REVISTA EMA
2002, VOL. 7, Nº 3, 293-309

# LA CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS: UNA ACTIVIDAD IMPORTANTE PARA DESARROLLAR RAZONAMIENTO EN GEOMETRÍA

CARMEN SAMPER, CECILIA LEGUIZAMÓN
Y LEONOR CAMARGO[1]

*Se describe una tarea de conceptualización aplicada con el propósito central de indagar por el potencial de la actividad de conceptualizar en el desarrollo del razonamiento en geometría. El principal aporte de este trabajo consiste en la ejemplificación de respuestas para cada uno de los niveles de razonamiento propuestos por la teoría de van Hiele, a la luz de la tarea en cuestión. Las respuestas obtenidas proporcionan elementos que alientan una alternativa de tratamiento curricular para la geometría que permita superar el reduccionismo en el que ha caído la tarea de construir un concepto o relación geométrica, al limitarla a la relación de un nombre con una o dos representaciones del mismo.*

"[…] la mayoría de las definiciones no han sido el comienzo sino el toque final de la actividad organizativa. No debería privarse a los niños de este privilegio […] Una buena enseñanza de la geometría puede significar mucho más: aprender a conceptualizar y comprender lo que significa la conceptualización; aprender a definir y comprender lo que es una definición. Significa conducir a los alumnos a comprender por qué una cierta estructura, concepto o definición es mejor que otra."

Hans Freudenthal (1996)

## INTRODUCCIÓN

La experiencia que aquí se reseña se inscribe en el marco de la segunda fase del proyecto de investigación "Desarrollo del razonamiento a través de la geometría euclidiana" que adelanta un equipo de profesoras del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional[2], desde hace dos años. El proyecto intenta construir y validar una propuesta alternativa para la enseñanza de la geometría euclidiana en la educación básica,

1. Profesoras de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.
2. Con la colaboración de Milena Cortés, auxiliar de investigación, y de Julián Sánchez, estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y miembro del Grupo "Semillero de Investigadores" del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP).

que se acoja a las nuevas perspectivas culturales[3] frente al papel de las matemáticas escolares y su responsabilidad con el desarrollo del razonamiento matemático básico para la resolución de problemas en el ámbito de las ciencias naturales y sociales (Camargo, Samper y Leguizamón, 2000).

En una primera fase del proyecto, se identificaron tres acciones de la actividad geométrica consideradas importantes porque contribuyen al desarrollo del razonamiento. Estas son: *conceptualizar* o construir conceptos y relaciones geométricas, *investigar* o indagar acerca de relaciones entre objetos geométricos y sus propiedades a partir del establecimiento de conjeturas, con miras a dotar de significado a los teoremas; y *demostrar* o construir una prueba para validar un enunciado geométrico atendiendo a las reglas establecidas para ello. Cada una de estas acciones ha sido estudiada a la luz de un modelo teórico de razonamiento. Para la conceptualización, la investigación se acoge al modelo de van Hiele (Clements y Battista, 1992) complementado con la teoría de Vinner y Hershkowitz (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992) acerca de la construcción de conceptos. En relación con la acción de investigar, el proyecto hace uso de la teoría de Balacheff (2000), en la que se diferencian las formas de acercamiento a la solución de un problema que invita a la formulación de conjeturas. Con respecto a la acción de demostrar se utiliza la caracterización de los diversos tipos de razonamiento formulada por Raymond Duval (1998) quien establece una relación entre los discursos informales y formales en el proceso de construcción de un recurso de validación.

La segunda fase del proyecto se centra en buscar evidencias de la pertinencia de dichas acciones para favorecer el razonamiento en geometría, a través de la experimentación de algunas actividades diseñadas para tal fin, con miras a que los resultados obtenidos puedan aclarar y validar el modelo teórico propuesto. Por tal razón, durante el segundo semestre de 2001, el equipo de investigación se centró en analizar el proceso de conceptualización para lo cual diseñó una tarea, que se aplicó a grupos de estudiantes de los tres primeros semestres del Proyecto de Licenciatura en Matemáticas y a un grupo de estudiantes de la Especialización en Educación Matemática. La tarea correspondiente tenía como propósito buscar respuesta a las siguientes preguntas:

3. La perspectiva sociocultural, la cual obedece a nuevos paradigmas relacionados con la matemática escolar, plantea que las matemáticas son una construcción social que se realiza con miras a solucionar necesidades prácticas de los seres humanos y por tanto se constituye en vehículo de expresión, interpretación y comunicación de diversas actividades en los campos científico y social. En tal sentido, cobran especial relevancia las actividades que permitan el acceso de todos los escolares al conocimiento matemático y la búsqueda de la construcción significativa del mismo.

1) ¿Cómo diferenciar niveles de razonamiento cuando los estudiantes se enfrentan a la tarea de conceptualizar?
2) ¿Qué tipo de experiencias educativas previas en geometría estimulan un avance en el razonamiento ante la tarea de conceptualizar?

En este artículo se presenta una síntesis del marco conceptual, base para la caracterización de niveles de razonamiento que se evidencian en la construcción de conceptos; se describe la tarea diseñada para estudiar el proceso de conceptualización; se abordan aspectos de orden metodológico; se discuten los resultados que se consideran relevantes; y se concluye acerca de las posibles implicaciones de la experiencia en la acción educativa.

## MARCO CONCEPTUAL

El modelo teórico, sustento de este estudio, se basa en la teoría de Vinner respecto a la construcción de conceptos a la luz del modelo de van Hiele sobre niveles de razonamiento. Según Vinner y Hershkowitz, la construcción de conceptos pone en correspondencia un concepto matemático, determinado por una definición formal, con lo que él ha denominado la imagen conceptual del mismo. Esta última es una representación operativa del concepto, formada por imágenes visuales y las propiedades que se establecen, fruto de experiencias de aprendizaje en situaciones en las cuales el concepto está inmerso. Una cosa es el concepto y otra, la imagen conceptual. Cada persona tiene uno o más prototipos del concepto, que son ejemplos concretos de éste, precisamente los primeros que vienen a la mente en el momento de enfrentarse a alguna tarea que lo involucre. Entre más y mejores experiencias se tengan, la imagen conceptual será más cercana al concepto. La persona adquirirá un

> mecanismo de construcción e identificación mediante el cual [le] será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto, tal como éste está concebido por la comunidad matemática. (Vinner y Hershkowitz, 1983, citado en Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992, p. 52)

En conclusión, construir un concepto no se limita a conocer la definición formal de éste y algunos ejemplos prototípicos; incluye también razonar articulando la información proveniente de muchas experiencias de diferente naturaleza, todas encaminadas a ampliar la imagen conceptual para ponerla en consonancia con la definición formal.

Con frecuencia, el maestro cree que los estudiantes han logrado conceptualizar un objeto geométrico porque identifican con éxito las representaciones de éste. Por ejemplo, es probable que de un conjunto de figuras geométricas, los alumnos discriminen correctamente los polígonos. Pero, ¿es esto suficiente para asegurar que poseen el concepto de polígono? Conviene ser cauto, pues cabe preguntarse si al hacer la identificación visual, los alumnos están considerando realmente todas las propiedades necesarias y suficientes para que una figura geométrica sea polígono. Probablemente la imagen visual del objeto geométrico que posee el estudiante se aproxima mucho a la representación del concepto validada por la comunidad matemática y, por eso, el profesor cree que el alumno ya tiene el concepto claro. Puede suceder, sin embargo, que cuando trata de expresar lo que es un *polígono*, le haga falta mencionar alguna propiedad necesaria. Esto mostrará qué tan alejada está su imagen conceptual del concepto mismo, hecho que se evidencia en una tarea de mayor exigencia como cuando se requiere hacer una inferencia de una propiedad a partir de otra. Es importante entender que la conceptualización no puede reducirse a simples procesos perceptivos de visualización sino que requiere la construcción de enunciados de definiciones asociadas a las imágenes visuales.

Por su parte, la teoría propuesta por los esposos van Hiele es de gran utilidad para comprender la complejidad del razonamiento en geometría. Puede ser usada tanto para estudiar los procesos asociados a la tarea de construir conceptos como para establecer relaciones entre el estado de evolución de dicha construcción y las posibilidades de éxito en otras actividades geométricas, como la de investigar hechos o la de demostrar. La idea de usar la teoría de los van Hiele para describir el nivel de desarrollo de los conceptos geométricos en los estudiantes ha sido sugerida por Clements y Battista (1992) y utilizada en un estudio realizado por Burger y Shaughnessy (1986). Estos últimos investigadores solicitaron a los estudiantes entrevistados desarrollar tareas, que apuntaban básicamente a la conceptualización, tales como dibujar formas, identificarlas y definirlas, clasificar figuras y determinar una figura misteriosa. Con base en los resultados obtenidos en tales tareas, le asignaron a cada estudiante el nivel de razonamiento dominante en el que se encontraba en relación con la tarea específica.

A continuación se presenta una caracterización de los primeros cuatro niveles del modelo de van Hiele que se utilizan para determinar el estado de evolución de la construcción de un concepto. Aunque el modelo contempla cinco niveles, se omite el quinto por corresponder a personas dedicadas al estudio formal de la matemática. No se atienden aquellos aspectos del modelo que hacen referencia a otras actividades geométricas como investigar y demostrar porque, aun cuando están en estrecha relación con la conceptualización, se considera más pertinente el análisis de dichas actividades a la luz de otros modelos de razonamiento.

*Nivel 1*. Los objetos sobre los cuales se razona son clases de figuras prototípicas reconocidas por tener la misma forma. El razonamiento se centra en consideraciones visuales, en las que la figura es percibida como un todo. Los alumnos razonan sobre formas geométricas basados en su apariencia y las transformaciones visuales que ellos pueden hacer sobre imágenes de estas formas. La conceptualización del objeto se reduce a la imagen conceptual fruto único de las características perceptuales globales.

*Nivel 2*. Los objetos sobre los cuales se razona son clases de figuras, percibidas en términos del conjunto de propiedades que asocian con dichas figuras. Los alumnos razonan sobre los conceptos por medio del análisis informal de partes constitutivas y de atributos. El razonamiento es de tipo experimental: se establecen propiedades de las formas por observación, medida, dibujo, construcción de modelos, etc. La conceptualización del objeto se basa en un listado exhaustivo de propiedades, que algunas veces incluye más de las necesarias, pues se hace más énfasis en aquello que distingue una figura de otra, que en lo que las asemeja.

*Nivel 3*. Los objetos sobre los cuales se razona son las propiedades de las clases de figuras, es decir, se razona sobre las relaciones entre las partes constitutivas de la figura. La conceptualización del objeto se centra en la enunciación de las propiedades necesarias y suficientes aun cuando hay limitaciones en las imágenes conceptuales.

*Nivel 4*. Los objetos sobre los cuales se razona son las relaciones entre propiedades establecidas de las clases de figuras, en el contexto de un sistema matemático axiomático. La conceptualización del objeto conlleva a la enunciación de las propiedades necesarias y suficientes, abarcando, adicionalmente, un amplio espectro de posibilidades.

En síntesis, lo expresado anteriormente muestra la necesidad de indagar sobre las acciones cognitivas que los estudiantes realizan, para así identificar el nivel de razonamiento en el que se hallan cuando se enfrentan a la tarea de conceptualizar y proponerles tareas que les permitan acceder a estadios superiores.

# ASPECTOS METODOLÓGICOS

## Descripción de la tarea

La tarea consistió en la presentación de un listado de propiedades que describen un objeto geométrico, precedido de una pregunta que invita a determinar qué objeto es.

| |
|---|
| Una figura tiene todas las propiedades enumeradas a continuación. ¿Cuál es?<br>• es una figura cerrada de cuatro lados rectos<br>• tiene dos lados largos y dos lados cortos<br>• los lados largos son de igual longitud<br>• los lados cortos son de igual longitud |

El ejercicio se diseñó de tal forma que la descripción realizada no corresponde a un objeto geométrico con un nombre específico ni pertenece a una categoría particular dentro de las clasificaciones comunes de los cuadriláteros. En efecto, las propiedades listadas para el objeto geométrico permiten incluir como ejemplos de éste a los paralelogramos que no son rombos, o a los cuadriláteros que tienen exactamente dos pares de lados adyacentes congruentes, sean convexos (cometa) o no (bumerán) (ver Figura Nº 1). Precisamente esta característica del ejercicio es la que conlleva a establecer diferentes niveles de razonamiento pues se observan diferencias notorias en las respuestas.

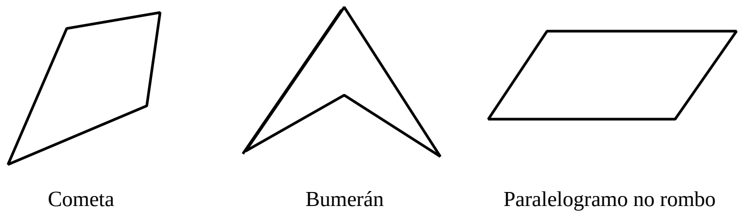



*Figura Nº 1.*

## Aplicación de la experiencia

El ejercicio se aplicó, de manera individual, a todos los estudiantes de los grupos escogidos, durante la primera semana de inicio del semestre lectivo, en el espacio correspondiente a la clase de geometría. Con el apoyo de los profesores responsables de las asignaturas, se buscó que el ambiente fuera propicio para este tipo de actividad y fuera visto como parte de las actividades propias de la clase, sin connotación de evaluación. No se impusieron restricciones ni en el tiempo ni en el uso de materiales.

Como parte de la tarea del grupo investigador consistía en determinar si las experiencias previas en geometría están relacionadas con los niveles de razonamiento ante la tarea de conceptualizar, para la experimentación se escogieron grupos de diferentes antecedentes académicos.

El Grupo 1, integrado por estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, estaban cursando la asignatura *Elementos de Geometría*. En este espacio académico se hace una exploración informal de objetos y relaciones geométricos, por medio de experiencias de tipo intuitivo, que llevan a los alumnos a establecer conjeturas acerca de propiedades geométricas, desarrollar un lenguaje geométrico básico para comunicarse en esta área, y realizar un acercamiento a los conceptos y relaciones de la geometría. Una de las competencias que se trabaja es la visualización, lo cual significa ver una figura geométrica como configuración de unidades figurales o unidades elementales que la constituyen (Duval, 1998), aspecto fundamental para la actividad geométrica.

El Grupo 2 lo formaban alumnos de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas quienes se encontraban cursando la asignatura *Geometría Plana*, espacio académico en el cual se comienza, de manera formal, la construcción de un sistema axiomático de la geometría euclidiana, tomando como tema central la relación de congruencia. En este curso se hace un análisis exhaustivo de las relaciones que se pueden establecer entre las propiedades de las figuras geométricas.

El Grupo 3 corresponde a estudiantes que se encontraban cursando *Geometría del Espacio* del programa de la Licenciatura en Matemáticas, en el cual se consolida el manejo del sistema axiomático y se avanza en el estudio de temas relacionados con la geometría plana y del espacio.

El Grupo 4 estaba conformado por los estudiantes del programa *Especialización en Didáctica de la Matemática*, todos ellos profesores en ejercicio. En el momento de la aplicación, se encontraban cursando el módulo “Didáctica de la Geometría”, en el que se proporcionan elementos conceptuales de la geometría y herramientas didácticas para la construcción de situaciones de aula que contribuyan a estimular el desarrollo de competencias básicas en este campo. Se busca, además, que los profesores en ejercicio conozcan, acepten y apliquen los cambios que, desde la Educación Matemática, se sugieren para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

La escogencia de los tres primeros grupos obedeció al interés de contrastar los resultados para establecer alguna relación entre el desempeño frente a la tarea y las experiencias académicas en el campo de la geometría proporcionadas por el actual programa de Licenciatura en Matemáticas. El cuarto grupo se escogió para comparar desempeños entre estudiantes que están siendo formados en el nuevo proyecto curricular de la Licenciatura y profesores de matemáticas en ejercicio, cuya formación en geometría se realizó bajo otra orientación.

### Indicadores de nivel de razonamiento

A partir de los niveles de razonamiento propuestos en el modelo de van Hiele y con base en la caracterización propuesta por Vinner acerca de la conceptualización, se construyeron los siguientes indicadores para cada uno de los niveles de razonamiento, con los cuales se interpretarían las producciones escritas de los estudiantes.

*Nivel 1.* Estudiantes que no pueden obtener una configuración global de una figura a partir de las características particulares dadas. No logran formar una imagen conceptual a partir del listado de propiedades.

*Nivel 2.* Estudiantes que determinan únicamente un prototipo de figura que cumple con las cuatro condiciones dadas, sin percatarse de la existencia de otros tipos de figuras que satisfacen tales condiciones. Su imagen conceptual está ligada, probablemente, a propiedades que ellos han añadido por considerarlas obligatorias, o a propiedades que distinguen entre sí a las figuras.

*Nivel 3.* Estudiantes que admiten la existencia de más de un tipo de figura que cumple las propiedades dadas, porque aceptan que la no inclusión de una propiedad en el listado no significa que la figura no pueda tener esa propiedad; sin embargo, su análisis no es exhaustivo y la imagen conceptual del objeto no es completa.

*Nivel 4.* Estudiantes que describen el amplio panorama de prototipos de cuadriláteros que cumplen las condiciones y/o explícitamente excluyen los paralelogramos que no las satisfacen. Su imagen conceptual abarca todos los posibles casos.

## RESULTADOS

El análisis de las respuestas a la tarea propuesta permitió establecer, como característica peculiar, el uso, por parte de los estudiantes, de representaciones gráficas como medio de exploración y para comunicar sus respuestas. Al no disponer de un nombre genérico que abarcara todo el campo de posibilidades, no usaron enunciados geométricos para describir los distintos tipos de cuadriláteros que satisfacían las condiciones establecidas y prefirieron hacer dibujos.

Para responder el interrogante acerca de cómo diferenciar niveles de razonamiento cuando el individuo se enfrenta a la tarea de conceptualizar, se extractaron de las respuestas algunos ejemplos representativos del desempeño en cada nivel. A pesar de que ningún estudiante obtuvo la respuesta completa, la gama de ellas permitió validar los niveles propuestos.

Para determinar la relación que existe entre los niveles de razonamiento en la tarea de conceptualizar y el tipo de experiencias educativas previas en geometría, se cuantificaron las respuestas de los estudiantes, clasificándolas según el indicador de nivel. Esto permitió hacer un cuadro comparativo y obtener algunas conclusiones.

## Niveles de razonamiento

Como ya se mencionó, en el nivel 1 se ubicaron aquellos estudiantes que no tuvieron éxito en la tarea porque, posiblemente, al no tener un apoyo visual, no pudieron agrupar en alguna configuración las propiedades descritas para construir un prototipo del concepto. Es el caso de un estudiante que concluyó "no podría definir el tipo de figura con la argumentación dada ya que se formarían infinidad de figuras que cumplen esas características" (Daniel, primer semestre). Otros estudiantes se limitaron a hacer consideraciones, no siempre verdaderas, a partir de una propiedad. Por ejemplo, "la primera afirmación, 'es una figura de cuatro lados rectos', no me permite identificar la figura" (Sara, Especialización); "es un rombo" (Luisa, primer semestre); "es un paralelogramo que puede ser rectángulo, rombo, romboide o cuadrado" (Raúl, Especialización); "la figura es un cuadrilátero dado que por las características puede ser un rectángulo, un rombo, un trapecio" (Inés, primer semestre). Estas respuestas demuestran que su razonamiento se centró sólo en una de las propiedades y no lograron ligar las propiedades de la lista.

En el nivel 2 se ubicaron los alumnos que generaron su imagen conceptual atendiendo más a las propiedades diferenciadoras que a las inclusivas. Para la mayoría de estudiantes ubicados en este nivel, la imagen conceptual corresponde a la de un rectángulo pues éste es la figura prototípica que posee "dos lados largos y dos lados cortos". Los estudiantes consideran esta propiedad como relevante para diferenciar los rectángulos de los cuadrados, lo que los lleva a centrar la atención en ella. Se evidencia el desconocimiento de las características esenciales de los rectángulos: ser paralelogramos y tener un ángulo recto. Otros estudiantes añaden propiedades que no están presentes en la información y concluyen, por ejemplo, que los lados opuestos son los congruentes. En síntesis, los razonamientos de los estudiantes están influidos por una imagen conceptual limitada con lo que se obtiene, como consecuencia, una respuesta incompleta que muestra falta de imaginación, quizás porque su experiencia en el estudio de cuadriláteros no ha tenido la riqueza necesaria.

Evidencia del condicionamiento a la propiedad de tener dos lados cortos y dos largos se percibe en respuestas como:

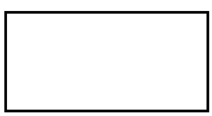
> Una figura cerrada de 4 lados rectos. Es un cuadrilátero según la forma que tome en el espacio. La figura que para mí cumple con estas condiciones es un rectángulo. (Nicolás, primer semestre)

> Al leer la primera posibilidad se piensa en: - un cuadrado - un rectángulo - un rombo pero al leer la siguiente propiedad, el rombo y el cuadrado ya no la cumplen, por lo tanto la figura que se describe es el rectángulo. Se podría decir que otra propiedad es que sus ángulos son congruentes y sus ángulos rectos. (Verónica, segundo semestre)

> La figura que cumple con las propiedades dadas es un rectángulo, porque un rectángulo es una figura cerrada de cuatro lados rectos además tiene dos lados cortos y dos largos, los lados largos son de igual longitud, al igual que los lados cortos. (Hernán, segundo semestre)

> Es un rectángulo. Dos lados largos congruentes y dos cortos congruentes, 4 ángulos rectos. (Álvaro, tercer semestre)

En algunos razonamientos se evidencia un mecanismo de “autoconvencimiento” en el que, a partir del ejemplo prototípico más común del concepto que cumple la propiedad, el rectángulo, los estudiantes verifican que se cumple el listado de propiedades y no se dan la oportunidad de estudiar otras posibilidades. En la Figura Nº 2 se muestra una respuesta típica de tal hecho:



✓ Figura cerrada de 4 lados rectos
✓ Tiene 2 lados largos y 2 cortos
✓ Los lados largos son de igual longitud
✓ Los lados cortos también.
(Luz, primer semestre)

*Figura Nº 2.*

Incluso una estudiante modificó el enunciado del ejercicio para que se acomodara a su imagen conceptual: “tomando la primera afirmación como: ‘figura cerrada con 4 **ángulos** rectos’, la figura es un rectángulo” (Ruth, tercer semestre).

Algunos alumnos usan un lenguaje sofisticado pero utilizan el mismo mecanismo de autoconvencimiento, mostrando que no siempre el hacer uso de la simbología matemática refleja un nivel alto de razonamiento en geometría ni es prueba de una imagen conceptual completa. Se encontraron respuestas como la de la Figura Nº 3.

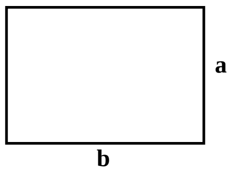



Figura cerrada, tiene 4 'lados' rectos, $b > a$, $a = a$, $b = b$, es un rectángulo.
(Jorge, tercer semestre)

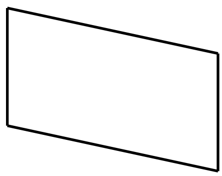
*Figura Nº 3.*

La mayoría de los setenta y tres estudiantes examinados se ubican en este nivel, lo que sugiere la necesidad de enriquecer el espectro de experiencias con cuadriláteros para ampliar así sus imágenes conceptuales y lograr dos cosas: construir una mejor conceptualización de los rectángulos, a partir de sus propiedades matemáticas relevantes y no de características perceptuales, y lograr que posean un pensamiento más flexible con respecto a sus imágenes conceptuales, 'que les permita modificarlas para ampliar los prototipos y enriquecer su conceptualización.

En el nivel 3 se ubican los estudiantes que reconocen que no pueden agregar nuevas propiedades a la lista, excepto aquellas que se infieren de las dadas inicialmente. Esto hace que las imágenes conceptuales sean más amplias porque no condicionan la figura a tener ángulos rectos o a que los lados congruentes sean los opuestos. Su razonamiento parte de tomar cada propiedad y estudiar un abanico de posibilidades para luego obtener, por descarte, la figura pedida. Sin embargo, no logran obtener todos los prototipos; sus imágenes conceptuales se construyen sobre cuadriláteros familiares, como los paralelogramos. Ejemplos de esta forma de conceptualizar son los siguientes (dos de ellos se presentan en la Figura Nº 4 y la Figura Nº 5):

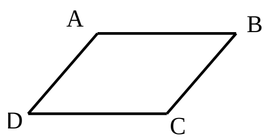
> La descripción de la figura en mi concepto puede pertenecer a dos figuras en particular; el rectángulo y el paralelogramo, pues juntas figuras tienen cuatro lados rectos, tienen dos lados largos de igual longitud y dos lados cortos de igual longitud, la descripción nunca dice qué clase de ángulos tiene la figura y en mi apreciación, puede

ser cualquiera de las figuras antes mencionadas. (Orlando, primer semestre)



• Graficando las propiedades que nos dan obtenemos que la figura correspondiente es un paralelogramo.
• No podemos decir que corresponde a un rectángulo ya que en las propiedades nombradas no se encuentra que tenga sus ángulos rectos, que es la única propiedad que falta para que corresponda a un rectángulo.
(Martha, segundo semestre)

*Figura Nº 4.*




• Es una figura cerrada de cuatro lados rectos
• DC y AB son los lados largos y AD y BC son los lados cortos
• $\overline{AB}$ $\overline{CD}$ entonces $AB = DC$ y
• $\overline{AD}$ $\overline{BC}$ entonces $AD = BC$
(Carlos, segundo semestre)

*Figura Nº 5.*

Se evidencia en las respuestas un avance en el razonamiento hacia clasificaciones inclusivas; sin embargo, la imagen conceptual se limita a los paralelogramos.

La siguiente respuesta ejemplifica un razonamiento interesante pues se hace un cuidadoso estudio analítico de las condiciones.

Condición 1: Podría ser cualquier cuadrilátero.
Condición 2: Podría ser un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio.
Condición 3: Podría ser un rectángulo, un paralelogramo, y en un caso especial un trapecio.
Condición 4: Podría ser un rectángulo, un paralelogramo.
Reuniendo todas las condiciones de la figura podría ser un rectángulo o un paralelogramo debido a que estas dos figuras reúnen las cuatro condiciones que se enumeran en la pregunta.
(Arturo, segundo semestre)

En síntesis, en este nivel los estudiantes manifestaron la existencia de más de un tipo de figura haciendo específica alguna propiedad esencial que no ha sido nombrada y considerando las relaciones de inclusión. Los investigadores van Hiele consideran que sólo cuando los estudiantes hacen este tipo de razonamiento están preparados para comprender el papel de una demostración en geometría.

En el nivel 4 se ubicaron aquellos estudiantes que, además de admitir la existencia de más de dos tipos de cuadriláteros que cumplen las propiedades, excluyen explícitamente a los cuadrados y a los rombos o a alguno de ellos. Aunque no respondieron en forma completa la pregunta, su razonamiento les permite obtener una cobertura mayor de los prototipos visuales y más amplitud en la conceptualización. Ejemplos de respuestas que se ubican en esta categoría se presentan a continuación (tres de ellos se presentan en la Figura Nº 6, la Figura Nº 7, la Figura Nº 8):

> La figura es un paralelogramo que no es un cuadrado o una cometa.
> (Saúl, segundo semestre)

> En la primera afirmación tenemos que la figura es un cuadrilátero. La segunda afirmación excluye a los rombos (el cuadrado es un rombo). Con las afirmaciones tercera y cuarta vemos que la figura puede ser una cometa. Aunque algunos paralelogramos cumplen las cuatro propiedades no podemos decir que la figura es un paralelogramo ya que los rombos son también paralelogramos.
> (Carola, segundo semestre)

La figura es un cuadrilátero que se podría representar de varias maneras pues no menciona nada en relación con sus ángulos, así sería alguna de varias de las siguientes figuras. (Miriam, primer semestre)

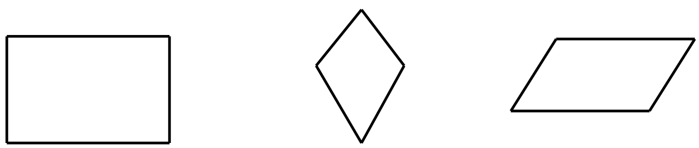


*Figura Nº 6.*

Hay varias figuras que cumplen las mismas propiedades.
(Eduardo, primer semestre)

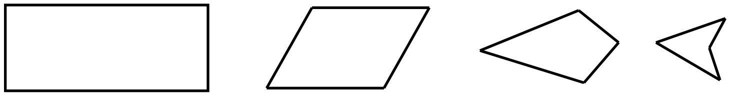


*Figura Nº 7.*

No se tiene una figura específica, suponiendo que los lados rectos signifique $\overline{AB}$. Algunas figuras son: (Claudia, tercer semestre)

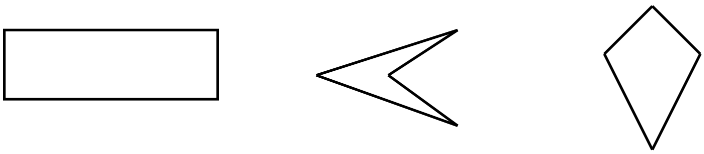


*Figura Nº 8.*

## Relación antecedentes académicos versus nivel de razonamiento

La siguiente tabla recoge la cuantificación de las respuestas por cada nivel:

| | **Grupo 1** | **Grupo 2** | **Grupo 3** | **Grupo 4** |
|---|---|---|---|---|
| **Nivel 1** | 2 | 1 | 0 | 2 |
| **Nivel 2** | 11 | 9 | 9 | 8 |
| **Nivel 3** | 1 | 6 | 2 | 3 |
| **Nivel 4** | 3 | 6 | 10 | 0 |

De estos resultados se puede inferir, aunque no de manera categórica, que las experiencias de aprendizaje determinan un avance en la evolución del razonamiento que se pone en juego al momento de conceptualizar, ya que casi 50% de alumnos del Grupo 3 se encuentra en el nivel 4. Probablemente los estudiantes que se ubican en los niveles 3 y 4 tendrán más éxito en tareas de demostración pues el conocimiento geométrico, como ya se dijo, descansa sobre la construcción matemática de los conceptos, a partir de la identificación de las propiedades geométricas en juego y no sólo de la identificación de características perceptuales.

La gráfica de la Figura Nº 9 resalta el hecho de que ningún estudiante de la Especialización se ubicó en el nivel 4, a pesar de ser profesores en ejercicio. Durante algunas conversaciones sostenidas con ellos a lo largo del semestre manifestaron que, en la mayoría de los casos, sus experiencias geométricas previas habían sido poco productivas pues se habían limitado a aprender de memoria las demostraciones de algunos teoremas y las fórmulas para obtener áreas y volúmenes de sólidos.

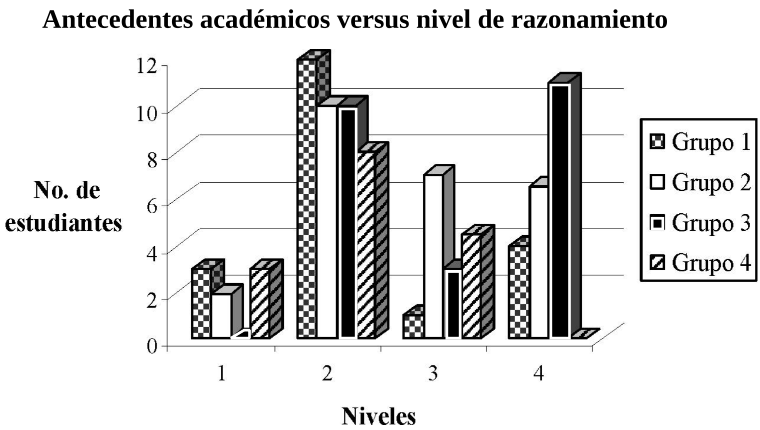



*Figura Nº 9.*

## CONSIDERACIONES FINALES

Aun cuando una de las actividades más frecuentes en matemáticas es la construcción de conceptos, ésta se ha restringido al establecimiento de una correspondencia entre definiciones formales o nombres, con una representación visual del concepto o de la relación. Así, para explicar qué es un cuadrilátero se da una definición y se dibujan algunos ejemplos de cuadriláteros; para explicar qué son rectas paralelas se recurre igualmente a una definición formal seguida de dos o tres dibujos. Esta presentación desconoce que la conceptualización descansa sobre procesos de razonamiento activados mediante diversas experiencias de aprendizaje, pues no es muy probable que la memorización de una definición sea de utilidad a la hora de tener que usar el concepto geométrico. Como consecuencia de este tipo de tratamiento se produce una cadena de incomprensiones que no permiten el acceso a un conocimiento genuino.

Tal como lo intuíamos desde el comienzo, los resultados del trabajo reportado en este artículo alientan una alternativa de tratamiento curricular para la geometría conformado por actividades de diferente índole como las siguientes:

- Construcción, con elementos de trazo o a través del uso de programas de geometría dinámica, para explicitar características y establecer relaciones geométricas entre los objetos representados.
- Visualización, a partir de las actividades de desconfiguración y reconfiguración de las figuras, con el objeto de ahondar en la percepción visual de las mismas y hacer de esta función cognitiva una herramienta de conceptualización y resolución de problemas.
- Exploración de propiedades, con miras a encontrar invariantes en diversas representaciones, para caracterizar los objetos geométricos y formular conjeturas sobre propiedades y relaciones.
- Elaboración de explicaciones, mediante las cuales se explicitan las imágenes conceptuales logradas para, a partir de ellas, avanzar en la conceptualización de los objetos geométricos.
- Clasificación con el fin de obtener ejemplos y contraejemplos del objeto en estudio y ampliar así las imágenes conceptuales del mismo.

Con actividades como las anteriores, entre otras, se ayuda a los estudiantes a construir imágenes conceptuales más próximas a las definiciones de los objetos geométricos aceptadas por la comunidad matemática y de esta manera se contribuye a la formación de criterios amplios para dudar de las imágenes conceptuales prototípicas y sentir la necesidad de explorar más posibilidades, logrando así ampliar los horizontes conceptuales.

## REFERENCIAS

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas*. Bogotá: una empresa docente.

Burger, W. y Shaughnessy, M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17* (1), 31-48.

Camargo, L., Samper, C. y Leguizamón, C. (2000). Desarrollo del razonamiento a través de la geometría euclidiana (propuesta de investigación presentada a la

Convocatoria del CIUP). Bogotá: Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional.

Clements, D. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-461). New York: National Council of Teachers of Mathematics.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st centur*y (pp. 37-52). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1996). Process versus product teaching in geometry. En M. Villiers, The future of secondary school geometry (documento disponible en: http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/deVillieres/deVilliers98/deVilliers983.htm).

Jaime, A., Chapa, F. y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros. Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *EPSILON, 23*, 49-62.

*Carmen Samper*
*Cecilia Leguizamón*
*Leonor Camargo*
*Departamento de Matemáticas*
*Universidad Pedagógica Nacional*
*Calle 72 Nº 11-86*
*Tels.: 347 1190 - 347 3575*
*Bogotá, Colombia*