# ALGUNAS DIDÁCTICAS DE CAMPO EN LA ENSEÑANZA DE HERRAMIENTAS DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA INGENIERÍA

*Luis Fernando Plaza Gálvez*

## Resumen

Por medio del presente trabajo, se pretende implementar algunas estrategias didácticas, que permita modelar matemáticamente fenómenos y/o procesos que hagan parte de varios conceptos de ingeniería, los cuales se tomaran como sistemas dinámicos, siendo estos un desafío motivador para los estudiantes, en la que experimenten la opción de describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. La mayoría de las prácticas usaran herramientas conocidas en el aula y entre las que se encuentran, Análisis de Fourier, el Excel y la diferenciación numérica que permitirán originar Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden, por medio de métodos estadísticos como el ajuste por mínimos cuadrados como la regresión lineal, logarítmica y potencial, que son resueltas por separación de variables, tomando en cuenta el Coeficiente de Determinación ($R^2$). Algunos de dichos procedimientos podrán ser repetidos con otros fenómenos a modelar.

**Palabras Clave: Ecuación Diferencial, Ingeniería, Modelamiento Matemático,**

## Propósito y alcance

El mayor propósito presente en este laboratorio, es generar en el docente del área de Matemáticas de los programas de Ingeniería, un carácter innovador, por medio de estrategias didácticas a implementar, permitiendo a sus estudiantes observar el real uso de la matemática aplicada a modelos que deban ser implementados como tarea externa de aula. El laboratorio va dirigido especialmente a estudiantes de un nivel básico de los programas de Ingeniería, que tengan entre sus haberes, inicialmente estar inscritos en un curso de Ecuaciones Diferenciales ordinarias de primer orden, donde al menos tengan conceptos básicos de Mínimos cuadrados, por medio de los diferentes tipos de regresión que nos brinda la herramienta de la Estadística Inferencial y además iría dirigida a estudiantes que tengan la necesidad de implementar un modelo a fenómenos cíclicos haciendo uso de la herramienta que nos brinda el análisis de Fourier en un curso de Matemáticas avanzadas. El modelamiento matemático permite crear lazos entre la matemática y la ingeniería generando motivación en los procesos de aprendizaje.

## Marco Teórico o conceptual

Los modelos matemáticos pueden asumirse como método de enseñanza y de investigación, Biembengut y Hein (2006) en la que induce a los estudiantes un incremento del concepto matemático, permitiendo interpretar, formular y resolver problemas de ingeniería en especial. Adicionalmente estudios realizados por Camarena (2009 y 2012), han caracterizado el modelamiento matemático como estrategia didáctica en la formación de futuros ingenieros como contexto de las ciencias. Algunos autores como Rodriguez (2010) han trabajado las ecuaciones diferenciales como herramienta de enseñanza en

Modelamiento matemático, y Guerrero, Camacho y Mejía (2010) utilizando un enfoque lógico semiótico, modelan problemas resolviendo ecuaciones diferenciales.

## Método

La propuesta metodológica, de las práctica a realizar sobre modelamiento se presentan como herramienta de enseñanza – aprendizaje, y si en su defecto de investigación. Se presentan algunas situaciones de la vida cotidiana como objeto de ser modeladas, se trata luego su matematización con el apoyo de algunas herramientas, se procede a su solución y en últimas se expresa dicha solución en términos matemáticos. Lo anterior se hace por medio de unidades didácticas, permitiendo conocer aspectos epistemológicos, heurísticos y cognitivos de los estudiantes a los que se les brindaría dichas prácticas finalmente.

Al querer modelar fenómenos y/o procesos (W) que varíen con respecto al tiempo, denotaremos a W=f(t), siendo *W* la variable dependiente y *t* la variable independiente, mediante observación, se analizaran como varían directamente las variables de la siguiente manera: A) *t* vs *W*, B) W vs *dW/dt*, C) W vs *1/W*dW/dt*, en las que tienen en cuenta comportamientos de variación de la variable en cuestión con respecto al tiempo, así como la respectiva tasa relativa de crecimiento de la variable a modelar.

## Diseños Didácticos

- Para el tipo A, se tiene la modelación de fenómenos cíclicos, como los latidos del corazón, las olas del mar, el nivel de las mareas, el movimiento de una cuerda de guitarra, etc., pero para nuestro caso se desea implementar la modelación de la temperatura en un lugar determinado, tomando datos de Temperatura en intervalos de 30 minutos (0.5 h) durante un lapso de 72 horas y para su objetivo se tendrán a disposición 3 métodos y estos son: Observación, Mínimos cuadrados y por último Series de Fourier (Para tres niveles de formación distintos en Ingeniería). Se demostrará que $W = A*sen(Bt + C) + D$. El trabajo consiste en obtener las constantes A, B, C y D. Al final se podrá encontrar el momento de la máxima temperatura, de la mínima temperatura, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la temperatura que permitan tomar criterios decisorios respecto a márgenes de seguridad. Estudios de este tipo han sido recomendados por Stewart, Redlin y Watson (2007) y Swokowski y Cole (2006). El procedimiento se expone en Plaza (2011) y en la que se deben tomar muestras de los datos como evidencia aparece en la figura No. 1, y donde los datos deben quedar consignados como en la tabla No. 1.


*Fig. No. 1. Elementos necesarios para Laboratorio de Fenómenos cíclicos.*

| Hora reloj | Tiempo transcurrido = t (h) | Temperatura = T(°C) |
|---|---|---|
| 6:00 p.m | 0 | $T_1$ |
| 6:30 p.m. | 0.5 | $T_2$ |
| 7:00 p.m. | 1 | $T_2$ |

*Tabla No. 1. Toma de datos en Laboratorio de Fenómenos Cíclicos.*

- Para el tipo B, se tiene el análisis de la Ley de Enfriamiento y/o Calentamiento de Newton, así como el vaciado de tanque. Para la primera práctica se toman datos de Temperatura y tiempo en lapsos de cada un minuto. Los elementos necesarios son un termómetro digital con termocupla, un beaker, una estufa pequeña de una boquilla y un cronometro o reloj (para toma de tiempo transcurrido), ver figura 2. La práctica consiste en llevar 100 ml de agua a un beaker. Luego hacerlo pasar por una fuente de calor (una estufa eléctrica de una boquilla) hasta obtener su punto de ebullición A partir de ese instante se toman datos de temperatura cada minuto, hasta tratar de llegar a la temperatura ambiente y donde los datos deben quedar consignados como en la tabla No. 2. Esta práctica es recomendada por Zill (2009) y fue expuesta en Plaza (2013).

*Fig. No. 2. Elementos necesarios para Laboratorio Ley de Enfriamiento.*

| Tiempo Transcurrido = t (min) | Temperatura = T (°C) | dt/dt, con Δt= 1, Diferenciación numérica a 3 pasos |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 0 | $T_0$ | |
| 1 | $T_1$ | $(T_2 - T_0)/2$ |
| 2 | $T_2$ | $(T_3 - T_1)/2$ |
| 3 | $T_2$ | $(T_4 - T_2)/2$ |

*Tabla No. 2. Toma de datos en Laboratorio de Ley de Enfriamiento.*

Demostrándose con una buena aproximación se puede modelar con al apoyo de la Regresión Lineal, pues $dT/dt = k^* (T-T_0)$, siendo $T_0$ la temperatura ambiente, y en la que está también se puede expresar como $dT/dt = aT + b$, el cual representa el comportamiento lineal de la variación de la temperatura con respecto al tiempo.

En la práctica del vaciado de Tanque, se puede encontrar la variación de la altura del nivel de un líquido *H*, a través de un tanque, después del inicio de un proceso de vaciado, sin tener en cuenta la geometría del recipiente, el agujero de entrada y salida del líquido, los cuales si son tenidas en cuenta en la Ley de Torricelli, tal como aparece en la figuras No. 3 y 4. Para eso se monitoreo el vaciado del tanque tomando datos de altura y tiempo en lapsos de 30 segundos (0.5 minutos) y la información es consignada en la tabla No. 3.

*Fig. No. 3. Elementos necesarios para Laboratorio Vaciado de Tanques.*

*Fig. No. 4. Proceso de toma de datos en el Laboratorio Vaciado de Tanques.*

| Tiempo Transcurrido = t (min) | Altura = H (cm) | dH/dt, con $\Delta t = 0.5$, Diferenciación numérica a 3 pasos |
|---|---|---|
| 0 | $H_0$ | |
| 0.5 | $H_1$ | $(H_2 - H_0)/1$ |
| 1 | $H_2$ | $(H_3 - H_1)/1$ |
| 1.5 | $H_3$ | $(H_4 - H_2)/1$ |

*Tabla No. 3. Toma de datos en Laboratorio de Vaciado de Tanques.*

Haciendo uso del método de Diferenciación numérica inicialmente a tres pasos se puede obtener la derivada para los dos casos antes expuesto, como lo expone Chapra y Canale (2000) y luego mediante el uso de Mínimos Cuadrados, se puede hacer uso de la mejor Regresión que permita la distribución de los datos, tal como se expone en Walpole, Myers y Myers (1998). Se demuestra con una regresión potencial que la variación de la altura obedece a una expresión del tipo $dH/dt = aH^b$. Esta práctica fue expuesta en Plaza (2014).

Los parámetros *a* y *b* de las dos regresiones expuestas pueden ser encontradas con ayuda de una hoja de cálculo como el Excel. En ambos casos se originan Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden que son resueltas por el método de Separación de Variables. Las constantes de Integración son resueltas por medio de la condición inicial en la toma de datos.

- En el tipo C, se tiene el análisis de crecimiento (comportamiento de la evolución del peso), en el caso de especies menores (ovejas, cerdos, cabras, pollos y cuyes, como producción animal en explotaciones pequeñas, ver Ortegón, 2012). Donde se puede aportar información para la toma de decisiones que ayudan a mejorar la producción bilógica agropecuaria como es el peso en función del tiempo, la velocidad de crecimiento, la tasa relativa de crecimiento y una fecha ideal de sacrificio, para llegar a una optima producción. En esta oportunidad, la toma de datos puede variar, debido a la vida útil de cada uno de los animales en cuestión, y la práctica puede ser llevada a cabo en un espacio mayor a cuatro meses, por lo que podría ser una dificultad como proyecto de período académico, pero sí como tarea de investigación. En esta oportunidad se puede monitorear el crecimiento de aves (pollo parrillero) por su corta vida útil. Los datos pueden tomarse con lapsos de una semana cada uno, tal como aparece en la figura No. 5 y lo ideal es contar con la fecha de parto o nacimiento, según sea el caso, como dato inicial. Su evolución puede verse en la figura No. 6. Las diferentes formas de regresión de la tasa relativa de crecimiento nos arroja varias opciones de solución. Aquí se logra obtener una expresión de la forma $1/W*dW/dt = aW + b$, cuya solución es conocida como el Modelo Logístico. Otra solución es de la forma $1/W*dW/dt = aLn(W) + b$, cuya solución es conocida como el Modelo de Gompertz.

*Fig. No. 5. Elemento necesario para Laboratorio de Crecimiento de aves.*

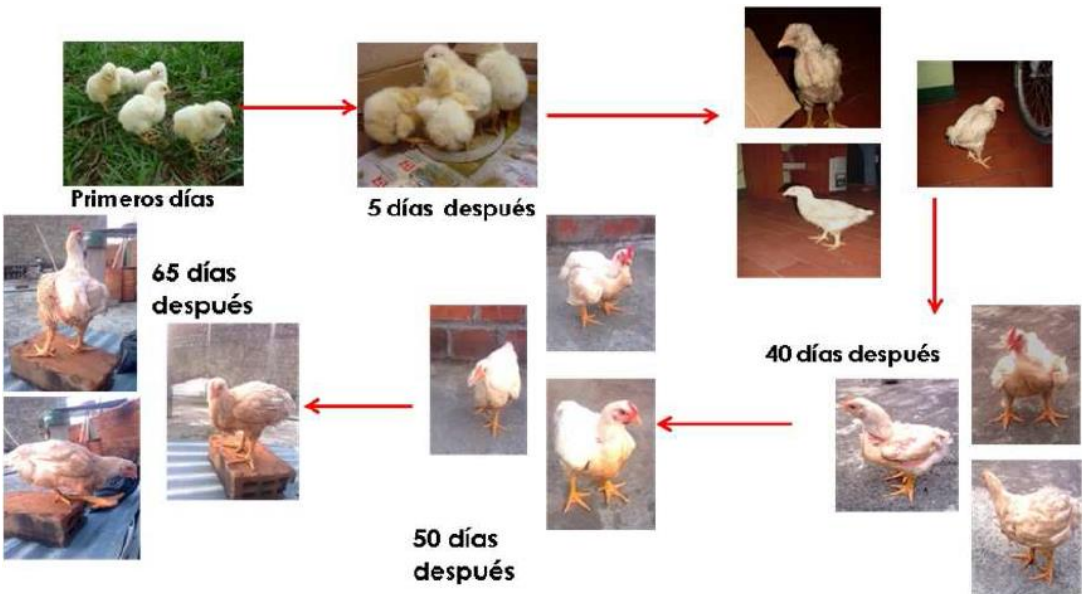


*Fig. No. 6. Evolución de crecimiento de aves.*

Una toma de datos, para el crecimiento de especies menores, sería similar a la siguiente

| Tiempo Transcurrido<br>= t (días) | Peso, W (g) | W’ = dW/dt,<br>con Δt= 7, Diferenciación numérica a 3 pasos | W’/W<br>Tasa relativa de crecimiento |
|---|---|---|---|
| 0 | $W_0$ | | |
| 7 | $W_1$ | $(W_2 – W_0)/14$ | $(W_2 – W_0)/(14 W_1)$ |
| 14 | $W_2$ | $(W_3 – W_1)/14$ | $(W_3 – W_1)/(14 W_2)$ |
| 21 | $W_3$ | $(W_4 – W_2)/14$ | $(W_4 – W_2)/(14 W_3)$ |

*Tabla No. 4. Toma de datos en Laboratorio de Crecimiento de Aves.*

Otra práctica importante en este tipo de análisis es el Pelado de Frutas, como un caso particular de medida de productividad, midiendo el rendimiento de una unidad económica en un período determinado, ver INEG (2013). Se espera obtener una expresión que permita medir el numero de bananos pelados, $y$, en función del tiempo, ósea $y = f(t)$. Siendo $t$, el tiempo real transcurrido, por lo que deben ser tenidas en cuenta las interrupciones de la producción tales como: las pausas activas, la parada para consumo de alimentos, etc., modelando así la eficiencia de un empleado, así como los costos en los que puede incurrir la empresa debido a mano de obra. La práctica se debe hacer durante una semana, por jornada de trabajo, por empleado, distinguiendo género y antigüedad, en la medida de las posibilidades. Los datos deben ser tomados cada 30 minutos. Al comportamiento de 1/y*dy/dt vs y, se le hace análisis de regresión lineal, logarítmica y potencial, para luego resolver las respectivas ecuaciones diferenciales a las que haya lugar, con la misma condición inicial, en forma análoga como en la práctica anterior.

## Consideraciones finales

Las prácticas de laboratorio permiten inducir en el estudiante de ingeniería, contribuir para que este construya matemáticas, pues los fenómenos abordados permiten describir otro tipo de experiencias que junto al análisis del tipo grafico, simbólico, etc. (análisis cualitativo y cuantitativo) pueden generar nuevo conocimiento, o permiten refutar o confirmar otros ya existentes.

Una conclusión importante es que un modelo que emergen en una situación, puede ser aplicada en otro contexto, como es el caso de los modelos de crecimiento y la aplicación en curvas de aprendizaje asociadas a producción.

Este tipo de actividades didácticas, en las que se usa el Modelamiento Matemático como herramienta de Enseñanza – Aprendizaje, permite acercar al estudiante de ingeniería con su profesión, por medio de conceptos tales como:

- Funciones, pues a pesar de que se está trabajando variables que dependen de una sola variable, puede ser la base para un análisis multivariado.
- Cálculo como la derivada (variaciones) y el límite (comportamientos asintóticos) especialmente cuando se desea conocer el valor de la función a modelar para valores muy grandes del tiempo, como es el caso del momento ideal para el sacrificio de una especie menor, o en un caso de producción un momento de fatiga.
- Estadística, con aplicaciones de Máximos y Mínimos en varios tipos de Regresión.
- Ecuaciones diferenciales, aquellas que son obtenidas a partir del punto anterior.
- Análisis de Fourier, cuando se enfrenta a fenómenos periódicos.

## Agradecimientos

Es importante brindar especialmente agradecimiento a las directivas de la UCEVA (Unidad Central del Valle del Cauca) con sede en la ciudad de Tuluá, Colombia, quien en nombre de la Vicerrectoría de Investigaciones, permitió llevar a cabo durante cerca de cuatro la investigación que origino dichas prácticas de laboratorio

## Referencias bibliográficas

Biembengut M. y Hein N. (2006). Modelaje Matemático como método de Investigación en clases de Matemáticas. Ponencia en Evento: V Festival internacional de Matemática, Puntarenas, Costa Rica.

Camarena P. (2009). La matemática en el contexto de las Ciencias. *Revista Innovación Educativa*, Vol. 9 No. 6, 15 – 25.

Camarena P. (2012). La modelación matemática en la formación del ingeniero, *Revista Brasileira de Ensino de Ciencia e Tecnologia*, 5 (3), 1-10.

Chapra S., Canale R. (2000). Métodos numéricos para Ingenieros, Mc Graw Hill, 3 ª edición, México D.F.

Guerrero C., Camacho M. y Mejía H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema, *Enseñanza de las Ciencias*, 28 (3), 341-352.

INEG (Instituto Nacional de Estadística y Geografía). (2013). *Índices de productividad laboral y del costo unitario de la mano de obra. Metodología, Cuadros y gráficas. Cuarto trimestre 2012*, Secretaría de Trabajo y Prevención social, México D.F.

Ortegón A. (2012). *Especies Menores*, Documento de Trabajo, Instructor SENA – CEDEAGRO.

Plaza L. (2011). Modelamiento Matemático de Fenómenos Cíclicos, *Revista Scientia et Technica*, 16 (48). 145 – 150.

Plaza L. (2013). Ley de Enfriamiento de Newton. Laboratorio de Ecuaciones Diferenciales, *Revista Páginas de Ingeniería*, 1 (1). 7 - 12.

Plaza L. (2014). Modelamiento Matemático en Ingeniería. Vaciado de Tanques Ponencia en Evento: VI Congreso Internacional de Modelación y Formación en Ciencias Básicas. Medellín, Colombia.

Rodriguez R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de ecuaciones diferenciales, *Relime*, 13 (4-1). 191-210.

Stewart J., Redlin L., Watson S. (2007). Pre cálculo, Matemáticas para el cálculo, Editorial CENGAGE Learning, México D.F. 459- 465.

Swokowski E., Cole J. (2006). Algebra y trigonometría analítica, Editorial THOMSON, 11ª Edición, México D.F., 469.

Walpole R., Myers R., Myers S. (1998). Probabilidad y Estadística para ingenieros, Editorial Pearson Educación, 6ª Edición, México D.F., 362.

Zill D. (2009). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado, Cengage

Learning Latin America, 9a edición, México D.F.

## Autores

*Luis Fernando Plaza Gálvez*; UCEVA. Colombia; lplaza@uceva.edu.co