REVISTA EMA
2002, VOL. 7, Nº 3, 310-343

LO ARBITRARIO Y LO NECESARIO: EDUCACIÓN DE LA CONSCIENCIA[1]

DAVE HEWITT

Esta es la tercera y última parte del artículo "Lo arbitrario y lo necesario" cuyas primeras dos partes fueron publicadas en los dos números anteriores de la Revista. Aquí el autor enfatiza que la consciencia es lo único educable y señala la necesidad de que el estudiante eduque su propia consciencia de las matemáticas. Describe algunas técnicas que el profesor puede utilizar para apoyar al estudiante en el logro de ese objetivo: ayudar a ver las consecuencias de las acciones y decisiones, dirigir la atención y forzar la consciencia.

David Wheeler[2] y yo compartimos una influencia común: Caleb Gattegno. David conoció a Gattegno en los primeros años de la Asociación de Profesores de Matemáticas (ATM) del Reino Unido y luego pasó un período corto trabajando con Gattegno en la ciudad de Nueva York antes de ir a la Universidad de Concordia en Montreal (Canadá) en 1975. Yo me encontré con Gattegno en muchas ocasiones durante la década de 1980, en el Reino Unido, en seminarios que tuvieron lugar en Bristol y en Londres. Cuando miro hacia atrás me sorprende no haberme encontrado con más frecuencia con David. A pesar de esto, percibí un lenguaje común y una familiaridad dondequiera que nos encontrábamos y seguí sintiendo la influencia de David a través del contacto con amigos mutuos y colegas del mundo de la Educación Matemática.

Sin embargo, su influencia en mí se dio principalmente a través de la fuerza y el estilo de sus escritos. El artículo de la revista *Mathematics Teaching* titulado "The role of the teacher" (MT, número 50, 1970, 23-29) y el escrito para una ponencia en una conferencia de ATM (MT, número 71, 1975, 4-9) titulado "Humanising mathemati-

1. Traducción realizada por Patricia Perry y Hernando Alfonso, del original Hewitt, D. (2001). Arbitrary and necessary: Part 3 Educating awareness. *For the Learning of Mathematics, 21* (2), 37-49. Agradecemos a David Pimm, editor de *For the Learning of Mathematics* por haber autorizado la traducción al español y la publicación de este artículo en la *Revista EMA*.
2. El número de *For the Learning* en el que fue publicado el original del presente artículo está dedicado a la memoria de David Wheeler, editor fundador de la revista, quien falleció en el año 2000.

> cal education”, presentaban claramente una visión de las matemáticas como una actividad humana más que como una colección de tópicos de un programa de estudio, enfatizando el papel que un profesor tiene en el desarrollo de tal actividad matemática. Tales artículos tuvieron sobre mí un impacto considerable cuando se los leí por primera vez a un profesor relativamente joven en la década de los años ochenta y sigo percibiendo su fuerza al leerlos de nuevo hoy.
>
> La última vez que vi a David fue en el *Canadian Mathematics Education Study Group* en 1998 en Vancouver. Él daba una charla titulada “The common sense of teaching” (CMESG *Proceedings*, pp. 93-99), en la que destacaba la relativa poca atención que se le da a los “aspectos técnicos” de la enseñanza. Cualquiera sea el significado que David le haya dado a esta frase, espero que este artículo —el final de la trilogía— dirija de alguna manera la atención hacia las técnicas posibles que un profesor puede emplear y que también dé a los estudiantes el reconocimiento como personas que ya operan matemáticamente como consecuencia de su actividad humana de cada día.

DIVISIÓN DEL CURRÍCULO Y TRABAJO SOBRE LO QUE TIENE CALIDAD DE NECESARIO

En la primera parte de este artículo (Hewitt, 1999), introduje una división en el currículo de matemáticas entre aquellas cosas que un estudiante nunca puede saber a ciencia cierta sin que algún medio externo —como por ejemplo el profesor, un libro, o el Internet— le informe al respecto y aquellas cosas que algunos estudiantes pueden llegar a saber con certeza sin que nadie les haya informado sobre ello. Lo primero se refiere a nombres y convenciones que han sido socialmente acordados en algún momento del pasado y adoptados por la comunidad de matemáticos. Los califico como *arbitrarios* debido a que un estudiante puede percibirlos como tales (‘¿Por qué así, si podría ser de otra manera?’). Lo segundo se refiere a propiedades y relaciones de las que se puede saber que son consecuencias *necesarias* de ciertos escenarios matemáticos. Lo arbitrario, por su misma naturaleza, reside en el ámbito de la memoria. Restrinjo mi uso del término ‘memorización’ para describir un proceso consciente en el que alguien, *en el momento de recibir información y posteriormente*, activa técnicas para mantener esa información de manera que esté disponible en un tiempo futuro.

En la segunda parte (Hewitt, 2001), abordé el reto pedagógico de apoyar a los estudiantes en su tarea de memorizar lo arbitrario y sostuve que aunque esta no es el área en la que residen las matemáticas, hay una tarea importante y significativa por realizar para que los estudiantes puedan ver y hacer uso del poder de asignar nombres y adoptar convenciones a la vez que se involucran en el trabajo que realizan en donde residen las matemáticas, es decir, en aquello que tiene el carácter de necesario. En particular, exploré el hecho de que aunque el papel del profesor es informar a los estudiantes de lo arbitrario, hay diferentes momentos y formas para que esta información tenga lugar y ello tiene consecuencias para el aprendizaje de los estudiantes.

Este artículo, la tercera y última parte de la trilogía, se refiere a aquello que es necesario, a lo que reside en el ámbito de la consciencia. Aunque algunos estudiantes pueden llegar a saber algo que tiene la calidad de necesario sin ser informados por algún medio externo, hay algunos profesores que de manera regular informan a los estudiantes acerca de lo que tiene calidad de necesario. Por ejemplo, un profesor puede enunciar el teorema de Pitágoras, con lo que el estudiante se halla ante una de dos posibilidades: aceptar que el teorema es verdadero porque confía en el profesor, o, trabajar para llegar a convencerse de la verdad del enunciado.

En el primer caso, se trata el teorema como si fuera algo arbitrario —'Le estoy contando esto y usted tiene que recordarlo'. Para describir una tal situación me refiero al 'saber aceptado' que los estudiantes reciben de su profesor. Incluyo en esta categoría el caso en que el profesor presenta una demostración. El teorema y su demostración permanecen en el ámbito de la memoria a menos que un estudiante pueda usar su propia consciencia para llegar a saber por qué el teorema es verdadero (si sólo se les presenta el enunciado del teorema) o por qué la 'demostración' prueba que el teorema es verdadero (si también se presenta una demostración).

El teorema de Pitágoras sólo halla su ubicación adecuada en el ámbito de la consciencia si un estudiante en particular usa su consciencia para convencerse de que tiene que ser verdadero. Al trabajar sobre lo que tiene calidad de necesario, lo importante es que la consciencia individual del estudiante se educa en lugar de reducir la situación a una cuestión de si el estudiante puede enunciar y usar un determinado teorema. Lo primero ayuda a lo segundo pero lo segundo no siempre ayuda a lo primero. Este artículo tiene que ver con la consideración de formas prácticas en las que un profesor puede usar y desarrollar la sensibilidad de los estudiantes para efectos de educar su consciencia.

IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA: EL ÁMBITO DE LA CONSCIENCIA

Lo que tiene calidad de necesario se puede conocer a través de la consciencia: un estudiante *no* tiene que ser informado sobre ello. Si se tiene como propósito reducir las demandas a la memoria, entonces se requiere que todo aquello que tiene calidad de necesario permanezca en el ámbito de la consciencia. Así que una razón para educar la consciencia es reducir las demandas a la memoria. Sin embargo, existe la razón positiva de que al educar la consciencia se educa al matemático que hay dentro del estudiante, lo que no ocurriría si se procediera de tal manera que todo tuviera que ser memorizado. La consciencia informa las decisiones y el modo de actuar a partir de la información conocida. La memoria solamente guarda alguna información, no la manera de usarla en una situación nueva (en una situación que no se ha memorizado).

Como anotó Bruner (1960) "el aprendizaje no sólo debería llevarnos a alguna parte; debería permitirnos avanzar posteriormente con mayor facilidad" (p. 17). Memorizar solamente nos lleva a alguna parte; es mediante la educación de la consciencia como podemos tener los medios para asumir las cosas posteriormente según nuestro propio criterio y no limitarnos a reproducir aquello que se nos ha dicho.

Claxton (1984) afirmó: "el mecanismo del aprendizaje no se alimenta mediante energía sino mediante consciencia" (p. 53) y también señaló: "no puedo aprender si no estoy atento o consciente del éxito o fracaso de mis acciones en algún nivel no necesariamente consciente" (p. 45). El hacerse consciente del éxito o fracaso de las acciones proporciona una oportunidad para educar la consciencia, lo que conduce a considerar esas acciones en el primer lugar.

Lo que tiene calidad de necesario se *puede* conocer a través de la consciencia. Esto no quiere decir que cualquiera sea capaz de conocer cualquier cosa que tenga la calidad de necesaria. Por ejemplo, mi hija de un año no puede conocer por el momento el teorema de Pitágoras a través de la consciencia. Sin embargo, hay muchos estudiantes de mayor edad que pueden hacerlo. Esta es la razón por la cual es importante que un profesor sea consciente de la consciencia de sus estudiantes y de las capacidades de ellos a las que puede recurrir (como la de abstraer) de manera que pueda juzgar qué propiedades son accesibles a cuáles estudiantes.

Según comentario de Bruner (1966), "la secuencia en la que un estudiante encuentra materiales dentro de un dominio de conocimiento afecta la dificultad que tendrá para lograr destreza" (p. 49).

En otras palabras, la posibilidad de acceso a una propiedad depende, para los estudiantes, del enfoque pedagógico elegido por el profesor con respecto a dicha propiedad. Por ejemplo, sólo hasta el nivel ‘A’ de matemáticas se considera accesible la fórmula $\frac{n!}{r_1!r_2! \quad r_k!}$ que corresponde al número de permutaciones de n objetos, entre los cuales hay k clases de objetos diferentes: r_1 de una clase, r_2 de otra clase, etc. Sin embargo, es perfectamente posible para un grupo de estudiantes de once años, de habilidades variadas, deducir esta fórmula, ayudados por el profesor solamente en la notación arbitraria.

Un enfoque que he adoptado en el pasado (véase Hewitt et al. (1992) para una descripción de la primera de una secuencia de clases que condujo al desarrollo de esta fórmula consiste en pedir a los estudiantes que exploren diferentes maneras en que se pueden disponer las letras del nombre de alguien, trabajando inicialmente con un nombre de cuatro letras diferentes y trabajando con la consciencia que surge con respecto a las maneras en que se pudiera estructurar esta tarea. Posteriormente se exploran nombres más largos y más cortos junto con nombres en los que haya letras repetidas. La fórmula provino de los estudiantes cuando expresaron la consciencia a la que habían llegado acerca de cómo estructurar el conteo de las permutaciones diferentes que obtenían en los diferentes escenarios.

¿Qué es la consciencia?

Gattegno (1987, p. 220) afirmó: ‘Sólo la consciencia es educable’. Esta afirmación provocadora ha suscitado mucha discusión (por ejemplo, véase Mason, 1987) y yo mismo me he encontrado examinando el significado de cada una de las palabras que la conforman. Según lo que conozco, en todo lo que escribió y en su extensa lista de seminarios que con frecuencia duraban varios días, Gattegno nunca definió el uso que hacía del término ‘consciencia’ y bien podría ser que al final de este artículo el lector pensara que yo hice lo mismo.

Personalmente creo que el uso que Gattegno y yo hacemos del término no difiere del uso cotidiano. Mientras me siento ante el computador para escribir este artículo, hay una serie de cosas de las que puedo decir que soy consciente. Por ejemplo, en el momento de digitar esta oración soy consciente de algunas de las letras del teclado ya que no soy un mecanógrafo y por tanto tengo que mirar algunas teclas mientras digito; también soy consciente de que no miro cada letra que tecleo pues conozco la posición relativa de ellas.

Estos dos ejemplos son de diferente naturaleza. El primero se refiere a una consciencia proveniente de la atención que pongo en mis sentidos —en este caso, en mi vista. Por supuesto, hay muchos fotones que inciden en mi retina y por tanto hay muchas cosas que estoy viendo en un cierto nivel; sin embargo, estaba consciente de ver sólo algunas letras al mismo tiempo que digitaba la oración. Por ejemplo, era consciente de mirar con frecuencia la letra ‘T’.

La consciencia a través de mis sentidos está guiada por el punto en el que decido centrar mi atención. Puedo llegar, por ejemplo, a ser consciente del dolor en mi espalda por un esfuerzo realizado el día anterior. Mi compañero con frecuencia se sorprende porque, por ejemplo, no puedo decir nada con relación al vestido que alguien usaba por la mañana. Eso tiene que ver con lo que centra mi atención mientras estoy en su compañía. Al mismo tiempo, la atención está guiada por la consciencia ya que al sostener una conversación acerca de un cierto estilo de pantalones me he encontrado observando a la gente que usa ese estilo de pantalón. Como Berger (1973) lo señaló: “sólo vemos lo que miramos. Mirar es un acto de elección” (p. 8). Luego hay aquí una situación como la del huevo y la gallina; hacia dónde dirija mi atención afecta aquello de lo que me hago consciente y aquello de lo que ya soy consciente afecta aquello en lo que centro mi atención.

Mi segunda observación con respecto al hecho de que fui consciente de no mirar cada letra que tecleaba y que conozco la posición de algunas letras en relación con la de otras, es un comentario que conduce a una consciencia de que la consciencia trabaja en varios niveles. En primer lugar, mi enunciado es un comentario de metanivel en el sentido de que no es algo que haya sido observado directamente por los sentidos, tal como llegar a ser consciente de ver la letra ‘T’. Es decir, es una consciencia que proviene del *análisis* más que de una *descripción* de cosas de las que fui consciente a través de mis sentidos.

Además, al considerar los movimientos cinestésicos de mis dedos fui consciente de que parecían tener una consciencia de hacia dónde debían hacer el siguiente movimiento mientras yo pensaba en el nivel de las oraciones o las ideas y por tanto mi atención no estaba en el teclado. Así que también tengo consciencia en un nivel inconsciente —con el movimiento de mis dedos. Aquí quiero hacer una distinción entre los automatismos que involucran consciencia en un nivel inconsciente y los hábitos que son comportamentales y para los que se requiere atraer la consciencia si se los quiere educar y cambiar. Por ejemplo, cuando tecleo, los movimientos de mis dedos están informados; no estoy haciendo uso de un hábito que me lleve siempre de una tecla a otra.

De modo que la consciencia está presente en el nivel de mis sentidos, en un metanivel a través de un análisis cognitivo consciente y también en el nivel de realización de procesos automatizados (que en algún momento del pasado requirieron una consciencia tanto al nivel de los sentidos como en el metanivel de análisis que les permitió llegar a ser automatizados).

En una conferencia de Consejeros de Matemáticas, Mike Askew relató algo que representó para mí un ejemplo de una consciencia que estaba siendo educada. Le presentaron a un niño dos montones de cuatro fichas y le preguntaron cuántas fichas había en total. Él respondió rápidamente: 'ocho'. Pareció que sabía la respuesta sin necesidad de contar. A continuación movieron una ficha de un montón al otro. Al preguntársele cuántas fichas había ahora en cada montón, las contó y dijo: 'ocho'. Movieron otra ficha de manera que uno de los montones quedó con dos y el otro con seis. Esa vez, él dijo: 'ocho' sin contar. Al mover otra ficha, el niño dijo: 'ocho, otra vez, ocho'. En este punto, comenzó a balancearse en su silla mordiendo su camisa. Mike reportó que el niño parecía muy inquieto.

Para mí, este relato encierra un ejemplo de consciencia en los diferentes niveles que he mencionado: la consciencia no consciente de que dos cuatros son ocho (previsto que pudiera, si se le exigiera, explicar por qué esto es así); la consciencia consciente implicada en el contar con precisión; y la consciencia de un metanivel de algo que permanece siendo lo mismo mientras que otras cosas cambian. El relato también me sugiere que la emoción puede provenir de ser consciente de que mi consciencia está siendo educada. La sensación de que soy una persona diferente, que tengo una forma diferente de mirar las cosas, que tengo una cantidad diferente de control sobre las cosas es muy emocionante y es resultado de la educación de mi consciencia. Creo que esta sensación de crecimiento personal es la forma más grande y efectiva de motivación en el salón de clase, y me temo que muchos estudiantes la experimentan de manera poco frecuente en sus clases de matemáticas.

EDUCACIÓN DE LA CONSCIENCIA

Educar la consciencia es algo que no puedo hacer por otra persona. Como profesor, lo más que puedo hacer es usar mi consciencia de la pedagogía, de la materia, y del estudiante para tomar decisiones pedagógicas acerca de lo que debo o no ofrecer. Es el estudiante quien debe educar su propia consciencia. A veces esto puede reforzarse con lo que un profesor ofrece, mientras que en otras ocasiones las ofertas bien intencionadas pueden no tener relación con la consciencia existente del estudiante y por tanto, como consecuencia, tiene lugar muy poca educación.

Por ejemplo, un profesor ofrecía una imagen de rectángulos sombreados como un intento de ayudar a los estudiantes a ver la equivalencia entre ciertas fracciones. Dio un ejemplo para $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ como se muestra en la Figura Nº 1.

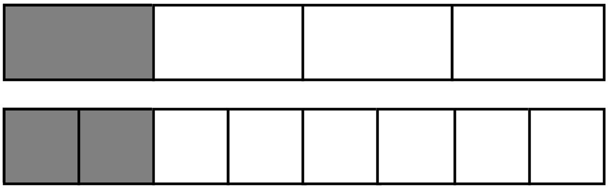

Figura Nº 1. El sombreado del profesor para $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

Se proporcionaron parejas de fracciones equivalentes y se pidió a los estudiantes dibujar un diagrama para mostrar por qué son equivalentes. La Figura Nº 2 y la Figura Nº 3 muestran ejemplos de los intentos de dos estudiantes para resolver la tarea en el caso de $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Figura Nº 2. Respuesta de una niña a $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Figura Nº 3. Respuesta de un niño a $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Estas respuestas parecen mostrar que los estudiantes tratan de dar sentido a la tarea de sombrear rectángulos. El relato que he creado para sus respuestas es que ambos estudiantes advirtieron la división en mitades de los rectángulos pequeños en el ejemplo del profesor y consideraron que esto era lo que debían hacer en su tarea. Tuvieron entonces maneras diferentes de darle sentido a la tarea. La niña sabía que las áreas sombreadas tenían que ser las mismas así que se aseguró de que eso se cumpliera. El niño sabía que el segundo rectángulo debía representar $\frac{3}{4}$, así que habiendo sombreado tres partes, sabía que debía quedar sólo una sin sombrear. Ambos aportaron a la tarea su propia consciencia particular de las fracciones, pero la tarea misma parece haber ayudado poco a la consciencia de los estudiantes acerca de las fracciones. En lugar de ello, el *sombreado de rectángulos* les pareció un tópico nuevo agregado al currículo de matemáticas más que un medio para hacer más accesible la equivalencia de fracciones. Así que mi primera consideración es observar el vínculo entre lo que el profesor ofrece y la consciencia del estudiante.

Uso la frase '*trabajo con la consciencia*' para describir un proceso en el que un profesor es consciente de las consciencias posibles de los estudiantes y toma decisiones pedagógicas relacionadas con ello. Así que aunque los profesores no pueden trabajar directamente con la consciencia de otros, pueden tomar decisiones que son sensibles y están relacionadas con tal consciencia. Para explorar más esto, considérese un ejemplo en el que se escribió lo siguiente en el tablero: $\frac{1}{4} = \frac{}{12}$ y se pidió a un grupo de alumnos de rendimiento bajo, de entre trece y catorce años, que dijeran lo que debía escribirse encima del doce. Un estudiante sugirió *dos* y el profesor respondió diciendo: 'no, porque esto sería $\frac{1}{6}$, ¿no es cierto?' Aquí la oferta por parte del profesor parece haber sido acerca de su propia consciencia de las matemáticas y no de su sensibilidad a la consciencia del estudiante. Si un estudiante cree que $\frac{2}{12}$ puede ser igual a $\frac{1}{4}$ entonces yo consideraría poco probable que él pudiera ver necesariamente que $\frac{2}{12}$ es lo mismo que $\frac{1}{6}$ y diferente de $\frac{1}{4}$.

¿Cómo podría trabajar yo con la consciencia del estudiante? Bueno, yo no sé cómo es su consciencia a partir de esta respuesta, de modo que tendría que realizar algún trabajo para tener alguna idea. Tal trabajo podría incluir la consideración de si la respuesta del estudiante pudiera ser un hábito adquirido a partir de preguntas anteriores (como las preguntas mencionadas antes que involucran una multiplicación por el factor dos), o pedir al estudiante que exprese algo más acerca de por qué cree que la respuesta es dos.

Formular preguntas no implica de manera inmediata que un profesor esté trabajando con la consciencia. Por ejemplo, '¿qué es un paralelogramo?', o, '¿dónde está el punto (1, 2)?' son preguntas que conciernen a asuntos arbitrarios y por tanto, más a la memoria que a la consciencia. Naturalmente todo apela a la consciencia en algún nivel; sin embargo, considero aquí situaciones en las que el profesor presiona la consciencia del estudiante acerca de cómo actuar y qué ofrecer en la clase.

De modo que preguntas tales como '¿qué es un cuarto de doscientos cuarenta?' conciernen a la consciencia; sin embargo, la consciencia se revela de manera poco frecuente en la respuesta de un estudiante y no es apropiado entonces describir que un profesor que formule tal pregunta esté trabajando con la consciencia. Algún cambio en la pregunta que modifique el enfocarse sobre una respuesta a enfocarse sobre un proceso —'¿cómo puedo obtener un cuarto a partir de doscientos cuarenta?'— da la posibilidad de que se revele la consciencia.

Preguntas tales como '¿por qué?' pueden ayudar a revelar aun más la consciencia de un estudiante. Después de todo alguien podría conocer una receta para realizar tal cálculo sin una consciencia de por qué tal proceso funciona. Mason (1994), formuló la pregunta: "¿cómo se puede distinguir entre el estudiante que comprende y el estudiante que ha dominado suficientes reglas para que la mayoría de sus respuestas sean correctas?" (p. 52).

Recuerdo mi charla con algunas muchachas que estaban a punto de recibir sus exámenes GCSE y, de hecho, iban a obtener una alta calificación en matemáticas. Ellas estaban trazando gráficas de líneas rectas y localizaban muy rápidamente tres puntos que unían con una recta. Les pregunté por qué localizaban tres puntos y me dijeron que dos bastaban, pero el tercero era una verificación de que todos estaban en una recta. Les pregunté cómo sabían que iba a obtenerse una recta. No estaban seguras con respecto a ello. De modo que observando una gráfica particular (Figura Nº 4) les pregunté si la recta terminaba en la parte superior de la página. Ellas pensaron en esto y respondieron que se podía prolongar. Entonces les pregunté si seguiría siendo una línea recta o si se doblaría en algún punto. Tomaron algún tiempo considerando esto y llegaron a la opinión de que la línea comenzaría a doblarse cuando se prolongara.

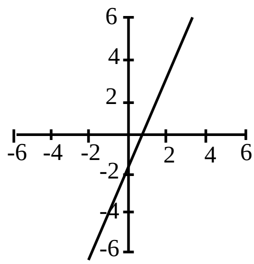

Figura Nº 4. ¿Cómo continúa esta gráfica de $y = 2x - 2$
más allá de la parte superior del dibujo?

Posteriormente formulé esta pregunta a estudiantes en otras ocasiones y con frecuencia obtuve respuestas similares. Invariablemente la dirección en que se doblaría la línea era consistente con la idea de, por ejemplo, un cordel de pescar curvándose bajo la gravedad en la dirección de la parte inferior de la página.

La primera parte del trabajo con la consciencia es tener una revelación de ella para poder trabajar con ella.

OPORTUNIDADES PARA TRABAJAR CON LA CONSCIENCIA

Las oportunidades para trabajar con la consciencia surgen a partir de la consciencia que revelan los estudiantes. Esto puede ocurrir en cualquier momento durante una clase a través de una contribución inesperada de un estudiante o puede ocurrir a través de una tarea planificada que se diseña para crear posibilidades de que los estudiantes revelen sus consciencias. Como mi preocupación es enseñar y aprender matemáticas, y no otra área, lo que me parece relevante es la consciencia de los estudiantes acerca de las *matemáticas*.

Esto puede parecer una declaración obvia; sin embargo, he estado en muchos salones de clase en los que la conversación gira principalmente alrededor de asuntos de control, administración o enunciados descriptivos no matemáticos. Como ejemplo de esto último recuerdo mi llegada a mitad de año a una escuela nueva como Jefe de Matemáticas y el encontrarme con estudiantes que hablaban del ‘libro azul 3’, o, de la ‘pregunta 5’, o, ‘estoy haciendo… [mencionan el título del capítulo]'. Encontré muy difícil obtener de ellos un comentario que tuviera que ver con su propia consciencia de las matemáticas en las que estaban trabajando (Hewitt, 1987).

Rara vez se revela la consciencia de las matemáticas si el estudiante está realizando una tarea rutinaria como la de reproducir un proceso una y otra vez mediante un ejercicio, especialmente si sus respuestas son correctas. Esto ocurre porque la consciencia es lo que guía las acciones y no es la acción misma. De modo que si alguien puede sumar con éxito dos fracciones esto me dice poco acerca de si está siguiendo un proceso mecánico descrito por un profesor (saber aceptado) o si puede articular razones por las que la respuesta es correcta y por qué el proceso conducirá inevitablemente a una respuesta correcta.

La consciencia no se revela a través de las acciones mismas sino a través de hacer explícito lo que guía esas acciones. Es esto lo que se requiere para formar la base de la conversación en el salón de clase. A menos que se haga esto, será muy poco lo que se revele de la consciencia matemática y por tanto, habrá pocas oportunidades de que un profesor trabaje con la consciencia que los estudiantes tienen de las matemáticas.

Un error de un estudiante ofrece al profesor una oportunidad de aprender algo acerca de la consciencia del estudiante; por ejemplo, se dibujó una forma en un papel cuadriculado y una niña estaba determinando el perímetro de esa forma mediante conteo y escribió números en la parte exterior de dicha forma (véase la Figura Nº 5).

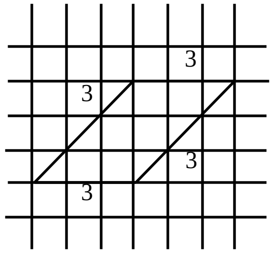

Figura Nº 5. Trabajo con el perímetro de una forma

Los cuatro treses son el resultado de su consciencia, de modo que un profesor no puede conocer sólo a partir de esta observación la consciencia que un estudiante tiene de longitud y perímetro. Sin embargo, un profesor tiene también consciencia no sólo de las matemáticas sino del aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes. Un profesor puede hacer uso de su propia consciencia para formular un juicio acerca de la consciencia del estudiante respecto a esta situación matemática.

Por ejemplo, sé de muchos estudiantes que consideran que la longitud de la diagonal de un cuadrado es la misma que la de un lado y entonces desarrollo así un 'relato' de lo que podría haber pasado con este estudiante alrededor de esta noción. Tengo otros relatos acerca de por qué esto podría ocurrir, tales como experiencias anteriores de tratar de dibujar formas tridimensionales en un papel cuadriculado (después de todo, ¿cómo va a dibujar alguien un cubo de $3 \times 3 \times 3$ en un papel cuadriculado?). Por ahora, estos son solamente relatos; sin embargo, mi experiencia como profesor y formador de profesores podría conducirme a percibir que ciertos relatos parecen correctos en tal situación (¡aunque queda abierta la posibilidad de que no lo sean!). Esos relatos informarán mi decisión acerca de cómo actuar como profesor con un estudiante, dado que quiero trabajar con su consciencia y no sólo con los resultados de su consciencia.

Las oportunidades para trabajar con la consciencia de un estudiante requieren que el profesor use su propia consciencia. En primer lugar, un profesor usa su consciencia de las matemáticas (e.g., para darse cuenta de un error) y en segundo lugar el profesor tiene que usar su consciencia de los asuntos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje y por supuesto del estudiante para trabajar con la consciencia de éste. Sin lo segundo, un profesor podría llegar a una respuesta tal como 'No; eso está mal, esas longitudes no son de tres. Usted debería usar el teorema de Pitágoras'.

Una respuesta como esa involucra solamente la consciencia del profesor con respecto a las *matemáticas*, y por tanto, este profesor estaría fallando en su trabajo con la consciencia del estudiante. El estudiante estaría entonces abandonado a su suerte bien para tratar de usar la consciencia que tiene para trabajar en el por qué de su error y en el por qué se requiere el teorema de Pitágoras (en lo que algunos estudiantes pueden tener éxito) o darse por vencido con respecto a esta tarea y simplemente seguir las instrucciones del profesor.

Hay muchos eventos inesperados que ocurren durante una clase que son oportunidades para que un profesor trabaje sobre la consciencia del estudiante. Algunos eventos son completamente inesperados como cuando una estudiante para profesor, alumna mía, preguntó a su clase qué fracción era lo mismo que 1.8 y obtuvo como respuestas, 'ocho punto uno' y 'uno y un octavo'. Ella no sabía qué hacer con esas respuestas y continuó preguntando a otros alumnos hasta obtener las respuestas deseadas: 'uno y ocho décimos', 'dieciocho décimos', 'uno y cuatro quintos', etc.

Se requiere un cambio de pensamiento por parte de un profesor para considerar las respuestas originales como oportunidades para trabajar con las consciencias de los estudiantes en lugar de verlas como respuestas inadecuadas que interrumpen el flujo de una lección planificada. Y son oportunidades efectivamente ya que tales errores son señales que le indican al profesor que hay algo sobre lo cual se requiere trabajar. Puede ser mucho más efectivo, en términos del aprendizaje de un estudiante, dedicar unos pocos minutos en ese momento a trabajar en aquello en lo que el estudiante ha mostrado necesitar atención, que dedicar más tiempo a cumplir el currículo planificado por el profesor (o el Departamento de Matemáticas, o incluso, el Estado o el país).

El trabajo con la consciencia puede significar sacar ventaja de estas oportunidades cuando se presentan y estar preparado para mantener la continuidad de la clase según lo planificado. En efecto, al planificar las clases se puede tener en cuenta la posibilidad de tales oportunidades. En realidad se podría esperar la ocurrencia de algunos errores y se pueden prever las respuestas. Por ejemplo, una tarea[3] que yo diseñé en los comienzos de mi carrera incluía trabajo en grupo de los estudiantes comparando áreas de formas en retículas diferentes. Advertí que muchos estudiantes supusieron que dos triángulos equiláteros que forman un rombo en la retícula triangular tienen la misma área que un cuadrado en la retícula de cuadrados (véase la Figura Nº 6).

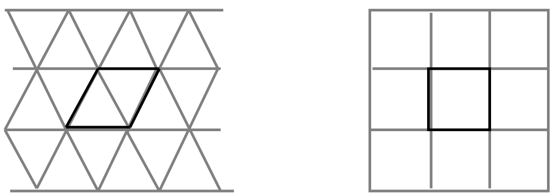

Figura Nº 6. ¿Son de la misma área?

Al darme cuenta de que esto ocurría, consideré cuidadosamente lo que podría ofrecer en el futuro siempre y cuando ocurriera de nuevo. Dispondría cuatro tiras articuladas entre sí, para formar un rombo. Después de establecer que las tiras tienen la misma longitud, les pediría que observaran el área encerrada por el rombo formado habiéndolas dispuesto antes como un cuadrado. Luego les pediría que observaran el área mientras se cambia gradualmente la forma del rombo (véase la Figura Nº 7). Hecho esto, me di cuenta de que no necesitaba decir algo más de lo que los estudiantes hubieran visto a través de su propia consciencia en relación con el hecho de que el área cambiaba y se hacía menor. Esto fue suficiente para que ellos consideraran

3. *Greatest and Smallest*, parte del paquete *Area and Perimeter* que fue desarrollado a través de *Resources for Learning Development Unit* (RLDU) en Bristol, disponible ahora en la *Association of Teachers of Mathematics*, 7 Shaftesbury Street, Derby DE23 8YB, U.K.

de nuevo la manera en que podían enfocar la tarea de comparar las áreas en las diferentes retículas.

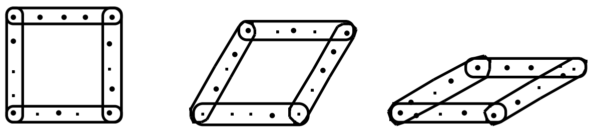

Figura Nº 7. Área cambiante

Este es un ejemplo de una preparación previa correspondiente a una concepción errada particular que es muy probable que ocurra en una clase. En otras ocasiones se puede planear una clase no tanto para una concepción errada particular sino para revelar las consciencias de los estudiantes en relación con un determinado tópico. La planeación de una tal clase incluye cómo lograr que los estudiantes revelen sus consciencias alrededor de cierto tópico, del mismo modo que consideran cómo trabajar con ellas.

Un ejemplo tiene que ver con las fracciones. Dibujo en el tablero una línea recta con 0 en uno de los extremos y 1 en el otro. Escribo en el tablero una fracción, $\frac{1}{2}$, y digamos que voy a apuntar con mi regla métrica en 0 y comienzo a moverla hacia 1. Pido a un voluntario que diga ‘pare’ cuando estoy apuntando a donde la fracción escrita está sobre la línea. Mientras muevo mi regla, deliberadamente no miro al tablero y paro en el momento en el que oigo la palabra ‘pare’ dicha por el estudiante. Entonces cuidadosamente mantengo la regla donde paré y marco $\frac{1}{2}$ en esa posición. Escribo otra fracción en el tablero y repito la tarea.

Puedo variar la rapidez a la que mi regla se desplaza a lo largo de la línea ya que quiero que haya errores. Nunca permito a nadie tener una segunda oportunidad y nunca tengo en cuenta las quejas de los estudiantes, diciendo que yo no hago lo que dije que haría. En esta etapa no me preocupa lo que esté bien o mal. Después de un rato puedo tener varias fracciones marcadas sobre la línea numérica, muchas de ellas en posiciones incorrectas (véase la Figura Nº 8).

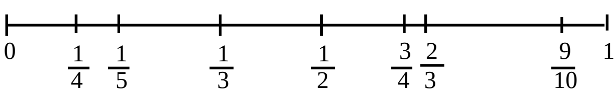

Figura Nº 8. Una posible línea numérica de fracciones

A estas alturas hay usualmente muchos estudiantes que quieren decir que algunas de estas fracciones no son correctas, y yo le pido a alguno que me diga si hay alguna fracción que le gustaría mover. Invito a esta persona a pasar para que diga qué fracción debería moverse y a qué punto. Le pido explicar por qué cree que debería moverse allí y de hecho promuevo una discusión con respecto a las razones por las cuales los alumnos están de acuerdo o no con la nueva posición. La planificación de esta lección está centrada alrededor de la revelación de las consciencias que los estudiantes tienen de las fracciones y del comienzo del trabajo sobre tales consciencias. Se ha planeado así lo inesperado y en realidad es lo central en la planeación de esta lección. De hecho la lección no sería tan exitosa si los estudiantes encontraran que todo está 'bien'.

Surgen oportunidades para trabajar con la consciencia cuando un profesor advierte tanto los errores que cometen los estudiantes como lo que ellos *pueden* hacer; por ejemplo, el advertir que algún alumno pequeño (o incluso mayor) puede duplicar números, puede llevar al profesor a considerar cómo podría pedirle que use esta habilidad para trabajar en un nuevo reto. En este caso la habilidad para duplicar números puede conducirlo a trabajar sobre tablas de cuadruplicar y octuplicar a través de duplicación sucesiva. La consciencia empleada aquí es que algo que se hace una vez se puede repetir una y otra vez. Cuando se aplica esta consciencia a la habilidad de duplicar se puede ganar una nueva consciencia de que tal iteración puede conducir a un método para hallar tablas para cuadruplicar u octuplicar (e incluso multiplicar por dieciséis, etc.).

Esta consciencia de repetir algo no es nueva para los estudiantes. En realidad han empleado tal proceso desde que eran muy pequeños. El aprender a caminar involucra repetición —no solamente puedo dar un paso sino que puedo hacerlo de nuevo y de nuevo y esto se convierte en caminar. El escuchar cómo los pequeños aprenden a hablar incluye que ellos repitan con frecuencia sílabas —dada, mama, etc. Así como el estudiante tiene consciencia acerca del contenido matemático también la tiene como consecuencia del aprendizaje que ha realizado ya como ser humano. Algunos de estos aprendizajes tales como repetición, orden e inversión están disponibles para que el profesor trabaje con ellos y son aplicables al aprendizaje de las matemáticas por parte del estudiante.

Para resumir esta sección, las oportunidades para trabajar sobre la consciencia requieren que los estudiantes revelen su propia consciencia de las matemáticas. Esto puede ocurrir inesperadamente como consecuencia de darse cuenta de errores o de ver oportunidades de extender algo que un estudiante puede hacer correctamente. Tales observaciones pueden conducir a un profesor a preparar acciones futuras siempre y cuando tales concepciones erradas se repitan o se revelen éxitos particulares. Las clases se pueden planificar también con una tarea diseñada apropiadamente que tenga posibilidad de dar resultados en cuanto a revelar la consciencia que los estudiantes tienen de un área particular de las matemáticas.

TRABAJO CON LA CONSCIENCIA

Como se mencionó antes, un profesor no puede manipular directamente la consciencia de un estudiante ni proporcionársela. Es el trabajo del estudiante el que educa su propia consciencia. Sin embargo, un profesor puede mostrar sensibilidad al hecho de que el aprendizaje de las matemáticas de un estudiante tiene que ver con el trabajo que realice sobre su propia consciencia y así un profesor puede usar técnicas que ayuden al estudiante a llevar a cabo este trabajo. Comentaré aquí tres de tales técnicas:

- ayudar a los estudiantes a ver las consecuencias de sus acciones/ decisiones,
- dirigir la atención,
- forzar la consciencia.

Ver las consecuencias de las acciones/decisiones

Si un profesor advierte que un estudiante está desarrollando incorrectamente un proceso matemático, una opción es tratar de ayudarle a hacerse consciente de ello ya que bien puede ocurrir que el estudiante considere que lo que está haciendo es correcto. Por ejemplo, una concepción errada común de los estudiantes es sumar fracciones de manera similar a como las multiplican:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Si un profesor pide a los estudiantes que sumen $1/2 + 1/2$ usando su algoritmo se obtendrá el siguiente resultado:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}.$$

Invariablemente se da el caso de que el estudiante sabe que dos mitades dan uno y por tanto se confunde con este resultado. Con frecuencia esto basta para que el alumno se dé cuenta de que el algoritmo usado es incorrecto. Este ejemplo proporcionado por el profesor pone en juego efectivamente la consciencia del estudiante mientras que anteriormente el estudiante estaba usando su memoria empleando una mezcla de dos procesos memorizados parcialmente (adición y multiplicación de fracciones). En este caso el profesor no trata de ofrecer al estudiante un saber aceptado sino que en lugar de esto le ofrece un ejemplo cuidadosamente escogido.

La noción de ver las consecuencias de nuestras acciones es una técnica que todos hemos empleado dentro de nuestro propio aprendizaje en la vida diaria. Como escritor yo he llegado a ser algo diestro en lanzar mis papeles de borrador al cesto de la basura situado a alguna distancia de donde estoy. Mi destreza se ha desarrollado mediante el lanzamiento del papel con una cierta rapidez y un cierto ángulo y luego observar dónde cae. Sólo al mirar las consecuencias de mis acciones puedo informarme de cómo cambiar la rapidez o el ángulo en mi siguiente intento.

Con respecto al aprendizaje de las matemáticas Mandler (1989, p. 13) comentaba:

> […] debemos tener en cuenta que con frecuencia la gente se compromete en acciones que cree correctas (i.e., proceden como se lo proponen pero las acciones en realidad son falsas, incorrectas, ilógicas, etc.). En el caso de los errores no intencionales, la discrepancia surge porque no hay una correspondencia entre lo que se pretende y lo que ocurre; en otros casos, no corresponde un resultado esperado ("yo creía haber hecho lo que resolvería el problema") con la respuesta del mundo real ("no funcionó").

Si la realimentación obtenida al lanzar mi pedazo de papel hubiera sido solamente si cae o no cae en la canasta, esto me daría muy poca información sobre *cómo* podría cambiar mi lanzamiento la próxima vez, aunque hubiera podido experimentar una falta de correspondencia con respecto a mi resultado esperado de que cayera en la cesta. Supóngase que un estudiante trabaja en el problema siguiente: 23 + ? = 71 y escribe 23 + 58 = 71. Una respuesta del tipo 'no, eso está mal' proporcionaría poca información para que el estudiante trabajara en su siguiente intento. En lugar de esto, si la realimentación consistiera en proporcionar las consecuencias matemáticas de sumar 23 y 58 diciendo: 'para mí 23 y 58 suman 81', entonces el estudiante podría darse cuenta de que su respuesta es incorrecta pero además la realimentación le ayudaría a emplear su consciencia al considerar cuál debería ser su siguiente respuesta a esta pregunta.

La naturaleza de las matemáticas es tal que un estudiante no siempre tiene la consciencia necesaria para ver por sí mismo las consecuencias de lo que está haciendo. Por tanto, este es un papel útil que un profesor puede jugar mediante la realimentación de las consecuencias. También un *software* de computador puede jugar dicho papel si se diseña de manera que la naturaleza de la realimentación prevista corresponda a las consecuencias de acciones/decisiones en lugar de una realimentación sí/no o correcto/errado.

Según comentaba Ainley (1997) “[…] la imagen de la pantalla se puede usar directamente para ver qué tan exitosas son las instrucciones que se han dado” (p. 93). El programa Logo es un ejemplo de un software que hace esto. Los alumnos pueden intentar el dibujo de un triángulo equilátero digitando lo siguiente:

Forward 100
Right 60
Forward 100
Right 60
Forward 100
Right 60

La realimentación proporcionada por el Logo es la consecuencia geométrica de estas instrucciones (véase la Figura Nº 9).

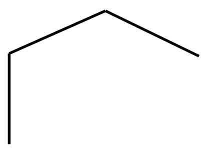

Figura Nº 9. Intento de dibujar un triángulo equilátero

Hay veces en que la realimentación de las consecuencias de acciones/decisiones es relativamente inmediata y se puede efectivamente escribir en software. En otras ocasiones no es claro cómo puedan revelarse tales consecuencias. Por ejemplo, yo hablaba con un adulto sobre la imagen de un punto que se mueve alrededor de una circunferencia y cómo esto se puede usar para introducir la trigonometría. Yo describía la imagen de un punto que se mueve sobre una circunferencia en el sentido contrario al del reloj y le pedía que se fijara en la altura del punto. Yo decía que el punto siempre parte del extremo derecho de la circunferencia en donde la altura es 0. Cuando el punto se mueve alrededor, la altura más alta está en 1 y la más baja está en -1.

Al preguntarle qué ángulo describe el punto desde su posición inicial hasta alcanzar la altura de 0.5, él contestó que 45 grados. Lo que me concernía como profesor era cómo podría mostrarle las consecuencias de su respuesta de modo que pudiera darse cuenta por sí mismo de que 45 grados no podía ser la respuesta correcta. Una respuesta posible de mi parte, del mismo tipo a la proporcionada en el ejemplo numérico anterior, habría sido decir:

'la altura a 45 grados es aproximadamente 0.707'. Sin embargo, a diferencia del ejemplo numérico, yo no podía imaginar cómo él podría usar su consciencia para ver por qué la altura debería ser ésta y no 0.5.

Entonces, si yo quería seguir trabajando con la consciencia, era necesario considerar una oferta diferente. Finalmente, le pedí imaginar el triángulo formado por el radio correspondiente a la posición del punto, el diámetro horizontal y la vertical desde el punto hasta la horizontal. Al preguntarle acerca de los ángulos y la longitud de los lados dijo que eran 45, 90 y 45 grados y que la longitud de los lados era 1 (el radio —esto había resultado antes), la altura 0.5 (como yo había preguntado) y la horizontal era 0.5. Entonces le di cuatro fósforos diciéndole que cada uno tenía longitud 0.5 y le pedí que construyera ese triángulo (véase la Figura Nº 10).

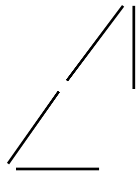

Figura Nº 10. Intento de construir con fósforos un triángulo rectángulo de lados 1, 0.5 y 0.5

Después de un rato él comentó que tal triángulo no era posible. Yo lo presioné más y dijo que sabemos que el radio es de longitud 1 y que la altura debe ser 0.5, así que podía asegurar que esto era así. Él se encontró empujando el radio en el sentido del reloj y mientras lo hacía estableció que el ángulo debe ser menor de 45 grados (véase la Figura Nº 11).

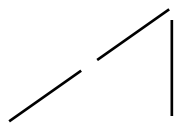

Figura Nº 11. Modificación del triángulo

La tarea que introduje fue el resultado de consideraciones pedagógicas y no una realimentación mecánica que hubiera podido hacerse de manera fácil mediante un programa de computador. Este es otro ejemplo de cómo la consciencia pedagógica de un profesor, lo mismo que la consciencia matemática, juega un papel crucial cuando se trabaja con la consciencia de un estudiante.

Dirigir la atención

Hace poco, durante un día festivo, paseábamos con mi esposa y mi hija de un año. La madre y yo señalamos hacia unos pájaros y dijimos, ‘mira, un pájaro’. Hacia el final del día percibí un gruñido, proveniente del asiento trasero, en el que se hallaba mi hija en su silla especial y ella señalaba hacia el cielo mostrando un pájaro que se podía observar desde allí. Llamar la atención hacia algo puede ser una herramienta para un maestro y son decisiones pedagógicas cuándo hacerlo y de qué tipo de atención se trata.

Durante una clase observé a un profesor dirigiendo diestramente la atención, al parecer de manera simple y sin esfuerzo, aunque de manera muy efectiva. Los estudiantes trabajaban en el tema de hallar el volumen máximo de una caja abierta que se puede construir a partir de una hoja de papel de la cual se cortan cuadrados en las esquinas. Trabajaban en grupos y disponían cubos en sus cajas para determinar los volúmenes. Esto estaba tomando algún tiempo y el profesor intervino preguntando: ‘¿qué observan ustedes cuando los cubos van de esa manera?’. Un estudiante respondió: ‘van en líneas’. Entonces el profesor continuó desarrollando la idea de contar cuántas líneas había.

En este caso, dirigir la atención hacia las líneas (o hileras) —de las cuales los alumnos ya eran conscientes— no solamente les ayudó a hallar el volumen más rápidamente, sino que comenzó a desarrollar algún tipo de matemáticas sobre el cálculo de volúmenes. Otro grupo preguntó al profesor acerca del área de la superficie. El profesor tomó una hoja de papel de tamaño A4 y preguntó: ‘¿Cómo podrían ustedes hallar el área superficial de este pedazo de papel?’. Un estudiante respondió: ‘largo por ancho’. Entonces el profesor tomó pedazos de papel para formar los lados de una caja y preguntó acerca del área superficial de la caja. Esto mostró una consciencia pedagógica consistente en hallar algo que los estudiantes ya sabían y relacionarlo con la situación presente en la que ellos no estaban completamente seguros.

Rousseau (1762/1986) hacia mediados del siglo dieciocho dio un ejemplo de esta técnica:

> Si alguien no sabe lo que pasa con el sol desde el lugar en donde se oculta hasta el lugar en donde sale, por lo menos sabe cómo se desplaza desde el amanecer hasta el ocaso; sus ojos le enseñan esto. Use la segunda pregunta para arrojar luz sobre la primera. (p.132)

La Figura Nº 12 representa este proceso desde la perspectiva de un profesor.

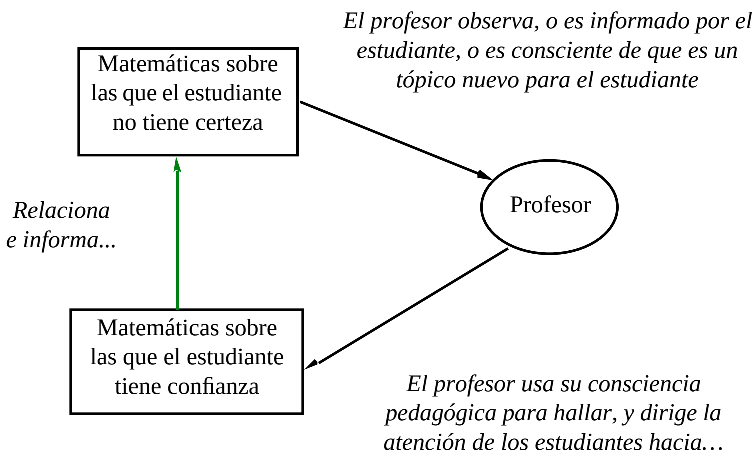

Figura Nº 12. Una forma de dirigir la atención

Dirigir la atención es también una técnica para enfatizar en ciertas cosas y dejar de lado otras. En relación con el logro de la meta de *usar y aplicar las matemáticas* que plantea el currículo oficial del Reino Unido y en la preparación para los elementos del curso GCSE, una tarea común para los estudiantes consiste en 'investigar' una situación y tratar de hallar una regla general relacionada con tal situación. Se estimula a los estudiantes para que realicen un proceso de ensayo de casos diferentes —desde el más simple— y consignen los resultados en una tabla. Si, por ejemplo, consideramos el número de saludos de mano de cierto número de personas que se reunen y cada una saluda de mano a todas las demás, los estudiantes podrían realizar una tabla como la de la Figura Nº 13.

Número de personas	Número de saludos de mano
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

Figura Nº 13. Una manera común de registrar el problema de los saludos de mano

Un problema que he encontrado con este enfoque es que la manera en que los números aparecen en la tabla estimula a los estudiantes a enfatizar las conexiones entre una línea y la siguiente. Así, un estudiante podría darse cuenta de que para pasar de una línea a la siguiente, se suma el número de personas de esa fila. Esta es una regla general, ¡pero no es la regla tras de la cual van los profesores y examinadores! Para combatir esto, algunas hojas de trabajo preparadas por el profesor, o incluidas en los textos o en las hojas de examen están elaboradas como aparece en la Figura Nº 14.

Número de personas	**Número de saludos de mano**
1	
2	
3	
4	
10	
n	

Figura Nº 14. Un intento para animar a los estudiantes a hallar la regla que el profesor quiere que hallen

Sin embargo, es frecuente que el patrón se detecte en los primeros casos y que los estudiantes continúen aplicándolo para seis, siete, ocho y nueve personas, con lo que llegan a la respuesta correcta para diez. Algunos estudiantes se bloquean, entonces, cuando consideran el caso de *n* personas.

Afirmo que una de las consecuencias de que los resultados se pongan en orden numérico en la tabla es que se llama la atención de los estudiantes hacia una regla que va de un caso al siguiente, en lugar de buscar la generalidad *dentro* de la manera de contar los saludos de mano. He criticado tal uso de tablas y la transferencia entre la consideración de un problema matemático y uno que se vuelve tarea de descubrir un patrón numérico donde quiera que esté (Hewitt, 1992); pero aquí quiero considerar cómo puede dirigirse la atención de los estudiantes como consecuencia de la presentación de los resultados en una tabla.

Si de manera deliberada se consignan resultados no consecutivos en una tabla preparada de antemano (véase la Figura Nº 15 —que tiene los resultados consignados para que sea claro lo que se pretende) entonces la atención se aparta inmediatamente de la conexión obvia *hacia abajo* de la tabla y se ponen en consideración los resultados *a través* de la tabla.

Número de personas	**Número de saludos de mano**
12	66
4	6
7	21
5	10
10	45

Figura Nº 15. Una colección y disposición alternativas de resultados

La disposición de los resultados en una tabla puede dirigir la atención hacia ciertos aspectos de ella. Si se da valor educativo al hallazgo, por parte de los estudiantes, de una regla a través de la tabla, entonces no entiendo por qué se proporciona a los estudiantes una tabla preparada de antemano, que estimula su atención en otro sentido.

Forzar la consciencia

La frase 'forzar la consciencia' es útil para mí. Proviene de Gattegno (1987) quien indicaba que "Forzar la consciencia no implica violencia hacia una persona. Por el contrario, una vez iluminada de cierta manera, la consciencia se convierte en una fuente de iluminación para uno" (p. 219). El acto de forzar la consciencia es una actividad individual interna que un estudiante realiza, pero que se logra más fácilmente a través de los esfuerzos de un profesor. Un poco antes en el mismo libro, Gattegno expresó: "[…] no hay otra manera de forzar la consciencia que hacer que una persona haga uso de aquello que es capaz de forzar la autoconsciencia individual" (p. 214). El uso de la palabra 'forzar' me indica que el aprendizaje que tiene lugar es, con frecuencia, más rápido y seguro que lo que ocurre normalmente en las clases, o que lo que se aprende se considera inusualmente avanzado para los estudiantes, comparado con las expectativas comunes para su edad y logros. Gattegno observó también:

> Pero cuando entramos en las vidas de otras personas, podemos hallar algo que hacer que haga que lo ordinario tome el aspecto de lo extraordinario. Podemos forzar la consciencia más allá de lo que las circunstancias le presentan a uno. (p. 213)

Daré un ejemplo detallado de cómo forzar la consciencia y haré referencia a un segundo ejemplo. Un factor significativo en estos ejemplos es que se trabaja con los estudiantes para que puedan ser más capaces de educar su propia consciencia de las matemáticas involucradas que si trabajaran por su cuenta. No es el profesor quien explica; son los estudiantes quienes lo hacen si es necesario. El profesor trabaja con la consciencia que los estudiantes tienen de las matemáticas en lugar de expresar su propia consciencia de ellas.

Otra característica general es que los estudiantes no saben necesariamente hacia dónde los conducen las preguntas que se les formulan. Esto puede ir en contravía de lo que los inspectores de Ofsted (la oficina del Reino Unido para los Estándares en educación) consideran como 'buena práctica', pues se espera que un profesor bosqueje los objetivos de una clase al comienzo de ella. Sin embargo, considero un factor significativo que los estudiantes se involucren con las preguntas que se les formulan en un momento particular, en lugar de preocuparse por el objetivo al que ellas tienden. De hecho, algunos estudiantes podrían tener una reacción inicial negativa si se les dijera que el objetivo de la clase es dividir fracciones o resolver ecuaciones lineales complicadas en las que aparecen extrañas letras griegas.

Tristemente, he asistido a muchas clases en las que he observado la reacción negativa que muchos estudiantes tienen cuando aparece en el tablero un título como *Fracciones* o *Álgebra*. Es común escuchar respuestas del tipo 'Pero yo no puedo trabajar con fracciones/álgebra'. La clase comienza entonces con una actitud mental negativa por parte de los estudiantes y con una sensación de que no van a entender lo que se trate en la clase. A diferencia de esto, forzar la consciencia tiene como característica comenzar con preguntas/tareas que a la mayor parte, si no a todos los estudiantes, les parecen realizables y las preguntas se desarrollan gradualmente hacia áreas más avanzadas o de mayor reto.

Estos pasos sólo los da el profesor, en caso de que perciba que hay un mayor desarrollo de la consciencia, ya que tal desarrollo respalda el trabajo posterior al tiempo que las preguntas continúan. Así que, en algún momento se da el caso de que algunos estudiantes (yo nunca digo que *todos*, aunque algunas veces esto es cierto para todos) hallan accesible la respuesta a una pregunta dada, mediante la consciencia que ya han desarrollado.

Se me ocurre, mientras escribo, una metáfora, relacionada con el hecho de que en ocasiones tengo que hablar con personas que están arreglando el tejado de mi casa y me encuentro parado a una altura para la cual normalmente no me siento seguro. Mientras subía la escalera, yo era consciente de que solamente debía preocuparme por avanzar al peldaño siguiente. Luego, para mi sorpresa, me encontré en el techo de mi casa —algo que nunca pensé que sería capaz de hacer, sin un ataque de pánico.

De manera similar, se invita a los estudiantes a preocuparse solamente por la pregunta que se les presenta; al final de la clase podrían sorprenderse del logro alcanzado. A veces he sabido de estudiantes muy emocionados cuando al final de la clase se detienen para tomar aliento y reflexionan sobre lo que han estado haciendo. Vygotsky (1978) decía: “el único ‘aprendizaje bueno’ es aquel que se adelanta al desarrollo” (p. 89). Esto es lo que trata de lograr el acto de forzar la consciencia. También es lo que caracteriza a la manera como parece que los niños pequeños aprenden. He sabido por muchos padres y por mi propia experiencia como padre, que los niños siempre tratan de hacer cosas que parecen estar más allá de su nivel de destreza.

La habilidad de un profesor está en hallar una ruta en la que sea realmente posible que los estudiantes logren algo que a primera vista no parezca posible, dado su nivel de destreza en matemáticas. Si esta ruta consiste en forzar la consciencia, será una jornada que solamente hace un llamado a la consciencia de los estudiantes y no involucra explicaciones por parte del profesor (saber aceptado). Yo puedo, por ejemplo, ‘explicar’ el cálculo a un niño de cinco años, sin preocuparme por lo que el niño haga con mi explicación. Al forzar la consciencia, es el aprendizaje lo que precede al desarrollo, no las explicaciones.

El primer ejemplo, al que me refiero brevemente aquí, pues lo he desarrollado de manera más completa en otro artículo (Hewitt, 1996), se refiere a una manera de enfocar la introducción de la notación algebraica y la resolución de ecuaciones lineales. Este enfoque, del cual puede verse el comienzo en una cinta de video de Open University (OU, 1991), puede dar resultado en un grupo de alumnos de once años, heterogéneo en habilidades, que resuelven ecuaciones lineales ligeramente complicadas (como la que se muestra a continuación) después de sólo tres horas de trabajo. La mayoría de los estudiantes, si no todos, serán capaces de resolver algebraicamente con respecto a p, x, β, μ, escribir soluciones en una línea de trabajo en correcta notación algebraica y resolver numéricamente las ecuaciones si se les proporcionan los valores para las otras incógnitas.

$$\frac{p\left[\frac{2\,(x-3)\;+\beta}{7}+\mu\right]-4.3}{31}+2\;=\;100$$

Todo esto proviene de una línea de cuestionamientos que ayuda a los estudiantes a articular la manera en que se pueden aplicar los inversos. Lo único de lo que los estudiantes reciben información por parte del profesor, es lo concerniente a la notación —el cómo se escriben las cosas. Aun en este caso, esto se proporciona en forma escrita sin descripción o explicación verbal alguna.

El segundo ejemplo que doy aquí en detalle se refiere a la división de fracciones. He pedido a veces a estudiantes de matemáticas de nivel graduado que se presentan a entrevista del curso PGCE, que me digan a qué es igual $3/8 \div 2/5$. Les doy papel y lápiz y ellos escriben:

$$\frac{3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{8 \times 2} = \frac{15}{16}$$

Les he preguntado entonces, por qué invierten la segunda fracción y por qué multiplican, si se les pidió dividir. Por qué, por ejemplo, no invierten la primera fracción y luego suman. Con pocas excepciones, estos estudiantes de nivel graduado fueron incapaces de dar explicación alguna de lo que hicieron; solamente dijeron que así se lo habían dicho en la escuela. La cuestión entonces, es si es posible que los estudiantes eduquen su propia consciencia hasta el punto de saber cómo dividir fracciones y que este conocimiento esté basado en su propia consciencia. También cabe preguntarse si es posible que un profesor halle una ruta a través de la cual se pueda forzar esta consciencia.

La serie de preguntas que siguen da un cierto sabor para tal ruta. En caso de no hacerlo, al menos muestra la sensibilidad que se requiere al trabajar con estudiantes, tal como decidir cuándo formular la pregunta siguiente, cuándo proceder con una nueva línea de cuestionamiento, a quién formular cada pregunta, si cada pregunta se formula a solamente un estudiante o a más de uno, si se pide a los estudiantes que expliquen por qué su respuesta es correcta, cuántos ejemplos de cierta clase de pregunta formular, si se requiere algún tipo de ‘desviación’ de una línea particular de cuestionamiento y cómo debería ser. Todas estas son consideraciones vitales que afectarán la educación de las consciencias de los estudiantes o harán que terminen sintiéndose frustrados y confusos.

Invito al lector a considerar la línea de cuestionamiento que presento a continuación y a determinar si ve:

1) a qué consciencia se está apelando en un momento particular;
2) qué consciencia podría desarrollarse/educarse al tiempo que se desarrollan las preguntas y por tanto está disponible para apelar a ella mientras continúa el cuestionamiento.

Dejo al lector la consideración de la manera en que él enfocaría lo que he mencionado, cuando trabaja con un grupo en particular. Hago esto, no para evadir estos asuntos, sino para reconocer que tales decisiones deben tomarse en el momento, con sensibilidad hacia los individuos de un grupo de estudiantes.

Las siguientes notas indican algunas características significativas en el cuestionamiento:

a. Los tres puntos (...) representan una continuación del cuestionamiento a lo largo de líneas similares. El número de preguntas y su contenido exacto será decisión del profesor, basado en la evaluación del desarrollo de la consciencia de los estudiantes.

b. Los asteriscos (***) indican una generalización potencial que puede haber sido establecida para los estudiantes a través de la serie de preguntas que preceden. Uso una palabra deliberadamente tonta, en este caso *goterol* (*flinkerty-floo*, en el original), para representar un número general *antes* de usar símbolos tales como *x* o *n*, etc. Esto es, en parte, porque en esta etapa las preguntas y las respuestas tienden a convertirse en un juego de palabras. Esto, según mi concepto, es un indicador de que los alumnos están haciéndose más conscientes de una generalidad. Es usual que en este punto las preguntas lleguen con mucha rapidez y los estudiantes respondan en coro.

c. Las respuestas a las preguntas formuladas pueden requerir que los estudiantes hagan algún cálculo. Como regla general, sugiero que el profesor pida a los estudiantes que no hagan aritmética alguna, sino que expresen qué aritmética necesitarían para la respuesta. Esto hará más explícita la generalización que si se realizaran los cálculos. Un profesor puede necesitar, por tanto, trabajar con los estudiantes durante esta actividad. Por ejemplo, al preguntar '¿Cuántas mitades hay en cinco?', un estudiante que responda 'diez' puede ser cuestionado después por el profesor para que vuelva a expresar su respuesta en la forma 'dos veces cinco'. Un corolario para esto es que hay relativamente poca demanda de fluencia aritmética para participar con éxito en esta tarea.

d. La notación para lo que los estudiantes han expresado en palabras, puede ser proporcionada por el profesor, como y cuando le parezca apropiado. Esto puede ser proporcionado, ya que es arbitrario y proporciona solamente una manera convencional de escribir lo que los estudiantes han expresado ya. Obsérvese que las expresiones que escribo a continuación son para el lector y no necesariamente una sugerencia de notación que deba proporcionarse a los estudiantes.

e. Yo esperaría que las preguntas de la lista fueran analizadas y se dedicara algún tiempo a reflexionar sobre ellas y a revisarlas conscientemente. En otros momentos, esperaría que el flujo de las preguntas fuera muy rápido, cuando conduce a una generalidad, como se mencionó antes. Podría darse el caso de que esta tarea requiera más de una clase, aunque es posible lograr la generalización final dentro de una clase de una hora.

¿Cuántas mitades hay en uno?

¿Cuántos cuartos hay en uno?

¿Cuántos décimos hay en uno?

¿Cuántos tercios hay en uno?

...

¿Cuántos veinticuatroavos hay en uno?

¿Cuántos doscientos cuarenta y nueveavos hay en uno?

¿Cuántos cinco millones ochocientos seisavos hay en uno?

...

¿Cuántos goterolavos hay en uno?

¿Cuántos *n*-avos hay en uno?

*** $1 \div \frac{1}{n} = n$ ***

¿Cuántas mitades hay en uno?

¿Cuántas mitades hay en dos?

¿Cuántas mitades hay en cinco?

...

¿Cuántas mitades hay en novecientos cincuenta y dos?

¿Cuántas mitades hay en veinte trillones, cinco millones siete?

¿Cuántas mitades hay en goterol?

¿Cuántas mitades hay en *x*?

*** $x \div \frac{1}{2} = x \times 2$ ***

¿Cuántos cuartos hay en uno?

¿Cuántos cuartos hay en dos?

¿Cuántos cuartos hay en ocho?

...

¿Cuántos cuartos hay en veintisiete?

...

¿Cuántos décimos hay en uno?
¿Cuántos décimos hay en catorce?
¿Cuántos décimos hay en dos mil cincuenta y uno?
...

¿Cuántos dieciseisavos hay en uno?
¿Cuántos dieciseisavos hay en seis?
...
¿Cuántos cuatrocientos veinteavos hay en uno?
¿Cuántos cuatrocientos veinteavos hay en nueve?
...
¿Cuántos goterolavos hay en uno?
¿Cuántos goterolavos hay en diez?
¿Cuántos goterolavos hay en siete mil?
¿Cuántos goterolavos hay en nueve millones, doscientos ocho?
¿Cuántos goterolavos hay en troclotil?
¿Cuántos goterolavos hay en *x*?
¿Cuántos *n*-avos hay en *x*?

*** $x \div \frac{1}{n} = x \times n$ ***

¿Cuántas veces cabe un cuarto en uno?
¿Cuántas veces cabe un cuarto en diecisiete?
¿Cuántas veces caben dos cuartos en uno?
¿Cuántas veces caben dos cuartos en tres?
¿Cuántas veces caben dos cuartos en veinticinco?
...
¿Cuántas veces caben dos cuartos en tres?
¿Cuántas veces caben cuatro cuartos en tres?
¿Cuántas veces caben seis cuartos en tres?
¿Cuántas veces caben cinco cuartos en tres?
¿Cuántas veces caben diecisiete cuartos en tres?
...
¿Cuántas veces caben seis cuartos en tres?
¿Cuántas veces caben seis cuartos en nueve?
¿Cuántas veces caben seis cuartos en cuarenta y uno?
...

¿Cuántas veces caben seis cuartos en tres?

¿Cuántas veces caben seis cuartos en treinta y siete?

¿Cuántas veces caben nueve cuartos en treinta y siete?

¿Cuántas veces caben doscientos siete cuartos en treinta y siete?

¿Cuántas veces caben doscientos siete cuartos en nueve millones seis?

...

¿Cuántas veces cabe un décimo en uno?

¿Cuántas veces cabe un décimo en veinte?

¿Cuántas veces caben dos décimos en veinte?

¿Cuántas veces caben cinco décimos en veinte?

¿Cuántas veces caben sesenta y tres décimos en veinte?

¿Cuántas veces caben sesenta y tres décimos en noventa y cuatro?

...

¿Cuántas veces cabe un goterolavo en uno?

¿Cuántas veces cabe un *n*-avo en uno?

¿Cuántas veces cabe un *n*-avo en setenta y cinco?

¿Cuántas veces cabe un *n*-avo en *x*?

¿Cuántas veces caben dos *n*-avos en *x*?

¿Cuántas veces caben *p* *n*-avos en *x*?

*** $x \div \frac{p}{n} = x \times \frac{n}{p}$ ***

¿Cuántas veces caben *p* *n*-avos en *x*?

¿Cuántas veces caben *p* *n*-avos en cuatro?

¿Cuántas veces caben *p* *n*-avos en ochenta y siete?

¿Cuántas veces caben *p* *n*-avos en sesenta y nueve?

¿Cuántas veces caben *p* *n*-avos en colenta tril?

¿Cuántas veces caben *p* *n*-avos en dos cuartos?

¿Cuántas veces caben *p* *n*-avos en siete doceavos?

...

¿Cuántas veces caben *p* *n*-avos en *x* *y*-avos?

*** $\frac{x}{y} \div \frac{p}{n} = \frac{x}{y} \times \frac{n}{p}$ ***

RESUMEN

La división del currículo de matemáticas en lo arbitrario y lo necesario trae implicaciones para el trabajo de estudiantes y profesor en el salón de clase. Lo necesario está en el ámbito de la consciencia. Saber que algo es necesario es en sí mismo un enunciado de la consciencia. Todos los estudiantes tienen consciencia; el papel del profesor es educar tal consciencia de manera que los estudiantes puedan llegar a saber lo que tiene calidad de necesario a través de su propia consciencia.

La única otra alternativa es informar a los alumnos de lo que es necesario lo mismo que deben ser informados de lo que es arbitrario. Esto desconocería la división entre lo arbitrario y lo necesario y resultaría en que todo 'aprendizaje' es un ejercicio de memorización. Esto no sólo pondría una gran carga en la memorización sino que también fallaría en educar al matemático que hay en todos los estudiantes. Repito la aseveración de Gattegno 'solamente la consciencia es educable' y la educación de la consciencia no puede ser hecha por los profesores en reemplazo de los estudiantes.

Educar la consciencia de un estudiante es un trabajo que debe realizar él mismo. Sin embargo, un profesor puede trabajar con la consciencia que un estudiante revela; así que un papel que un profesor puede desempeñar es el de crear una cultura en el salón de clase en la que la consciencia de las matemáticas sea lo usual en la comunicación. Una vez que la consciencia se haya revelado, los profesores pueden apoyar a los estudiantes en la educación de su consciencia ayudándoles para que vean *las consecuencias de sus acciones/decisiones, dirigiendo su atención* hacia ciertos aspectos de lo que han revelado, o *forzando la consciencia de ellos* a través de una sucesión de preguntas elaboradas cuidadosamente, que construya esta consciencia. Casi todos los estudiantes, si no todos, poseen ya esta consciencia para hacer cosas que nunca antes habían hecho, o para hacer algo más rápidamente de lo que lo hubieran hecho antes.

Las matemáticas radican en lo que es necesario; de modo que aprender matemáticas tiene que ver en primer lugar con la educación de la consciencia. Finalizo con un reto que todavía es actual y que fue lanzado por Gattegno en 1971:

> La consciencia de relaciones per se es lo que distingue el pensamiento matemático de los otros. ¿Es posible proporcionar un currículo completo de matemáticas en términos de consciencia? ¿Es posible reemplazar la presentación lineal de ideas matemáticas por una variedad de entradas en ese campo —que partan de algo informal y que requieran una consciencia especial— y hacer que nuestros estudiantes alcancen por lo menos una habilidad en las matemáticas como la que se espera de quienes mejor las aprenden? (p. 91).

REFERENCIAS

Ainley, J. (1997). Roles for teachers, and computers. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 90-98). Helsinki, Lahti Research and Training Centre: University of Helsinki.

Berger, J. (1973). *Ways of seeing*. Harmondsworth, Middlesex: BBC/Penguin Books Ltd.

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.

Claxton, G. (1984). *Live and learn: an introduction to the psychology of growth and change in everyday life*. London: Harper and Row.

Gattegno, C. (1971). *What we owe children. the subordination of teaching to learning*. London: Routledge and Kegan Paul Ltd.

Gattegno, C. (1987). *The science of education. Part 1 - Theoretical considerations*. New York, NY: Educational Solutions.

Hewitt, D. (1987). Involvement. *Mathematics Teaching, 120*, 60-61.

Hewitt, D. (1992). Train spotters' paradise. *Mathematics Teaching, 140*, 6-8.

Hewitt, D. (1996). Mathematical fluency: the nature of practice and the role of subordination. *For the Learning of Mathematics, 16* (2), 28-35.

Hewitt, D. (1999). Arbitrary and necessary: Part 1 A way of viewing the mathematics curriculum. *For the Learning of Mathematics, 19* (3), 2-9.

Hewitt, D. (2001). Arbitrary and necessary: Part 2 Assisting memory. *For the Learning of Mathematics, 21* (1), 44-51.

Hewitt, D. et al. (1992). First lessons. *Mathematics Teaching, 139*, 3-9.

Mandler, G. (1989). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective.* (pp. 3-19). New York, NY: Springer-Verlag.

Mason, J. (1987). Only awareness is educable. *Mathematics Teaching, 120*, 30-31.

Mason, J. (1994). Researching from the inside in mathematics education: Locating an I-you relationship (versión expandida de una presentación en el 17th PME Conference, Lisboa). Milton Keynes Bucks: The Open University

OU (1991). *Working mathematically on symbols in key stage 3* (video). Milton Keynes, Bucks: The Open University.

Rousseau, J. (1762/1986). *Emile*. London: Dent Everyman's Library.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychologica processes*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

Dave Hewitt
School of Education
University of Birmingham
Edgbaston
Birmingham
B15 2TT
United Kingdom