Secuencias didácticas para la enseñanza del concepto de límite en el cálculo

Erick Radai Rojas Maldonado, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México

***Resumen**: El presente trabajo de investigación se centra en proponer una serie de secuencias didácticas de modo tal que aborde la enseñanza del concepto de límite como una manera alternativa a la que actualmente se enseña por la definición de Cauchy. Se busca diseñar un modelo metodológico en entornos virtuales que integre un conjunto de elementos coherentes que favorezcan el aprendizaje y promuevan el desarrollo de competencias específicas en los estudiantes.*

***Palabras clave:** secuencias, límite, cálculo*

***Abstract:** The present research focuses on proposing a number of didactic sequences in a manner that addresses the teaching the concept of limit as an alternative way to that currently taught by the definition of Cauchy. Seeks to design a methodological model in virtual environments that integrate a set of coherent elements that foster learning and promote the development of specific skills in students.*

***Keywords:** Sequences, Limit, Calculus*

Planteamiento del problema

La enseñanza de la Matemática en el bachillerato tiene la tarea de contribuir a la preparación de los educandos para la vida laboral, económica y social, de manera que dispongan de sólidos conocimientos que les permitan interpretar los avances de la ciencia y la técnica; que sean capaces de operar con ellos con rigor y exactitud, de modo consciente; y de que puedan aplicarlos de manera creadora a la solución de los problemas en las diferentes esferas de la vida, además del aprovechamiento de todas las potencialidades que esta asignatura ofrece para contribuir al desarrollo de las capacidades intelectuales y la educación político-ideológica (Procedimiento, 2015).

El tema de Límites, es uno de los más complicados que tiene el Cálculo Diferencial pues ésta complejidad está reconocida por numerosos autores, como por ejemplo (Cornu, 1983) y (Sierpinska, 1985) manifiestan que la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite se debe a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática. Los estudios de Cornu demostraron que los alumnos tienen "concepciones espontáneas personales" que provienen de su experiencia cotidiana. Dichas concepciones son muy resistentes al cambio y permanecen durante mucho tiempo de manera que pueden contener factores contradictorios que se manifiestan según las situaciones.

Son numerosos los obstáculos que antes y después de la enseñanza manifiestan los alumnos con respecto al concepto de límite. En lo que se refiere a este concepto, (Cornu, 1983) identifica los siguientes obstáculos epistemológicos:

1. Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
2. Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
3. Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
4. Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

La consideración de los obstáculos es fundamental para el estudio, sistematización, análisis y explicación de los errores que se presentan en el pensamiento científico. En el proceso de construcción de los conocimientos van a aparecer de forma sistemática errores y por lo tanto se deberá incluir en dicho proceso actividades que promuevan el diagnóstico, detección, corrección y superación de errores, promoviendo una actitud crítica de los alumnos sobre sus producciones.

En un documento posterior, (Cornu, 1991) resalta la transmisión didáctica de estos obstáculos. Así mismo, (Sierpinska, 1985) propone una serie de obstáculos epistemológicos, basándose en la génesis histórica del concepto, y posteriormente (Sierpinska,1990), presenta una lista de obstáculos asociados al límite secuencial y los actos de comprensión necesarios para superarlos.

Al realizar un estudio sobre el concepto de límite de una función en alumnos universitarios, (Tall, 1992) propone presentarles situaciones adecuadas que provoquen conflicto cognitivo originando un desequilibrio que los conduzca a la superación de los obstáculos epistemológicos presentes en la enseñanza de este concepto. Se deberá favorecer la integración de las tres representaciones sobre el límite funcional: gráfica, numérica y simbólica.

(Artigue, Douady, Moreno & Gómez, 1995), describe tres grupos de dificultades en el aprendizaje, asociadas a la complejidad de los objetos, al concepto de límite y al número real. Asimismo señala la “dificultad de separarse de una visión de límite en simples términos de proceso para disociar con claridad el objeto límite del proceso que ha permitido construirlo para dotarlo de una identidad propia”.

En sus investigaciones referidas a las ideas relacionadas con proceso/objeto para el caso del límite, (Cottrill, Dubinsky, Schwingendorf, Thomas & Vidakovic, 1996) señalan que la dificultad en comprender el concepto de límite radica en que esto requiere la reconstrucción de dos procesos coordinados:

($x \to a$, $f(x) \to L$) como un proceso descrito como $0 < | x - a | < \delta$ implica $| f(x) - L | < \varepsilon$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$

Este proceso coordinado tiene dificultad en sí mismo y no todos los alumnos pueden construirlo inmediatamente

Es más importante describir o intuir en un primer curso de Cálculo Diferencial que aprender a conceptualizar este concepto, ya que permite una construcción del conocimiento más firme y enriquecedor además de fomentar la multidisciplinaridad y refuerza su utilización y dificulta el olvido.

Dada la experiencia, los alumnos mecanizan y no desarrollan la habilidad de calcular límites, por lo que no entienden lo que están haciendo ó cómo pueden utilizar dicho concepto en la resolución de problemas; muchas veces, ante un problema relacionado con él, no pueden ni siquiera hacer un planteamiento adecuado.

Objetivo general

Diseñar un modelo metodológico de aprendizaje utilizando el software (Wolfram Research, 2014), para integrar un conjunto de elementos coherentes que favorezcan a la comprensión del concepto de límite en el bachillerato a través del Método de Fermat.

Descripción de las secuencias didácticas

Una de las vías para romper con los esquemas tradicionales de enseñanza de la Matemática es el perfeccionamiento de los métodos y los medios de enseñanza, para lograr que los alumnos se apropien de la esencia del conocimiento a fin de aplicarla de forma creadora en la adquisición de nuevos conocimientos y en la solución de problemas propios de la carrera.

La estructura para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, que se propone consta de 3 módulos fundamentales, interrelacionados entre sí:

1. Módulo I “ Las Líneas Secantes”
2. Módulo II “Elaborando una animación”
3. Módulo III “Usando Límites para encontrar las pendientes de la tangente”

Actividad de apertura

El concepto de límite es un elemento indispensable en la estructura matemática, para comprenderlo es preciso abrir nuestros sentidos y disponer nuestro razonamiento.

Por ejemplo, pensemos en el derrumbe de un edificio por el movimiento de un temblor, se dice que éste sobrepasó su límite de resistencia y como consecuencia se cayó; o en el caso de una liga o un resorte, si se rebasa el límite de elasticidad se produce una deformación permanente.

El cálculo de tangentes a una cónica fue un problema planteado en la antigüedad, y su solución se dio por medio del cálculo de límites para toda curva. La idea de límite que se usa para hallar tangentes y velocidades dio origen a la idea central del cálculo diferencial.

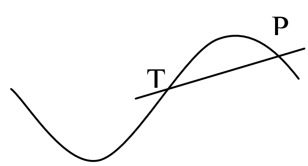
Hoy en día el cálculo representa una magnífica herramienta de trabajo en todas las áreas de la ciencia, por ejemplo, se utiliza en economía al calcular el costo marginal y el ingreso marginal para obtener una utilidad máxima. En biología, para analizar la velocidad con que un virus como el VIH muta aleatoriamente con el fin de comprender su comportamiento y propagación.

Idea de Fermat

En la siguiente secuencia, tomaremos una nueva perspectiva al problema de las tangentes y exploraremos la idea del matemático francés Pierre Fermat. Fermat, basó su método para encontrar rectas tangentes con la siguiente idea:

> Supóngase que una curva es dada, y supóngase que T denota el punto en la curva donde se desea construir la línea tangente.

Figura 1: Idea de Fermat



Fuente: Finch & Lehmann, 1992.

Sea P un punto próximo en la misma curva y considere la línea de T a P.

Tal línea se llama una línea secante. Y esa línea cruza una circunferencia en dos distintos lugares. Imagine que el punto P se mueve a lo largo de la curva hacia T mientras que T sigue siendo fijo. La línea secante TP rotará cada vez más cerca de la posición de la línea de la tangente en T.

Fases de la Secuencia

1. Encontrar una línea secante que parte de un punto fijo de la función a otro cualquiera.
2. Encontrar una secuencia de líneas secantes que parten de un punto fijo y se aproximan a otro.
3. Animar una secuencia de líneas secantes.
4. Usar límites para encontrar pendientes de las líneas tangentes.
5. Concluir que la derivada es la pendiente de la recta tangente expresada como un límite.

Módulo I Las Líneas Secantes

Secuencia Didáctica 1

Actividades de desarrollo

Como lo hace ver (Finch & Lehmann, 1992) y adecuándolo a (Wolfram Research, 2014), se considera el problema de encontrar la línea tangente a $y=x^2$.

(Finch & Lehmann, 1992) busca mostrar una secuencia de líneas secantes que van de (-2,4) a otro punto de la curva (a,a^2) y ver que sucede cuando (a,a^2) se mueve más cerca de (-2,4).

La idea esencial es que los puntos en la curva "vecinos" a (-2,4) están cerca a la línea tangente. Por lo que la pendiente entre uno de estos puntos y (-2,4) es igual a la pendiente de la línea tangente. Y cuanto más cercano esté el segundo punto a (-2,4), más cercana estará la pendiente de la secante de la pendiente de la tangente.

Ahora, supóngase que el punto (1,1) es nuestro segundo punto.

Se define la función y se busca la pendiente de $(-2, f(-2))$ a $(1, f(1))$.

```
In[1] : =
f [x_ ] : = x^2
In[2] : =
m = ( f [1] – f [ - 2 ] ) / ( 1 - ( - 2 ) )
Out[2] =
        -1
```

La fórmula para la línea secante es

```
In[3] : =
secLine[x_] : = - 1 ( x - ( - 2 ) ) + 4
```

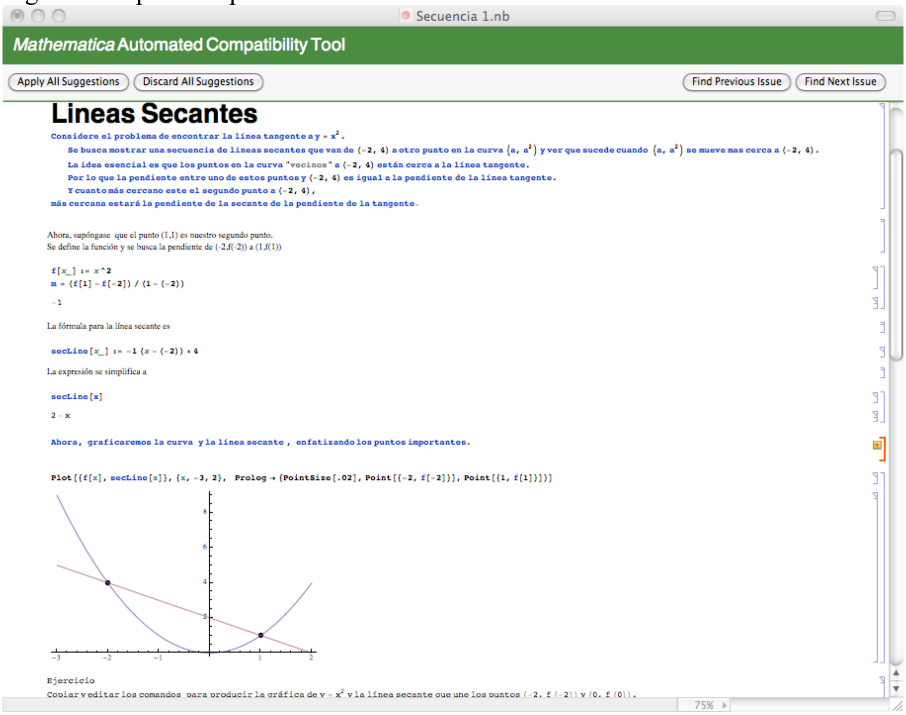
La expresión se simplifica a

```
In[4] : =
        secLine[x]
Out[4] =
        2 – x
```

Ahora, graficaremos la curva y la línea secante, enfatizando los puntos importantes. Dando a la línea y a la curva colores distintos.

```
In[5] : =
        Plot[
        { f [ x ], secLine[x]}, { x, - 3, 2},
Prolog->
        {PointSize[. 03 ],Point[ { - 2 ,f [ - 2 ] } ], Point [ { 1, f [1] }]
        }
   ];
```

Figura 2: Captura de pantalla de Mathematica de Lineas Secantes



Fuente: Finch & Lehmann, 1992.

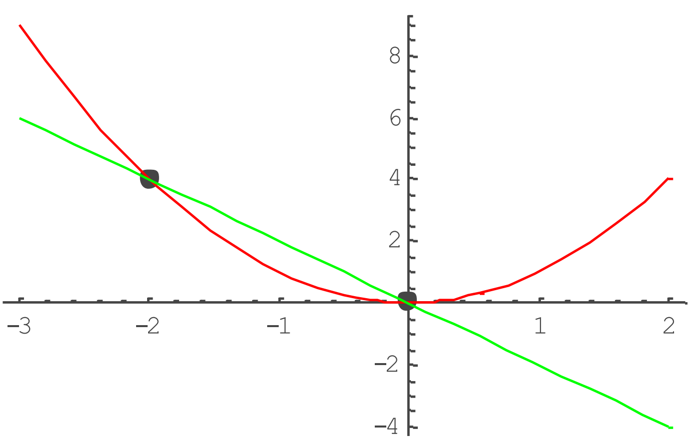
Actividades de cierre

Ejercicio 1.1

(Finch & Lehmann, 1992) sugiere que se copien y editen los comandos para producir la gráfica de $y = x^2$ y la línea secante que une los puntos $(-2, f(-2))$ y $(0, f(0))$. Enfatizando los puntos $(-2, f(-2))$ y $(0, f(0))$.

La solución tiene que ser algo parecido a

Figura 3: Linea Secante de una curva



Fuente: Finch & Lehmann, 1992.

Acabamos de ver las gráficas de dos líneas secantes del punto (-2,4).

A medida que continuamos nuestra investigación, veremos muchas líneas secantes del punto (-2,4) para ver que sucede con la línea cuando el segundo punto se mueve cada vez más cerca a (-2,4). Esto involucra encontrar y graficar todas estas líneas. Como el proceso se vuelve cíclico, llamaremos al segundo punto $(a, f(a))$ en lugar de $(1, f(1))$. Por lo que la pendiente dependerá por supuesto, de *a*.

In[6] : =

Clear[m,a];
m:= (f[a] – 4) / (a + 2)

Una vez conocida la pendiente, escribimos la ecuación de la línea secante.

In[7] : =

Clear[secLine,x];
secLine[x_]:=m(x + 2) + 4

La función secLine[x] es ahora una expresión que ahora depende de a. Veremos

In[8] : =

secLine[x]

Cuando un valor es asignado a *a,* esta expresión simplifica la fórmula de la secante. Si *a*=1 se obtendría

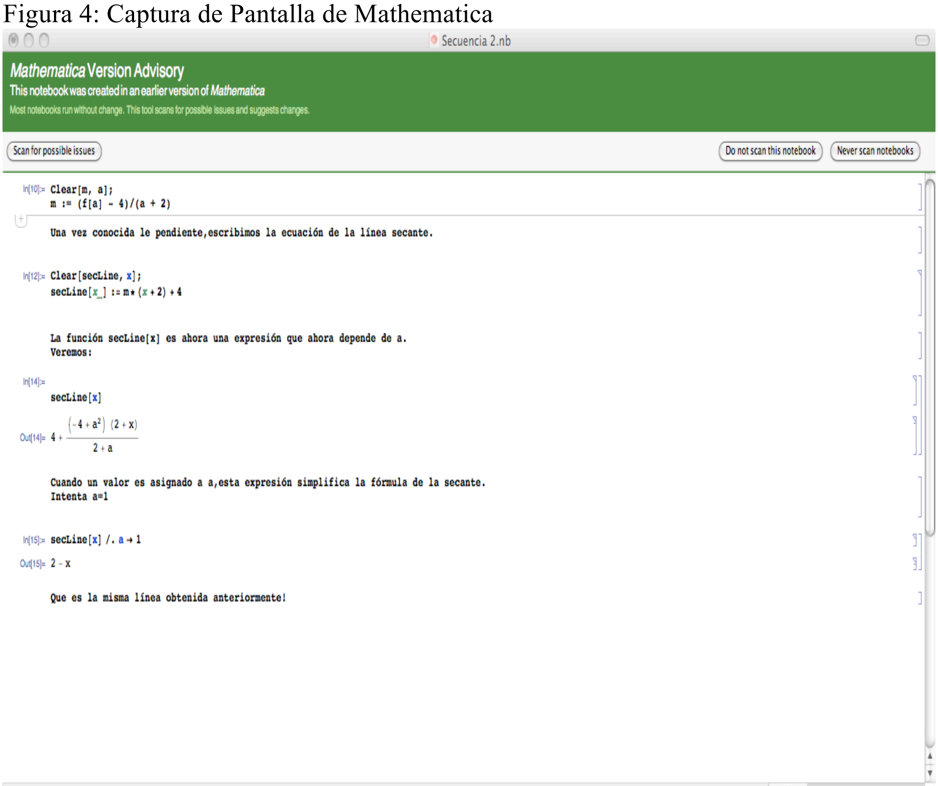
In[9] : =

secLine[x] / . *a*->1

Out[9] =

2-x

Figura 4: Captura de Pantalla de Mathematica



Fuente: Finch & Lehmann, 1992.

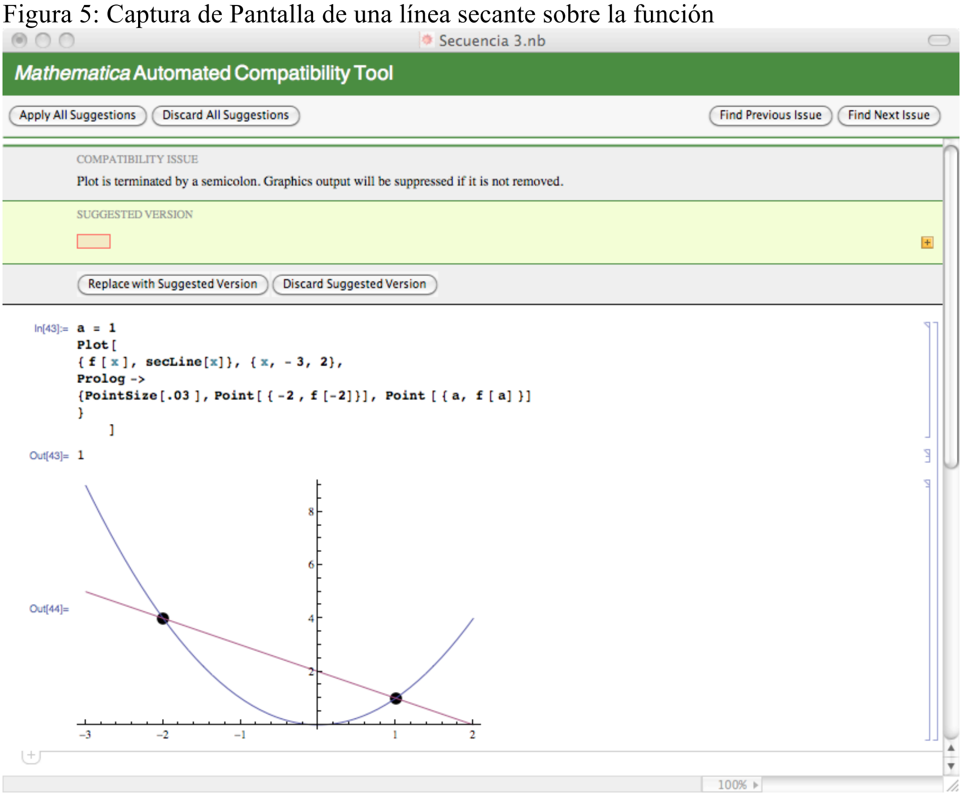
Como nota, acerca de la nueva construcción usada aquí, /.*a*->1 causa que la función secLine sea evaluada para *a*=1.

Por lo que ahora podemos reescribir el comando Plot para que pueda graficar la curva y la línea secante de (-2,4) a un punto arbitrario $(a, f(a))$. La manera más fácil de reescribir esto, es copiando la función Plot que escribimos anteriormente y editarlo. El único cambio necesario es reemplazar los 1's en la última línea por *a*'s.

Asignando un valor a *a* antes de ejecutar Plot.

```
In[10] : =
a = 1
Plot[
{ f [ x ], secLine[x]}, { x, - 3, 2},
Prolog->
{PointSize[. 03 ],Point[ { - 2 ,f [ - 2 ] } ], Point [ { a, f [ a] }]
}
    ];
```

Figura 5: Captura de Pantalla de una línea secante sobre la función



Fuente: Finch & Lehmann, 1992.

El procedimiento que se involucró para graficar una curva con una línea secante se puede resumir en tres partes:

La definición de m y de secLine.

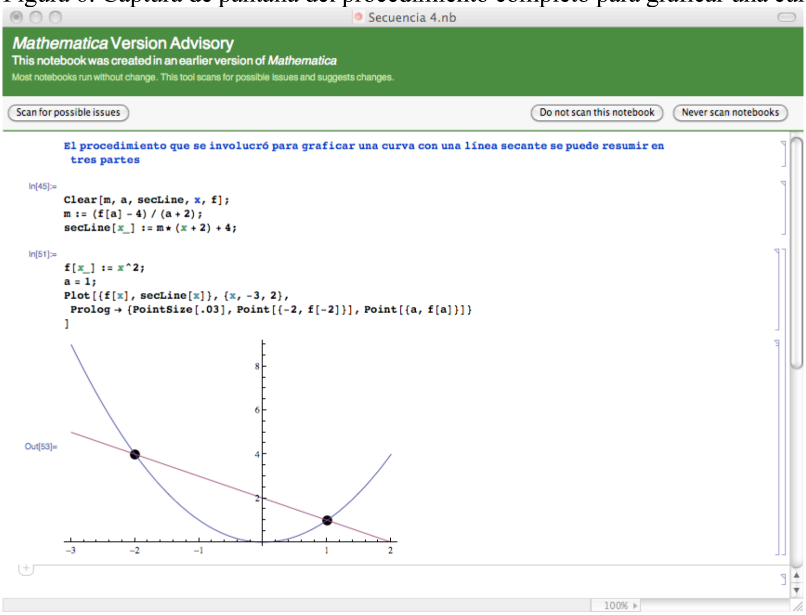
La asignación de valores de *a* y f,

Y el comando Plot.

```
In[11] : =
        Clear[a,m,secLine,x,f];
        m:= (f[a] – 4) / (a + 2);
        secLine[x_] : = m( x + 2 ) + 4
```

```
        f[x_] : = x^2;
a = 1;
Plot{ f [ x ], secLine[x]}, { x, -3, 2},
Prolog->{PointSize[ .03 ],Point[ { - 2 ,f [ - 2 ] } ], Point [ { a, f [ a] }]}
   ];
```

Figura 6: Captura de pantalla del procedimiento completo para graficar una curva con una línea secante



Fuente: Finch & Lehmann, 1992.

Nuevamente (Finch & Lehmann, 1992) sugiere:

Ejercicio 1.2 Copie los comandos anteriores en tu libreta, ejecútalos, y asegúrate que grafica lo que aquí se mostró.

Ejercicio 1.3 Copie y edite los comandos para obtener la gráfica de una línea secante de (-2,4) a (-1,1). (Nota: Sólo necesita cambiar el valor en la línea donde se asigna el valor a *a*.) Repita para obtener la línea secante de (-2,4) a (-1.5,2.25).

Ejercicio 1.4 ¿Qué pasa si se asigna a=-2 y ejecutas el comando Plot? ¿Por qué lo hace?

Módulo II Animando una secuencia de gráficas

(Finch & Lehmann, 1992) presentan una versión obsoleta para esta nueva versión de Mathematica. Pues se tenía contemplado la llamada de paquetes adicionales. Esta nueva forma de animar, se considera que es mucho más práctica además de usar las novedades de (Wolfram Research, 2014) que si bien es cierto, se puede omitir el módulo I presentado por (Finch & Lehmann, 1992) se recomienda realizarlo para una mejor comprensión de cómo se estructura la pendiente y la recta secante.

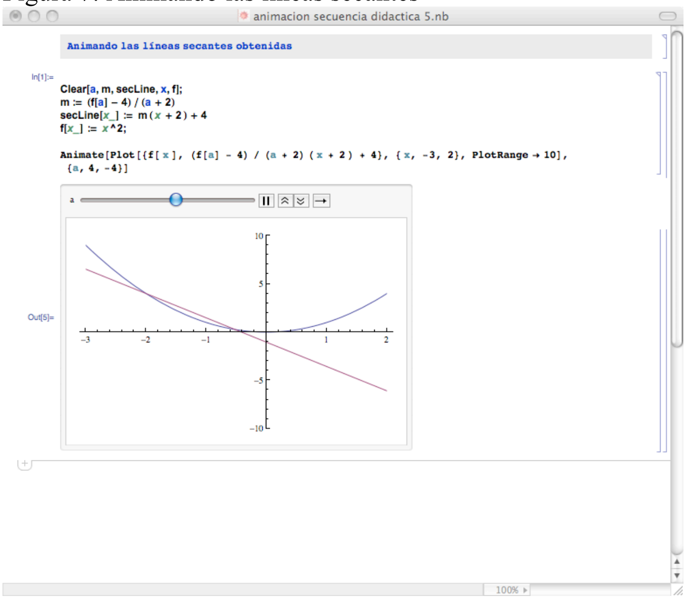
Para el Múdulo II, requerimos primeramente elaborar una secuencia de gráficas, por lo que recurrimos al comando Animate, el cual nos permite anudar cada una de las gráficas representadas.

El código quedaría de la siguiente manera:

```
Clear[a, m, secLine, x, f];
m := (f[a] - 4) / (a + 2)
secLine[x_] := m ( x + 2 ) + 4
f[x_] := x^2;
```

```
Animate[Plot[{f[ x ], (f[a] - 4) / (a + 2) ( x + 2 ) + 4}, { x, -3, 2},
 PlotRange -> 10], {a, 4, -4}]
```

Figura 7: Animando las líneas secantes



Fuente: Rojas, 2015.

Intente probar los botones y observe qué sucede.

La mejor manera para ver el comportamiento de las líneas secantes es controlar la exhibición a mano.

Ejercicio 1.5 Edite las instrucciones de modo tal que *a* comienza en -2 a 2. ¿Qué diferencia se presenta?

Ejercicio 1.6 Edite las instrucciones de modo tal para que la función sea la raíz de x aproximándonos al valor de x=0. Explique el fenómeno.

Ejercicio 1.7 Edite las instrucciones de modo tal para que la función sea la Tan(x) aproximándonos al valor de x=Pi/2. Explique el fenómeno.

Módulo III Usando Límites para encontrar la pendiente de una línea tangente

De estas animaciones, es claro ver que las líneas secantes se mueven cada vez más cerca a la línea tangente conforme *a* se acerca a -2. Por lo que, ¿cómo involucramos esto para encontrar la pendiente de una recta tangente? ¿Por qué no sólo fijamos *a*=-2?

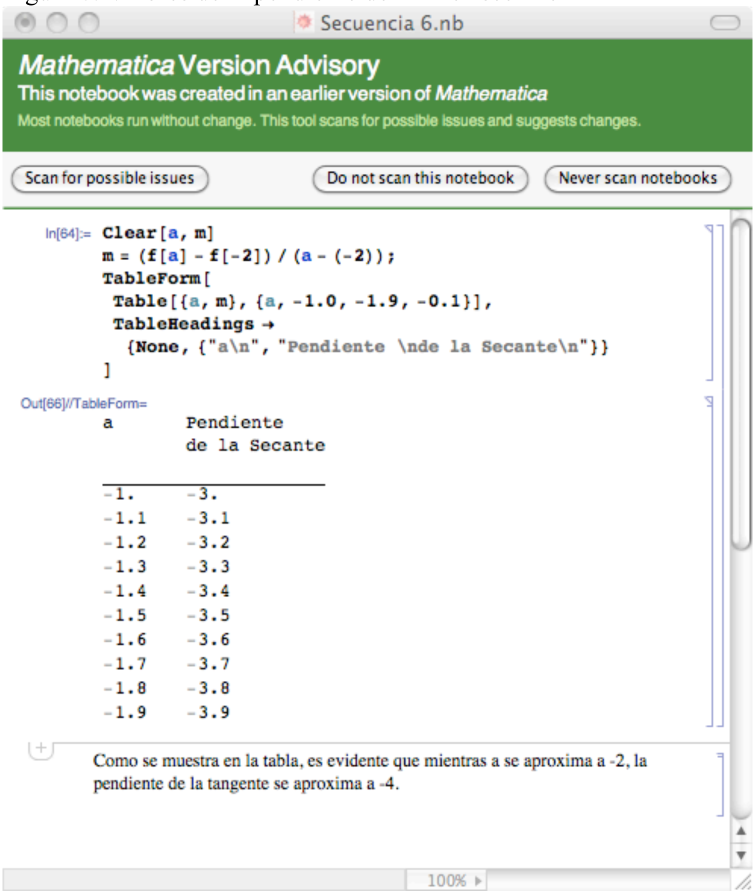
Es una de las participaciones que el docente debe de hacer para explicar este fenómeno, pues la función puede no estar definida en ese punto o no ser una función continua.

(Finch & Lehmann, 1992) muestran una idea que podría funcionar: Puesto que las líneas secantes se acercan cada vez más a la línea tangente conforme *a* se aproxima a -2, las pendientes de las líneas secantes también se acercan a la pendiente de la línea tangente en (-2,4). Así que construiremos una tabla de las pendientes valuadas en la línea secante y ver qué sucede.

```
In[15]:=
Clear[a,m]
m=(f[a]-f[-2])/(a-(-2));
TableForm[
Table[{a,m},{a,-1.0,-1.9,-0.1}],
TableHeadings->
  {None,{"a\n","Pendiente \nde la Secante\n"}}
 ]
```

Y se obtiene:

Figura 8: Valores de la pendiente de la línea secante



Fuente: Finch & Lehmann, 1992.

Como se muestra en la tabla, es evidente que mientras a se aproxima a -2, la pendiente de la tangente se aproxima a -4.

Se puede consultar directamente a Mathematica a que valor la pendiente de la secante tiende cuando *a* se aproxima a -2 usando el comando Limit.

```
In[16] : =
        Clear[a];
        Limit[(f[a]-f[-2])/(a-(-2)),a->-2]
Out[16] :=
        -4
```

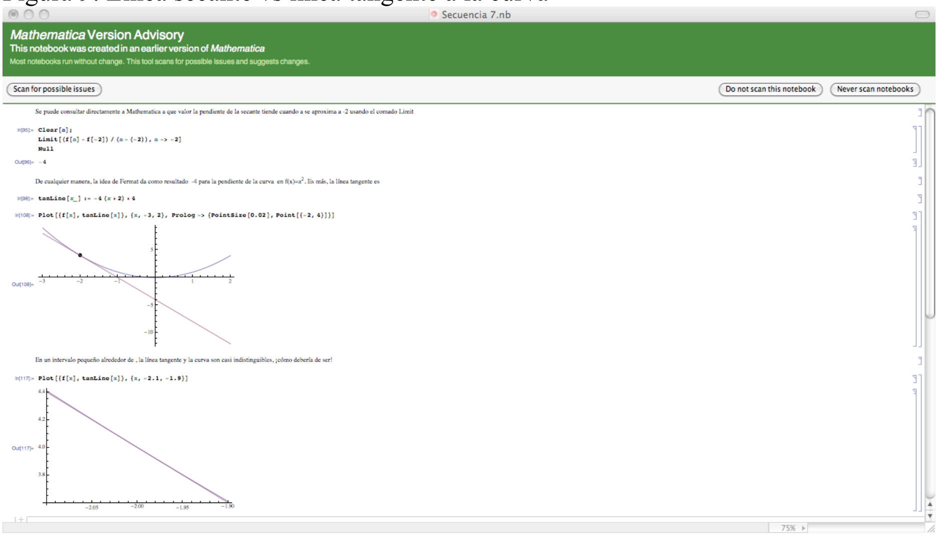
De cualquier manera, la idea de Fermat da como resultado -4 para la pendiente de la curva $y=x^2$ en (-2,4). Es más, la ecuación de la línea tangente es $y=-4(x+2)+4$.

Definiendo la función de la línea tangente y trazándola junto con la curva para una revisión final del trabajo.

```
In[17]:=
        tanLine[x_]:=-4(x+2)+4
In[18]:=
Plot[{f[x],tanLine[x]},{x,-3,2},
PlotRange->{0,9}, Prolog->{PointSize[0.02],Point[{-2,4}]}];
```

En un intervalo pequeño alrededor de x= -2, la línea tangente y la curva son casi indistinguibles, como debería de ser.
In[19]:=
Plot[{f[x],tanLine[x]},{x,-2.1,-1.9}]

Figura 9: Línea secante vs línea tangente a la curva



Fuente Finch & Lehmann, 1992.

Se concluye que la pendiente de la recta tangente a $y=x^2$ en (-2,4) puede ser encontrada tomando el limite de las pendientes de las rectas secantes.

Con esta conclusión, nos es posible abordad la siguiente unidad temática "La Derivada" que los programas académicos contemplan. Teniendo una continuidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Conclusiones

Este procedimiento de límites puede ser usado para encontrar pendientes tangentes para muchas otras curvas. De hecho, resulta que si hay una manera sensible de asignar una pendiente a una curva en un punto, esta técnica, proporciona el valor correcto. Este procedimiento se puede escribir con notación matemática:

Sea f una función, $(x, f(x))$ un punto fijo, y $(a, f, (a))$ el punto que se aproxima al punto fijo. Entonces la pendiente m de la recta tangente es $\lim_{a\to x}[\frac{f[a]-f[x]}{a-x}]$. Este límite especial se conoce como la derivada en un punto.

La tecnología ha adquirido la calidad de recurso importante para facilitar el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Resulta de gran interés el efecto que puede tener una computadora en el proceso de enseñanza de la matemática siempre y cuando se utilice como un elemento transformador en los procesos de enseñanza y del aprendizaje, sobre todo cuando surge el interés por la representación visual de ideas matemáticas, ya que éstas, permiten una introducción poderosa a los que son las abstracciones complejas de la matemática.

En la actualidad, el uso de la computadora se distingue porque permite incrementar en gran medida la ayuda visual que genera. Se puede agregar que las Tecnologías de la Información y la comunicación se han convertido en una poderosa herramienta, que a diferencia de otras innovaciones tecnológicas, ha provocado una serie de cambios en el sector educativo, entre los cuales podemos señalar:

1. Una manera diferente de organizar el pensamiento por parte de los alumnos.
2. Poder combinar los métodos tradicionales, con actividades empleando nuevas tecnologías

3. La obtención de un nuevo lenguaje cognoscitivo: la asociación palabra-imagen.

La computadora puede dar fuerza de significado a los conceptos matemáticos que nuestros alumnos no alcanzan a comprender, de esta manera es comprensible que las ideas son fáciles de entender cuando éstas se hacen más concretas, del mismo modo, cuando una idea abstracta se implementa o representa en una computadora, es posible concretarla en la mente.

REFERENCIAS

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

— (1983). *Apprentissage de la notion de límite: conceptions et obstacles.* (Doctoral dissertation). Université Scientifique et Médicale, Grenoble.

Cotrill, J., Dubinsky, E., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *The Journal of Mathematical Behavior,* 167-192.

Alvarez, J., & Jurgenson, G. (2003). *Cómo Hacer Investigación Cualitativa. Fundamentos y Metodología.* D.F., México: Paidos Educador.

Alvarez, M., Fernández, A., & Anzola, E. (1994). Incorporación de la computadora a la impartición de la Matemática numérica. *Revista Cubana de Educación Superior, 14*(2), 86-92.

Artigue, M. (1997). Le logiciel 'Derive' comme révélateur de phénomenesdidactiques liés a Putilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educatíonal Studies in Mathematícs, 33*(2), 133-169.

— (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

— (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 231-262.

— (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez, Ingeniería didáctica en educación matemática. *Un esquema para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 7-23). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

— (1996). Teaching and Learning Elementary Análisis. *Selección de Conferencias del 8º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME8).* Sevilla.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Finch, J. K., & Lehmann, M. (1992). *Exploring calculus with Mathematica: for the Macintosh interface.* Boston, MA.: Addison-Wesley Publishing Company.

Procedimiento, M. G. (2015). Coordinación de Transpaencia Universitaria. Recuperado el 16 de 06 de 2015, de Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo: http://www.informacionpublica.umich.mx/manuales/manual-general-de-organizacion.html

Rojas, E. R. (2010). La Utopía de una Reforma al Bachillerato Nicolaita. *Praxis Educativa ReDie, 2*(2), 73-81.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Math, 18,* 371-397.

— (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 5-67.

— (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-36.

Skemp, R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid, España: Morata.

Tall, D. (1999). The Chasm between Thought Experiment and Mathematical Proof. (G. O. G. Kadunz, Ed.) *Mathematische Bildung und neue Technologien,* 319-343.

— (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Holland: Kluwer.

— (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. En D. A. Grouws, *Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning* (pp. 495– 511.). New York: Macmillan.

— (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 281-288). Bergen, Norway.

— (1991). To prove or not to prove. *Mathematics Review, 1*(3), 29-32.

Tall, D., & Fusaro Pinto, M. M. (2001). Following student's development in a traditional university classroom. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (4), 57-64.

Wolfram Research, I. (2014). *Mathematica, 10.* Champaign, Illinois: Wolfram Research, Inc.

SOBRE EL AUTOR

Erick Radai Rojas Maldonado: Doctor en Educación, Profesor e Investigador de Tiempo Completo de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Miembro del Sistema Nacional de Investigadores del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), Autor del Libro "Cálculo Diferencial" de la Editorial Umbral. Fue Secretario Académico del Colegio de San Nicolás hasta el 2012. En el 2013 publicó su primer iBook "Aprende Integrales Indefinidas con ejercicios breves", Posteriormente publicó "Procedimientos quirúrgicos para extirpar integrales" en ese mismo año. Fue Profesor Invitado en el CIDEM en la Maestría en Matemática Educativa. En el 2014, publicó "Antecedentes Históricos del Cálculo en las TIC". En el 2015 Profesor Invitado en la Universidad de Durango en el Doctorado de Educación. Actualmente su interés es la docencia y la investigación educativa.