# VISUALIZANDO LA CONVERGENCIA DE LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

*Fabián Wilfrido Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez*


## Resumen

En este laboratorio se realizarán actividades que apoyarán en la visualización de la convergencia de la Serie Trigonométrica de Fourier. Esta secuencias de actividades tienen sus fundamentos teórico en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en investigaciones donde se ha problematizado este saber. La Serie Trigonométrica de Fourier es un tema complejo para su aprendizaje en el nivel superior, donde por lo general se mecaniza el proceso sin comprender del todo su convergencia, se quiere comprobar que con actividades que apoyen en ese tránsito de lo algebraico a lo geométrico, haciendo uso de la herramienta tecnológica, se puede comprender mejor la noción de convergencia de esta serie.


**Palabras clave: Serie Trigonométrica de Fourier; Convergencia; Socioepistemología; Uso de Tecnología.**

## Propósito y Alcance

La Serie Trigonométrica de Fourier (STF) juega un rol fundamental dentro del cálculo, ya que históricamente jugó un papel primordial en el desarrollo del Análisis Matemático y fue un punto importante para la evolución del concepto de función tal y como lo conocemos hoy en día, además, como lo mencionan Muro *et al* (2007) la STF es un tema fundamental en cursos avanzados de ingeniería, por lo que debemos brindarle especial atención.

Diversas investigaciones se han preocupado por la enseñanza de dicho tema con el propósito de que se logren aprendizajes, en este sentido Montiel (2005) menciona que la STF es el estadío más avanzado de las funciones trigonométricas y que para legar a ese punto las funciones seno y coseno deben estar construidas como objeto en los estudiantes, es decir, que deben ser susceptibles de manipulación, por lo que el tránsito entre los diferentes registros de representación es muy importante, en este sentido con el uso de un software de geometría dinámica (Geogebra) se busca crear una serie de apoyos didácticos para complementar el abordaje de las series de Fourier.

Primeramente se abordará la noción de convergencia, pues este es un elemento importante al buscar aprendizajes acerca de la serie de Fourier, seguidamente se abordará la visualización como una estrategia para complementar la enseñanza de las series de Fourier, para finalmente dar una secuencia de actividades que permitan complementar el aprendizaje de dicho tema, especialmente en lo que concierne a la convergencia de la STF.

## Perspectivas Teóricas

En el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, diversos estudios se han preocupado por el abordaje de la STF, estas investigaciones se han fundamentado el la

Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, las cuales han seguido una aproximación sistémica para la construcción social del conocimiento, mediante la articulación de cuatro componentes: la naturaleza epistemológica, la dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y la dimensión didáctica (Cantoral, 1999), en este sentido nos interesan los resultados de investigación que propiciaron el diseño de la secuencia didáctica planteada.

## Acerca de la noción de convergencia

La comprensión de la convergencia de la serie de Fourier es un asunto complejo cuando se habla de su enseñanza y aprendizaje (Muro et al., 2007), la idea de que una suma infinita de senos y cosenos se aproxime a una función arbitraria es difícil de asimilar por los estudiantes, prueba de esto es el estudio realizado por Farfán (1986, 1994, 2012) donde se evidencia que esta noción es un obstáculo epistemológico, ya que este mismo "inconveniente" se le presentó a grandes matemáticos como Euler y D'Alembert. Euler al referirse a la solución del problema de la cuerda vibrante indica:

> Pero tal vez puede argumentarse que la ecuación,
>
> $$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \cdots,$$
>
> debido a que contiene una infinidad de términos […] aún cuando se aumente el número de términos al infinito, poseen ciertas características que las distinguen de todas las demás curvas […] Así pues, si la curva dada a la cuerda al comienzo no tiene estas propiedades es seguro que no estará encerrada en la ecuación. (Farfán, 2012, p. 66)

Se puede identificar como las propiedades de periodicidad e imparidad de la función seno provocan que se tienda a pensar que la función inicial también deba cumplir estas mismas propiedades, lo que hace que se reste importancia al hecho de que la suma infinita de las mismas pueda converger a la función inicial arbitraria, este obstáculo epistemológico que dicta que la suma de una serie debe tener las mismas propiedades que los términos de la serie es conocido como el principio de permanencia de Leibniz.

Farfán (2012) indica que un estudio cualitativo de la convergencia exige movilizarse entre los contextos algebraico y geométrico, por lo que la visualización juega un papel importante para el aprendizaje de la serie de Fourier.

## Acerca de la Visualización

Podemos entender la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, documentar y reflejar información visual (Cantoral & Montiel, 2014), Desde este punto de vista la visualización es una herramienta que se utiliza frecuentemente en el pensamiento matemático.

Sin embargo, Calvillo y Cantoral (2007) comentan que se da mayor importancia a los aspectos formales de la teoría (convergencia de sucesiones numéricas infinitas) y que no se toman en cuenta aspectos visuales, por esta razón se utilizará un software de geometría dinámica (Geogebra), el cual permite el tránsito hacia lo visual, para complementar la enseñanza de la serie de Fourier. Además según Rodríguez (2009) en una secuencia didáctica donde se trabaje desde distintos registros de representación aproximándose a los conceptos de manera visual el estudiante será capaz de:

- Comprender los conceptos matemáticos.
- Desarrollar su visualización matemática y en consecuencia potenciar y evolucionar su pensamiento matemático.
- Hacer el pensamiento matemático una parte inherente así mismo.

## Método

La secuencia consta de una introducción y tres tareas, cada tarea está conformada por varias actividades. Bajo la perspectiva de que el conocimiento se construye en sociedad, se espera que las actividades se desarrollen de manera grupal, dos o tres personas por grupo, salvo la tercer tarea que busca la institucionalización del saber.

El docente a cargo de implementar la situación tendrá un rol de mediador, propondrá las actividades a los participantes y estará en constante revisión de lo que estén realizando los grupos de trabajo.

Al finalizar cada tarea se espera que los participantes expongan a los demás los argumentos que utilizaron para resolver la actividad, no es necesario que todos expongan, pero es importante en este punto la acción del docente, pues él debe decidir que grupos expondrán sus argumentos pensando en la mayor variedad posible y así promover la discusión.

Al finalizar el laboratorio se espera comentar con los docentes la intencionalidad y las razones dentro de la epistemología de la STF que guiaron la construcción de la secuencia.

## Sobre la Secuencia de Actividades

De manera introductoria se ubica a los participantes en la situación de contexto, el movimiento de los cuerpos celestes tal y como lo modelaron los astrónomos alejandrinos (323 a. C. - 30 a. C.), este modelo se considera de importancia epistémica, ya que fue el modelo que imperó hasta el siglo XVII. Para esto se utiliza un applet en Geogebra con la finalidad de que comprendan el comportamiento del modelo de movimiento de los planetas, superposición de movimientos circulares (Ver Figura 1).

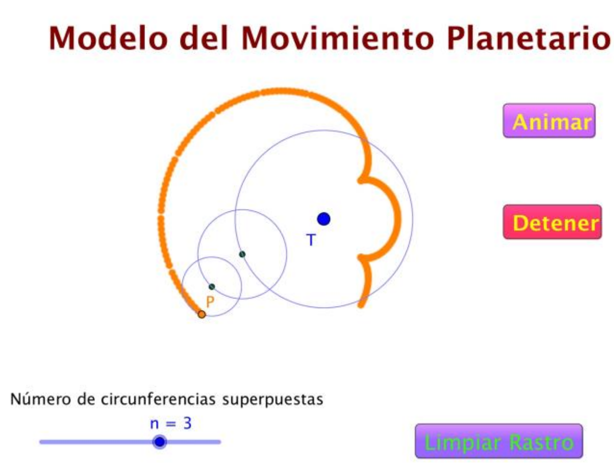

*Figura 1. Superposición de movimientos circulares.*

El modelo de movimiento de los planetas consistía en una circunferencia centrada en la Tierra y sobre su perímetro se mueve un punto, este punto es el centro de otra circunferencia, y sobre el perímetro de esta última se mueve otro punto, el cual es centro de otra circunferencia y así sucesivamente, todos los puntos se mueven con velocidad angular uniforme y en sentido antihorario.

En la Tarea #1 la situación representa circunferencias en donde en el estado inicial (tiempo igual a cero) los centros son colineales (Ver Figura 2).

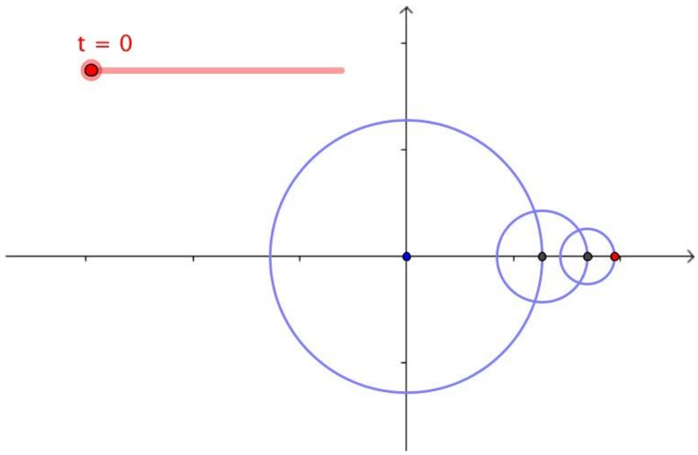


*Figura 2. Situación inicial de la tarea #1.*

Las actividades de esta tarea buscan que los participantes, en un sistema de coordenadas, determinen las coordenadas del punto que representa al planeta en función del tiempo transcurrido, se hace de manera inductiva, primero se estudia el modelo con una circunferencia, luego con dos, a partir de esto los participantes deben hacer una construcción en Geogebra del modelo con tres circunferencias, esto con ayuda del docente (Ver Figura 3).

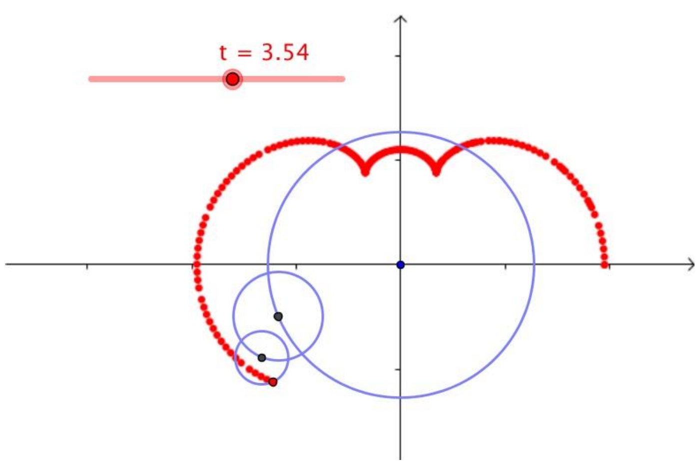


*Figura 3. Modelo de tres circunferencias.*

Para el final de esta tarea se busca que los participantes construyan y visualicen la convergencia de una serie trigonométrica particular, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(w_n t)$ donde $A_n$ es la sucesión de los radios de las circunferencias que se superponen y $w_n$ es la sucesión de las velocidades de movimientos de los centros de cada circunferencia, para esto se les mostrará un applet de Geogebra con el modelo donde pueden variar el número de circunferencias y el tiempo.

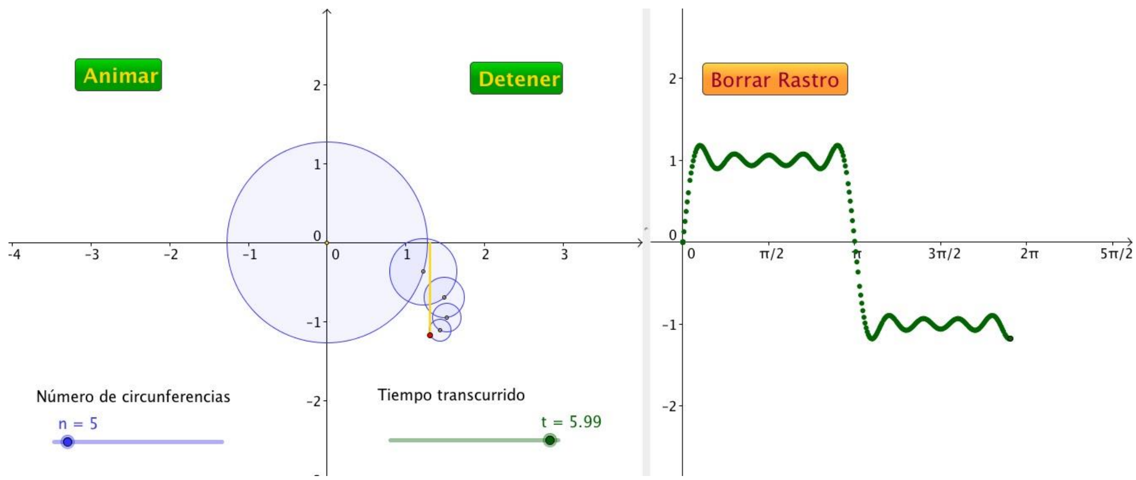


*Figura 3. Modelo de n circunferencias de la tarea #1.*

Con la Tarea #2 se busca generalizar aún más el modelo, la diferencia principal con la Tarea #1 es que los participantes deben modelar una situación en la cual los centros de las circunferencias no son colineales en su tiempo inicial y "la Tierra" no está centrada en el origen del sistema de coordenadas (Ver Figura 4).

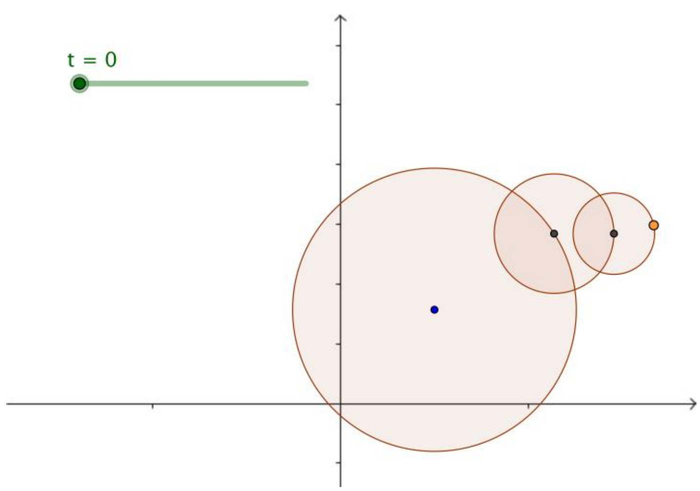


*Figura 4. Situación inicial de la tarea #2.*

Siguiendo una serie de actividades similares a las de la Tarea #1 deben construir el modelo para *n* circunferencias donde aparecerá la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(w_n t + \theta_n)$ donde $A_n$ es la sucesión de los radios de las circunferencias que se superponen, $w_n$ es la sucesión de las velocidades de movimientos de los centros de cada circunferencia y $q_n$ el ángulo que forma el punto con la horizontal al inicio del movimiento, es decir, cuando el tiempo igual a cero.

Para finalizar se les presentará un applet de Geogebra con el modelo donde pueden variar el número de circunferencias y el tiempo, para que así puedan determinar la convergencia de la serie (Ver Figura 5).

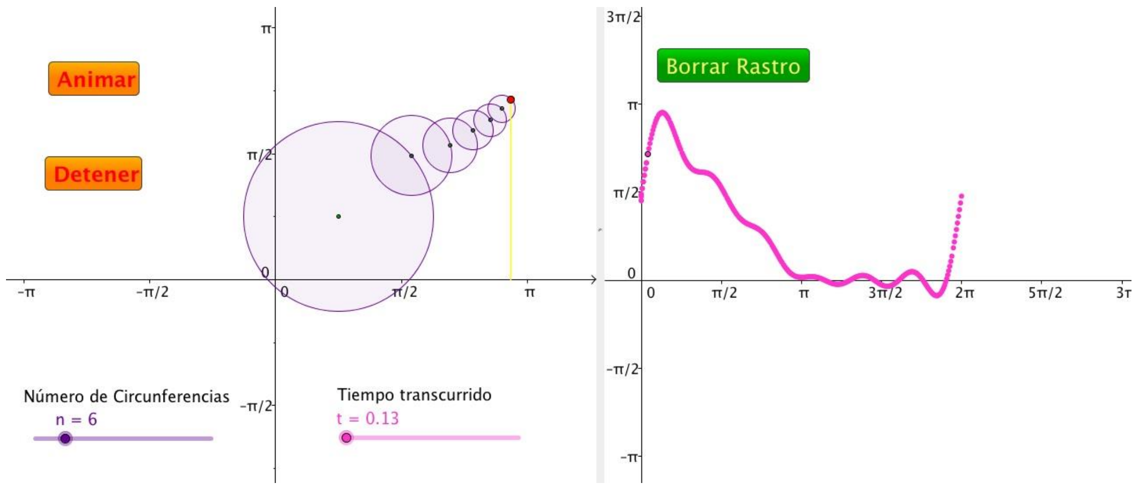


*Figura 5. Modelo de n circunferencias de la tarea #2.*

La Tarea #3, busca la generalización del modelo anterior, esto pues en las tareas #1 y #2 se dan los radios específicos, las velocidades específicas y la medida del ángulo inicial, por lo que se busca construir un modelo para las coordenadas del punto para *n* circunferencias (ver Figura 6).

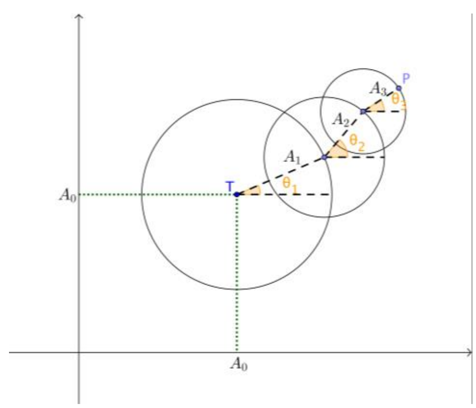

*Figura 6. Modelo general del movimiento de los planetas.*

Para finalizar se presentará un applet en Geogebra con el fin de buscar una similitud del modelo descrito con la Serie Trigonométrica de Fourier, y buscar condiciones que provoquen la igualdad (Ver Figura 7).

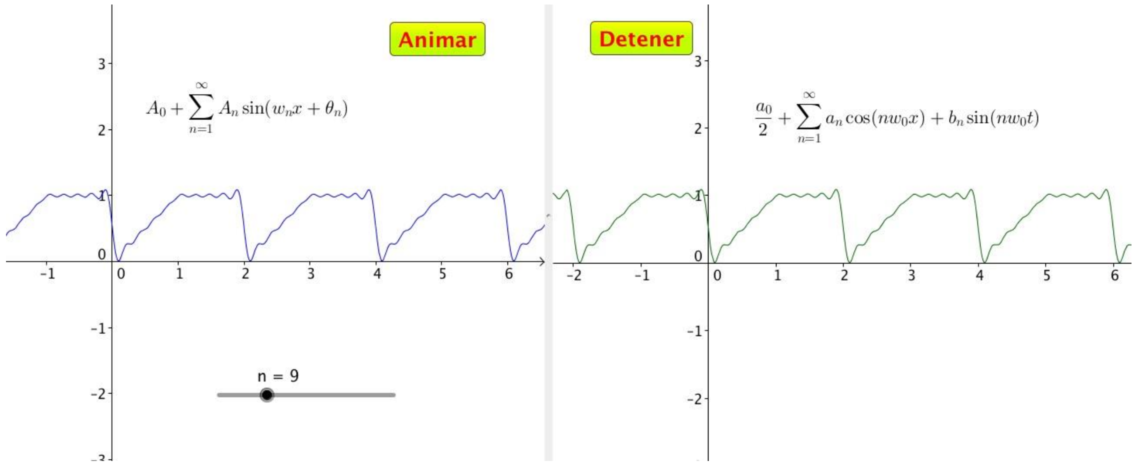


*Figura 7. Comparación del modelo construido con la stf.*

## Consideraciones Finales

Este diseño, hasta la fecha, ha sido piloteado dos veces, la primera con un grupo de estudiantes del programa de Maestría en Matemática Educativa del Cinvestav-IPN con el fin de revisar redacción, claridad de las ideas, tiempo de ejecución, entre otros factores; la segunda vez se implementó en un taller con profesor de nivel medio superior y superior, buscando revisar si las correcciones hechas a partir del primer pilotaje fueron acertadas, los resultados fueron satisfactorios, se espera a futuro implementarla con estudiantes de ingeniería.

Como se mencionó antes, la comprensión de la noción de convergencia de una serie de Fourier no es simple, por lo que se buscó crear apoyos para complementar el aprendizaje de la Serie Trigonométrica de Fourier, es decir, los materiales aquí expuestos no son, ni serán suficientes para comprender todas las nociones relacionadas con la STF, la idea es utilizarlos para apoyar la visualización de la noción de convergencia de la SFT.

## Referencias

Calvillo, N., & Cantoral, R. (2007). Intuición y visualización: demostración en la convergencia de sucesiones. In C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamerica de Matemática Educativa 20* (pp. 554–559). Clame.

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: un programma emergente. *La Matematica E La Sua Didattica*, *3*, 258–270.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2014). *Precálculo un enfoque visual*. México D. F.: Pearson.

Farfán, R. M. (1986). *Acerca de la representación de una función "arbitraria" en serie trigonométrica (Ensayo Histórico)*. Cinvestav-IPN.

Farfán, R. M. (1994). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería*. Cinvestav-IPN.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización* (Primera Ed). Barcelona, España: Editorial Gedisa.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Instituto Politécnico Nacional.

Muro, C., Camarena, P., & Del Carmen, R. (2007). Alcances de la teoría de Vergnaud en la representación de un problema complejo de ingeniería. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *10*(3), 401–419.

Rodríguez, M. (2009). *Una matemática funcional para el ingeniero. La serie trigonométrica de Fourier*. Cinvestav-IPN.

## Autores

*Fabián Wilfrido Romero Fonseca*; CINVESTAV, IPN. México; fwromero@cinvestav.mx

*Rosa María Farfán Márquez*; CINVESTAV, IPN. México; rfarfan@cinvestav.mx