

ESTADO ACTUAL DE LA INVESTIGACIÓN ALREDEDOR DE LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Fabián Wilfrido Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez

Resumen

La investigación que se presenta tiene por objetivo abordar la Serie Trigonométrica de Fourier (STF) de manera sistémica, desde una perspectiva Socioepistemológica. Pretendemos hacer un diseño de ingeniería didáctica para resignificar la STF partiendo de un análisis preliminar exhaustivo. En este avance de investigación ofreceremos los antecedentes del proyecto, con el fin de dar una visión general de los resultados de investigación realizados en matemática educativa alrededor de la STF.

Palabras clave: Serie Trigonométrica de Fourier; Ingeniería Didáctica; Socioepistemología.

Introducción

La enseñanza del cálculo en el nivel superior ha sido motivo de múltiples investigaciones en Matemática Educativa, dentro del cálculo la STF es uno de los temas primordiales, pues este fue un punto de quiebre en el desarrollo del análisis matemático, y en la evolución del concepto de función como lo conocemos hoy en día.

Por otra parte la STF es el estadio más avanzado de las funciones trigonométricas (Montiel, 2005), por lo que es necesario que éstas estén construidas como objeto en los estudiantes, es decir, que puedan ser susceptibles de manipulación, para lo cual es necesario el tránsito entre los diferentes registros de representación, donde el registro gráfico y el numérico cobrarán gran importancia, lo que nos permite formular una posible hipótesis de investigación: para significar la Serie Trigonométrica de Fourier se requiere de un ambiente fenomenológico distinto a la determinación del estado estacionario, para lo cual se precisa que las funciones trigonométricas estén construidas como objeto matemático entre los estudiantes.

Con este diseño de intervención se espera cerrar un ciclo de investigaciones dentro de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa proporcionando un producto de la investigación para el trabajo en el aula basado en la construcción social del conocimiento y con ello proponer un rediseño para el discurso matemático escolar vigente.

Marco Teórico y Antecedentes

Las STF es un tema fundamental en cursos avanzados de ingeniería, en estas asignaturas se busca que las matemáticas brinden una base sólida para la formación de los futuros ingenieros (Rodríguez, 2009). Además la STF ha “tenido gran influencia en el desarrollo de la teoría de funciones reales de una variable real, comparable sólo con las series de potencias en la teoría general de funciones” (Farfán, 1986, pág. 1). En el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, diversos estudios se han preocupado por el

abordaje de la STF, estas investigaciones se han fundamentado en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, las cuales han seguido una aproximación sistémica para la construcción social del conocimiento, mediante la articulación de cuatro componentes: la naturaleza epistemológica, la dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y la dimensión didáctica (Cantoral, 1999).

El trabajo que se presenta corresponde a los antecedentes para un diseño de Ingeniería Didáctica enfocado al abordaje de la STF, por lo que gracias a la cantidad numerosa de trabajos alrededor del objeto se busca dar cuenta, de manera integradora, de los siguientes aspectos acerca de la STF: El problema de la cuerda vibrante como antecedente de la STF (Farfán, 1986; Ulín, 1984), la determinación de la fenomenología intrínseca del objeto matemático “determinación del estado estacionario” (Farfán, 1994; 2012; Marmolejo, 2006); y las nociones físicas y matemáticas relacionados con la STF como lo son la actividad de modelación (Morales, 2003), la noción de calor (Morales, 2010), la visualización matemática de la STF (Rodríguez, 2009), la hipótesis de periodicidad (Vásquez, 2006), la convergencia de la STF (Moreno, 1999).

Diversos estudios en Matemática Educativa se han preocupado por el abordaje de las series de Fourier con la finalidad de mejorar los procesos de aprendizaje vía la enseñanza y que así las matemáticas brinden una base sólida para la formación de los futuros profesionales (Rodríguez, 2009). Es así como esta investigación se interesa, principalmente, por aquellos acercamientos a las series de Fourier que den cuenta de su génesis y de las nociones que se encuentren alrededor del trabajo con las mismas.

Acerca del estado estacionario:

Este apartado está enfocado en las investigaciones que dieron cuenta de la génesis de la serie de Fourier relacionado con la determinación del estado estacionario, así como el problema de la conducción de calor como ambiente fenomenológico que dio paso al surgimiento de las series de Fourier, como lo reporta Farfán (1994; 2012).

Un primer acercamiento al trabajo de Fourier lo hace Ulín (1984) en sus tesis de maestría “*Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier*” donde discute la solución del problema de transmisión de calor entre cuerpos disjuntos haciendo una analogía con el problema de la cuerda vibrante en su caso discreto, luego realiza el mismo análisis haciendo el salto hacia lo continuo, concluyendo que hacer el salto de lo discreto a lo continuo resulta “tan complejo” porque el análisis que se requiere en cada uno es completamente distinto, hecho que provoca que sea imposible separar el modelo matemático del problema físico.

Al respecto Farfán (1986) nos muestra que D. Bernoulli, al resolver el problema de la cuerda vibrante, utiliza argumentos físicos para decir que la forma inicial de la cuerda se puede expresar como una serie trigonométrica. En contraparte:

“Fourier nos muestra que la solución matemática es acorde con la situación física, pero la demostración se inserta en la matemática misma sin alusión a argumentos que no pertenecen a ella. Así se da la separación entre la Física y las matemáticas que desde la antigüedad caminaban estrechamente ligadas una de la otra”.
(Farfán, 1986, pág. 67)

Es decir, se da una ruptura entre el modelo matemático y el problema físico, aunque el primero siempre responde al segundo, las argumentaciones utilizadas son propias del área de las matemáticas. Para esto Fourier hace uso de un alto dominio de todo el aparato algebraico, razón por la cual Morales (2003) considera a Fourier un “modelador experto” y analiza su obra titulada *Memoire sur les Températures du Globe Terrestre*, para comprender los razonamientos de este científico y las implicaciones físicas y matemáticas que tiene el estudio del calor, donde se hace notar que:

...”la trasposición didáctica a la que inevitablemente los conceptos son sometidos antes de su inclusión en la escuela, ha dividido el trabajo de Fourier en algunos aspectos puramente físicos y otros puramente matemáticos hasta desproveerlo de todos los aspectos desde los cuales estos aspectos surgieron, convirtiéndolos en algunos casos en herramientas puramente matemáticas”. (Morales, 2003, pág. 58)

Se vislumbra así el hecho de que las herramientas brindadas por la escuela no son suficientes para hacer una modelación matemática como la que requiere cualquier fenómeno relacionado con las series de Fourier, es decir con la determinación del estado estacionario.

En su investigación, Morales (2010) analiza la ambigüedad en el concepto de calor y da una caracterización del pensamiento físico-matemático, en lo que resalta “El pensamiento físico usa en repetidas ocasiones al pensamiento matemático, únicamente para darle formalidad o para comunicarlo, pero no lo usa para argumentar” (Morales, 2010, pág. 177). Esto indica que no hay una retroalimentación de la matemática hacia el problema físico, pero esto se debe a que comprender el concepto de calor representa una tarea cognitiva de alto nivel, tal y como se ha reportado:

...”este concepto físico no es producto de la primer experiencia sensible; baste decir que la humanidad conoce, requiere y manipula el calor desde tiempos remotos, en tanto que su estudio científico inicia en el siglo XIX, poco después de la publicación de la *Mecánica Celeste* de Laplace. Es decir, se ha estudiado la naturaleza del espacio que circula el globo terrestre antes de dar cuenta de un fenómeno vital para la vida humana. Ello no es gratuito, la abstracción requerida para la adquisición del concepto físico involucrado representa una tarea cognoscitiva de las más complejas”. (Farfán, 2012, pág. 270)

Por lo que el ambiente fenomenológico en el que surgió no parece ser el medio propicio para llevar la serie de Fourier al aula, ya que este resulta ser más complejo que la serie misma, esto en contradicción con lo que expone Muro (2000) en su tesis de maestría busca significar la serie de Fourier mediante una contextualización (Matemática en Contexto) cercana al ingeniero químico, la transferencia de masa, donde se apoya en la hipótesis de que la matemática en contexto es un medio ideal para la enseñanza de las matemáticas.

Acerca de las series y su convergencia:

Farfán (2012) plantea que la consideración del estado estacionario marca una ruptura epistémica, ya que se traslada el problema de calcular la suma de una serie a determinar su

convergencia, ante esto Flores (1992) basado en su análisis epistemológico alrededor del trabajo de Cauchy sobre los criterios de convergencia, hace un montaje experimental con el objetivo de saber si operar con los términos de una serie es un mecanismo natural para conocer su convergencia, a lo cual concluye que “No es natural operar con los términos de una serie [numérica] para determinar si esta converge o diverge” (Flores, 1992, pág. 208).

Por su parte, Albert (1996) encuentra que para superar algunos obstáculos epistemológicos relacionados con las series como el infinito, serie infinita, convergencia de series, entre otros; se debe acercarse al contexto del profesional, para dar significado al objeto matemático, esto se desprende también de la investigación de Farfán (2012) pues indica que deben estudiarse diversos ambientes fenomenológicos cercanos al contexto del profesional.

Ante el problema del flujo de calor Marmolejo (2006) indica que primero se debe conocer las condiciones de contorno que permiten que un proceso de transferencia de calor tenga lugar y que esto conduce necesariamente a un estado estable (estado estacionario), esto lo vislumbró a través de la experimentación con estudiantes utilizando una simulación (por computadora) del problema del calentamiento de una barra metálica e indica que esto podría dar paso a comprender la convergencia de la serie de Fourier.

Otros aspectos relacionados con las series de Fourier:

En esta sección interesan aquellas investigaciones que tratan de nociones u objetos matemáticos relacionados con las series de Fourier, como lo son la periodicidad, la visualización de la STF y la convergencia de la misma.

Vásquez (2006) se interesa por el rol que desempeña la hipótesis de periodicidad para la STF, por lo que da cuenta de cómo el carácter periódico, presente en el discurso matemático escolar, para el cálculo de una serie de Fourier no estuvo presente en su génesis histórica, ya que en la *Théorie Analytique de la Chaleur* las generalizaciones son para intervalos de longitud finita y no sobre todo \mathbb{R} , además al hacer un montaje experimental indica que:

...”la periodicidad es una argumentación que no se ha construido en los alumnos. . . El procedimiento que siguen para la resolución de problemas no toma en cuenta la periodicidad; esto es, la periodicidad no es obstáculo para resolver un problema, ya que si la función es periódica o no, ellos calculan la serie de Fourier. Sin embargo, en los cuestionarios la hipótesis de periodicidad surge de manera casi natural”. (Vásquez, 2006, pág. 62)

Con esto se presenta la hipótesis de periodicidad como un obstáculo de tipo didáctico, que no afecta el cálculo de la STF, pero sí a la argumentación de los estudiantes respecto a poder calcular la serie de cualquier función, esto debido al discurso matemático escolar predominante.

Por otra parte, Rodríguez (2009) se enfoca principalmente, en la visualización matemática presente en el trabajo de Fourier.

...”independiente del contexto físico en el que se halla el trabajo de Fourier, él “visualiza matemáticamente”, trata de dar un sentido y significado al análisis de sus resultados, en un principio justifica

físicamente pero posteriormente la justificación se sitúa en el plano matemático”. (Rodríguez, 2009, pág. 34)

Con base en esta idea Rodríguez aplica un diseño experimental, enfocándose principalmente en la visualización matemática, observa que los estudiantes a quienes aplicó el diseño tienen carencias en la comprensión de la noción de función, con ausencia de interacción entre los diferentes registros (gráfico y algebraico), específicamente trabajan las series de Fourier de forma algorítmica, sin reflexión en el proceso, la memoria es su principal herramienta de aprendizaje, recomienda que un diseño de situación debe considerar el trabajo en los diferentes registros de representación, pues esto favorecería la comprensión de los objetos matemáticos y potenciar el pensamiento matemático en el estudiante (Rodríguez, 2009).

Siguiendo esta idea el trabajo de Moreno (1999) utiliza un ambiente físico-geométrico que le permite superar el obstáculo epistemológico llamado principio de permanencia de Leibniz, el cual permitió al estudiante “construir una función periódica discontinua, como límite de las sumas parciales de la serie trigonométrica dientes de sierra” (Moreno, 1999, pág. 97), además de visualizar, apoyado en el uso de tecnología, la convergencia de la serie. El estudio de Díaz-Barriga (1993) estudia la transformada rápida de Fourier y cómo esta es resultado de la generalización natural de las series de Fourier en donde se puede hacer uso de la transformada de Fourier en las aplicaciones a la vida real.

Finalmente, Montiel (2005) hace un estudio socioepistemológico de la función trigonométrica donde se nota que la STF es el último estadio de las funciones trigonométricas y que para significar la STF y su convergencia se tiene la necesidad de que de manera previa se signifique la función trigonométrica como herramienta predictiva, además de que las características de las funciones seno y coseno (periódicas y acotadas) y sus variaciones poseen las mismas características, las convierten en una herramienta muy poderosa dentro de la matemática misma y para la modelación de fenómenos de naturaleza periódica.

La Ingeniería Didáctica como Metodología de la Investigación

La Ingeniería Didáctica (ID) es una metodología de investigación que se basa en el diseño y experimentación de secuencias didácticas de manera controlada, donde los resultados de la secuencia se validan de manera interna mediante una comparación entre un análisis a priori y un análisis a posteriori (Artigue, 2014). El sustento teórico de la ID proviene de la Teoría de Transposición Didáctica y de la Teoría de Situaciones Didácticas, al considerar estas dos teorías al analizar el fenómeno didáctico, la primera con un alcance global y la segunda con un alcance local, se ve la necesidad de hacer un análisis de tipo sistémico alrededor del fenómeno didáctico (Farfán, 2012), en nuestro caso la STF.

Grosso modo la metodología que seguirá este trabajo comprende las siguientes fases:

- Un *análisis preliminar* que incluye tres componentes: la didáctica, es decir, cómo vive la STF en el sistema educativo (libros de texto, planes y programas de estudio, clases magistrales, entre otros); la *epistemológica*, pues esta provee de historicidad a la STF, por lo que se estudiará desde el problema de la cuerda vibrante hasta el estudio de la propagación de calor de Fourier; y la componente *cognitiva* de la población que será sometida a la ingeniería.

- La segunda fase constituye el *diseño de intervención*, en esta parte se deciden las variables macro y micro didácticas que van a considerarse, basándose a en el análisis a priori.
- Por último, la *aplicación del diseño* y el *análisis de los resultados*.

Es importante recalcar que la Teoría Socioepistemológica agrega una cuarta componente al análisis preliminar, la *social y cultural*, donde interesan los procesos de construcción social del conocimiento, esta componente permea todas las demás, lo cual robustece la ID en su análisis preliminar, cuya precisión es de suma importancia para el diseño (Farfán, 2012).

Reflexiones

Cabe destacar que este avance de investigación representa únicamente los antecedentes del proyecto y que estos, en su mayoría, han sido análisis preliminares de ingenierías didácticas acerca de aspectos relacionados con la STF, pero estudiados de manera aislada, uno de los fines de este trabajo es el de integrar todos los avances que se han tenido a nivel de investigación relacionados con la STF, para así poder hacer un diseño de ingeniería didáctica de intervención para el aula enmarcado dentro del enfoque de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, por esta razón a partir de los antecedentes podemos asegurar lo siguiente:

- La escuela, considerando los diferentes niveles, no provee de las herramientas físicas y matemáticas necesarias para comprender la noción de calor ni el concepto de estado estacionario en los ambientes fenomenológicos ligados a la STF.
- Partir del ambiente fenomenológico, determinación del estado estacionario, es una tarea cognitiva más compleja que la serie misma, lo cual contradice la hipótesis de la Matemática en Contexto, donde se debe partir del ambiente fenomenológico para significar la STF.
- Se deben buscar de otros ambientes que permitan significar la STF, pero que no requieran de la noción de estado estacionario.
- Una situación que se base en la modelación de movimientos circulares superpuestos podría permitir superar uno de los obstáculos epistemológicos ligados a la STF: el principio de permanencia de Leibniz.
- La hipótesis de periodicidad no estuvo presente en la génesis de la STF y no es necesaria para que los estudiantes la construyan, sino que podría ser un resultado derivado de su construcción.
- Es necesario trabajar en diferentes registros de representación, donde el gráfico y numérico cobran gran importancia.
- Para la correcta significación de la STF, es necesario que previamente las funciones trigonométricas seno y coseno se hayan construido en el estudiante como objeto matemático, es decir un objeto susceptible de manipulación.

Con el fin de proponer un diseño de intervención para el aula es necesario vislumbrar todas estas consideraciones en el análisis a priori, pues esto integraría las diferentes ideas que se han logrado gracias a la investigación sobre la STF, y a partir de esto construir el diseño de intervención.

Referencias

- Albert, J. A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Una aproximación sistémica*. Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.
- Artigue, M. (2014). Didactic enhineering in mathematics education. En *Encyclopedia of Mathematics Education* (págs. 159-162). Springer Netherlands.
- Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: un programma emergente. *La Matematica E La Sua Didattica* , 3, 258-270.
- Díaz-Barriga, E. (1993). *La transformada rápida de Fourier: Un estudio de la matemática en un contexto que recupera significados*. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.
- Farfán, R. M. (1986). *Acerca de la representación de una función "arbitraria" en serie trigonométrica (Ensayo Histórico)*. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.
- Farfán, R. M. (1994). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería*. Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.
- Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización* (Primera ed.). Barcelona, España: Editorial Gedisa S. A.
- Flores, R. (1992). *Sobre la construcción del concepto de convergencia en relación al manejo heurístico de los criterios*. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.
- Marmolejo, R. (2006). *Estudio de la noción de estado estacionario en el ámbito fenomenológico de la transferencia de calor*. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.
- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral, CICATA-IPN, México D. F.
- Morales, F. (2003). *Acerca de la actividad de modelación: las temperaturas de la tierra*. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.
- Morales, F. (2010). *Causas y efectos de la ambigüedad en el tratamiento didáctico de la noción de calor. Una caracterización del pensamiento fisicomatemático*. Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.
- Moreno, J. A. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación*. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

- Muro, C. (2000). *Significación de la serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa*. Tesis de maestría, UAEH, Hidalgo.
- Rodríguez, M. (2009). *Una matemática funcional para el ingeniero. La serie trigonométrica de Fourier*. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.
- Ulín, C. (1984). *Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier*. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.
- Vásquez, R. (2006). *Sobre el papel de la hipótesis de periodicidad en las series de Fourier*. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Autores

Fabián Wilfrido Romero Fonseca; CINVESTAV, IPN. México; fwromero@cinvestav.mx

Rosa María Farfán Márquez; CINVESTAV, IPN. México; rfarfan@cinvestav.mx