicos se refieren a operaciones sobre objetos matemáticos (conceptos) o propiedades de esos objetos, como es el caso de los movimientos en el plano o las áreas y perímetros, respectivamente. Por otra parte, hay tópicos que son resultados, como el teorema de Pitágoras, o que son sistemas de representación, como los números decimales. En todo caso, cada tópico se ubica dentro de una estructura matemática e involucra objetos, sus propiedades y sus relaciones con otros objetos. En este sentido, el análisis didáctico es aplicable a cualquier tópico de las matemáticas escolares. No obstante, cada tópico tiene su especificidad, que se revela cuando el profesor profundiza en sus diversos significados al realizar el análisis didáctico. En algunos tópicos, como el de la función cuadrática, es posible avanzar rápidamente al comienzo, puesto que se prestan más fácilmente al análisis estructural y representacional. En otros casos, el análisis estructural es más difícil de desarrollar (este es el caso de los movimientos en el plano, por ejemplo). No obstante, en la medida en que se profundiza en el análisis, cada tópico manifiesta su propia complejidad e interés.

Esta complejidad se hace evidente cuando se consideran estructuras matemáticas específicas. Si el tópico es demasiado general, entonces las herramientas del análisis didáctico no pueden demostrar todo su potencial. En los casos en los que el análisis se hace sobre estructuras conceptuales amplias, no se pueden identificar conceptos o procedimientos específicos, ni determinar con claridad los errores y las dificultades correspondientes. La información que se recoge es general y no permite diseñar actividades de enseñanza y aprendizaje que sean específicas al tópico en cuestión. Por lo tanto, el análisis didáctico debe utilizarse a nivel local, sobre estructuras matemáticas específicas. La información que se produce a nivel local con el análisis didáctico puede ser después resumida y organizada en el nivel del currículo de planificación global, con su esquema de objetivos, contenido, metodología y evaluación. De esta manera, el profesor puede describir en términos del currículo tradicional la planificación de una unidad didáctica (Segovia y Rico, 2001, pp. 101-104).

He pretendido mostrar que es posible diseñar actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de manera sistemática y que, para ello, se pueden seguir procedimientos que sirven de guía en el diseño curricular. Estos procedimientos se basan en herramientas conceptuales y metodológicas propias de la educación matemática que surgen de nociones que permiten explorar los múltiples significados de las matemáticas escolares. El profesor debe buscar desarrollar permanentemente su conocimiento sobre estas nociones y su capacidad de ponerlo en práctica en esos procedimientos.

## REFERENCIAS


Bullough, R.V. (2001). Pedagogical content knowledge circa 1907 and 1987: A study in the history of an idea. *Teaching and Teacher Education, 17,* 655-666.

Cobb, P., Yackel, E. y McClain, K. (Eds.) (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dörfler, W. (2000). Means for meaning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 99-131). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Freud, S. (1981). Análisis terminable e interminable. En S. Freud, *Obras Completas* (tomo III). Madrid: Biblioteca Nueva.

Gess-Newsome, J. y Lederman, N. G. (Eds.) (2001). *Examining pedagogical content knowledge. The construct and its implications for science education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Goldin, G.A. y Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 1-4.

Gómez, P. (2000). Los organizadores del currículo en matemáticas. *Revista EMA, 5,* 3, 267-277.

Gómez, P. y Carulla, C. (2001). Enseñanza constructivista, conocimiento didáctico del profesor y análisis didáctico en matemáticas. El caso de la función cuadrática. En M.L. Tirado (Ed.), *Educación en matemática.* Bogotá: IDEP.

González, J.L. (1998). *Números naturales relativos.* Granada: Comares.

Kaput, J.J. (1992). Technology and mathematics education. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: MacMillan.

Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación - acción.* Barcelona: Laertes.

Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. En F-L Lin y T.J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 33-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ortiz, J. (2000). *Modelización y calculadora gráfica en la formación inicial de profesores de matemáticas. Memoria de tercer ciclo*. Granada: Universidad de Granada.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ICE-Horsori.

Radatz, H. (1979). Error analysis in the mathematics education. *Journal for the Research in Mathematics Education, 9,* 163-172.

Rico, L. (1995a). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista EMA, 1* (1), 4-24.

Rico, L. (1995b). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rico, L. (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.). (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE- Horsori.

Rico, L. (Ed.). (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (1997b). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis.

Rico, L. (1997c). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ICE- Horsori.

Rico, L. (1997d). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ICE- Horsori.

Rico, L. (1998a). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de secundaria en didáctica de la matemática. En Braira et al. (Ed.), *La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de didáctica de las matemáticas* (pp. 183-194). León: Universidad de León.

Rico, L. (1998b). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 1* (1), 22-39.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L.C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Cuarto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 219-231). Granada: Universidad de Granada.

Schoenfeld, A.H. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, *18* (3), 243-261.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being –or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1-22.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114-145.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE- Horsori.

Steffe, L.P. y D'Ambrosio, B.S. (1995). Toward a working model of constructivist teaching: A reaction to Simon. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 146-159.

Thompson, A.G. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: MacMillan.

*Pedro Gómez*
*Universidad de Granada*
*España*
*E-mail: pgomez@valnet.es*