

ANÁLISIS Y DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS EN EL CONTEXTO DE LAS RAZONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS UTILIZANDO GEOGEBRA

Diana del Carmen Torres Corrales, Gisela Montiel Espinosa, Omar Cuevas Salazar, Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Evaristo Trujillo Luque, Mucio Osorio Sánchez

Resumen

El estudiante y/o profesor en servicio de nivel básico (secundaria), medio superior y/o nivel superior será capaz de analizar y diseñar actividades didácticas referentes a las razones y funciones trigonométricas con el uso del software GeoGebra. Esto será posible a través de la epistemología de la construcción social de conocimiento trigonométrico de Montiel (2013) y de una organización didáctica desde la perspectiva de evidencia en la acción que propone Molina (2013) y caracterizada de cinco momentos por Torres (2014). En el cual se propiciará la necesidad de utilizar las razones trigonométricas a partir de la construcción de un círculo, para favorecer la transición a las funciones trigonométricas a través del análisis gráfico de acuerdo a sus parámetros, logrando con ello la resignificación del pensamiento trigonométrico (uso coherente de nociones previas, de proporcionalidad y de construcción geométrica).

Palabras clave: razones y funciones trigonométricas, enseñanza-aprendizaje, actividad didáctica, resignificación.

Propósito y alcance

Que el profesor sea capaz de:

- Reconocer el contenido matemático previo y nuevo de la enseñanza-aprendizaje de las razones y funciones trigonométricas:
 - esto será posible a través del análisis de las prácticas sociales para la construcción del conocimiento trigonométrico que menciona Montiel (2011) en los momentos de introducir las razones y funciones trigonométricas.
- Reflexionar sobre la forma didáctica de la enseñanza-aprendizaje del tema de Trigonometría en el contexto de las razones y funciones trigonométricas:
 - por ello se busca una organización didáctica denominada evidencia en la acción.
 - contrastar la costumbre didáctica que mencionan Montiel y Jácome (en prensa) de introducir la enseñanza-aprendizaje de las razones trigonométricas con el triángulo rectángulo.
 - reconocer que el círculo es más que un medio didáctico para la transición de las razones a las funciones trigonométricas, pues como menciona Montiel (2011), éste

es la verdadera esencia de lo trigonométrico, que surge de desentrañar su naturaleza geométrica.

- Hacer el ejercicio de situar la enseñanza-aprendizaje de las razones y funciones trigonométricas a través del análisis y generación de actividades didácticas con GeoGebra prevaleciendo el pensamiento trigonométrico (proporción y construcción geométrica).

La trascendencia de este laboratorio es la resignificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de las razones y funciones trigonométricas, de forma que el profesor pueda analizar y diseñar actividades didácticas con el uso de GeoGebra prevaleciendo el pensamiento proporcional y coherente de estos saberes matemáticos.

Es deseable que el perfil del participante de este laboratorio sea estudiante y/o profesor en servicio de nivel básico (secundaria), medio superior y/o nivel superior, que tenga conocimiento o haya impartido asignaturas donde se utilicen las razones y funciones trigonométricas; además de tener nociones básicas del uso del software GeoGebra.

Marco teórico

Desde el enfoque teórico de la Socioepistemología se toma la epistemología de la construcción social de conocimiento trigonométrico (ver Tabla 1) de Montiel (2011) en los momentos donde emerge el uso de la razón y función trigonométrica.

Práctica Social		
	Anticipación	Predicción
<i>Práctica Referencia</i>	de Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física
<i>Contexto</i>	Estático-Proporcional	Dinámico-Periódico
<i>Lenguaje</i>	Geométrico-Numérico	Curvas-Ecuaciones
<i>Racionalidad</i>	Helenística- Euclidiana	Física-Matemática
<i>Herramienta</i>	Razón Trigonométrica	Función Trigonométrica
<i>Variables</i>	(longitud) en ángulos (en grados)	(distancia) tiempo (radián-real)
<i>Escala de tiempo</i>	Finita	Infinitesimal-Infinito

Tabla 1. Principios básicos para la construcción social del conocimiento trigonométrico en un escenario histórico. Nota. Fuente: Montiel (2011).

En estos dos momentos de construcción social del conocimiento trigonométrico, la autora identifica un cambio en el paradigma que rige la actividad matemática y que es necesario para estudiar el movimiento, en el paso de la anticipación a la predicción (Montiel 2011, citado en Torres, 2014).

La Socioepistemología reconoce que son las prácticas sociales las que norman la construcción del conocimiento matemático, por lo que es necesario reconocer su manifestación a través de sus usos en distintos escenarios, por ejemplo, el histórico, el profesional, el cotidiano, e incluso el escolar, cuando se experimentan diseños no tradicionales (Montiel y Buendía, 2012).

Producto del discurso matemático escolar, es que el verdadero significado del saber trigonométrico se diluye, transforma e incluso se pierde, provocando fenómenos didácticos. En la epistemología de prácticas mostrada en la Tabla 1, la autora caracteriza dos fenómenos didácticos, (1) aritmetización trigonométrica, cuando se introduce a las razones trigonométricas y (2) extensión geométrico-analítica, en el paso de las razones a las funciones (Montiel, 2011).

Es por ello, que se vuelve fundamental buscar la resignificación de este saber trigonométrico con aquellas condiciones que le dieron origen y que siguen siendo válidas para las problemáticas del entorno actual del estudiante. La componente geométrica, por ejemplo, es una de las principales que se ha perdido en el avance y tecnicismo del Álgebra, difuminado su verdadero significado y sentido para el escenario donde emerge su uso, y efectivamente son los procesos de construcción geométrica los que dan la base a la epistemología de prácticas y que, por lo tanto, constituyen el contexto en el que se resignifica la razón trigonométrica (Montiel y Jácome, en prensa).

Desde la Socioepistemología el término resignificar se utiliza para referirse al proceso continuo de darle significado al saber matemático a través de sus usos, esto es, la significación que subyace a la actividad y no necesariamente al objeto matemático (Montiel y Buendía, 2012).

Para lograr la resignificación en este laboratorio es que la organización didáctica será realizada a través de la perspectiva de evidencia en la acción (*ver* figura 1) que propone Molina (2013), caracterizada en Torres (2014); esta metodología se elige por la evidencia empírica de resignificación de las razones trigonométricas que tiene la investigación de Torres (2014) con estudiantes de ingeniería.



Figura 1. Perspectiva de evidencia en la acción para la resignificación.

Una forma concreta de entender el funcionamiento de esta metodología, es reflexionar sobre la estrategia publicitaria de las empresas para vender un producto. Por ejemplo, una empresa dedicada a la venta de salchichas de pavo desea que el aumento de utilidades, para ello identifica la necesidad de vender más. Para lograrlo establece la estrategia de la permanencia en medios masivos de comunicación de forma que el cliente, escuche y lea permanentemente el producto, por ello la consistencia en los medios de difusión es la clave de venta. Para lograr el aumento de utilidades, además de la publicidad lleva hasta el cliente su producto en supermercados y tiendas de autoservicio de forma que el cliente lo pruebe sin comprarlo, creando con ello la necesidad y la convicción de querer adquirirlo.

Para el caso del presente laboratorio, la condición existente que pretende ser transformada es el fenómeno didáctico producto del discurso matemático escolar al hacer uso de las razones y funciones trigonométricas. Para lo cual, se hará uso de condiciones estratégicas de diseño en el círculo y una organización didáctica fundamentada en la epistemología de prácticas de lo trigonométrico. Con estas condiciones se pretende dar la resignificación ya que se analizará la actividad matemática desde el individuo a través de sus prácticas, porque son estas últimas las que dotan de nuevas significaciones a los objetos y conceptos, pese a la pobreza de sus antiguos usos. Dado lo anterior se establece un contexto basado en el análisis y diseño de construcciones geométricas con el uso de GeoGebra para dar coherencia a las nociones matemáticas (Torres, 2014).

Método

En una activa participación de los estudiantes y/o profesores, las estrategias de enseñanza a seguir para la realización de este laboratorio son:

- Momento 1: se realizará una lluvia de ideas de manera grupal sobre el contenido matemático (conocimiento previo y nuevo que se utilizará), la forma didáctica de la enseñanza-aprendizaje y las dificultades que ha identificado se presentan en Trigonometría en el contexto de las razones y funciones trigonométricas.
- Momento 2: se contextualizará el momento escolar donde se aborda la Trigonometría por primera vez en el currículo mexicano a través de documentos oficiales de la Secretaría de Educación Pública (SEP), en el contexto de las razones y funciones trigonométricas, para hacer el ejercicio de situar su proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Momento 3: se hará una construcción geométrica en GeoGebra sobre la necesidad de utilizar las razones trigonométricas y a partir de ella se solicitará a los asistentes que diseñen una actividad didáctica para su enseñanza-aprendizaje.
- Momento 4: se realizará y analizará una actividad didáctica donde se definen las razones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente) a partir de la construcción del seno.
- Momento 5: se realizarán dos construcciones geométrica de la función seno de un ángulo, una a partir del círculo en GeoGebra donde se pedirá a los asistentes diseñen

una actividad didáctica para su enseñanza-aprendizaje y una construcción más sobre el estudio de los parámetros de la función seno.

Diseños didácticos

Para el primer momento del laboratorio se llenará una tabla (ver Tabla 2), la cual se dará de forma individual a cada participante en papel y será llenada de manera grupal. Posteriormente esta lluvia de ideas será el insumo para generalizar las dificultades de las razones y funciones trigonométricas, identificar los elementos de la forma didáctica de la enseñanza-aprendizaje y los contenidos matemáticos necesarios.

El primer momento es clave para el análisis del resto de las actividades, puesto que en él se enfatizará sobre las prácticas sociales y los elementos de la construcción social de lo trigonométrico de Montiel (2011) para utilizar las razones y funciones trigonométricas. Además aquí se busca que los participantes reflexionen sobre la costumbre didáctica enseñanza-aprendizaje de las razones trigonométricas mediante el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas a través del círculo, considerándose este último solo un medio didáctico para dicha transición.

Lluvia de ideas de Trigonometría				
Herramienta	Contenido matemático		Forma didáctica de la enseñanza-aprendizaje	¿Qué dificultades presenta el estudiante?
	¿Qué herramientas matemáticas previas necesita el estudiante para aprender?	¿Qué nuevas herramientas matemáticas aprenderá el estudiante?	¿Cuál es la manera de enseñar? <ul style="list-style-type: none"> • Organización didáctica. • Rol del profesor. • Rol del estudiante. • Tecnología (pizarrón, libro de texto, hojas de trabajo, calculadora, software). 	Especifique qué concepciones erróneas tiene, qué hace o que omite hacer.
Razones trigonométricas				
Funciones trigonométricas				

Tabla 2. Lluvia de ideas de Trigonometría, elementos para el análisis y diseño de actividades didácticas
 Nota. Fuente: Elaboración propia (2015).

Para el segundo momento se realizará un recorrido por el portal de la Secretaría de Educación Pública (SEP), para identificar que en México el tiempo escolar donde se introduce por primera vez la Trigonometría es en el tercer año de educación básica secundaria, en el penúltimo tema del contenido del curso. En este tema el programa de estudio 2011 (ver figura 2) muestra que los lados de un triángulo rectángulo guardan

proporción al referirse a un mismo ángulo en grados y posteriormente hace el uso explícito de las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) como cociente de los lados de un triángulo rectángulo. También se propone que para profundizar la comprensión de las razones trigonométricas se realice a través del círculo unitario, el uso de la calculadora y calcular lados y ángulos faltantes que se formen con el eje x . Se menciona explícitamente la construcción del círculo unitario con el software GeoGebra (*ver* figura 3).

SEP
 SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

EDUCACIÓN BÁSICA

Programa de estudio - Secundaria
Tercer grado - Matemáticas

ASIGNATURAS SECUNDARIA

Tercer grado - Matemáticas

- Inicio
- Programa
- Orientaciones didácticas y Planes de Clase

Orientaciones didácticas

Las orientaciones didácticas proporcionan una visión más amplia del contenido que se pretende estudiar, por ejemplo, la importancia de éste como parte de la matemática básica, sus vínculos con otros contenidos, el nivel de profundidad que se pretende alcanzar, algunos problemas en los que el contenido tiene aplicación y, en algunos casos, se mencionan recursos adicionales que se pueden utilizar para el estudio.

Bloque I Bloque II Bloque III **BLOQUE IV** Bloque V

BLOQUE IV

Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el n -ésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente**
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

FIGURAS Y CUERPOS

9.4.2 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

MEDIDA

9.4.3 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

9.4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

9.4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y PLANES DE CLASE DE LOS CONTENIDOS:

9.4.1 9.4.2 9.4.3 9.4.4 **9.4.5** 9.4.6 9.4.7

Figura 2. Las razones trigonométricas en el plan de estudios de secundaria mexicana. Adaptado de SEB, 2011.

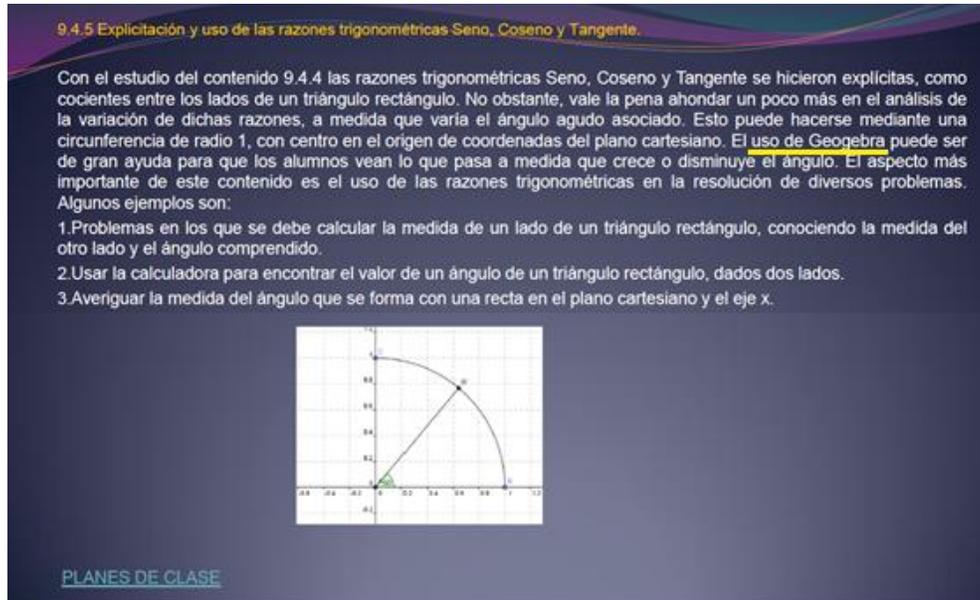


Figura 3. Recomendaciones de enseñanza-aprendizaje de las razones trigonométricas en el plan de estudios de secundaria mexicana. SEB, 2011.

En la educación media superior, se retoma en un tópico las razones trigonométricas y posteriormente se estudian las funciones trigonométricas. En México ante la diversidad de direcciones y enfoques de educación media superior, se tienen bachilleratos en modalidad escolarizada (especializados por áreas, con carreras técnicas, telebachillerato) y en modalidad abierta (SEMS 2014).

De igual manera en la educación superior, se tienen diferentes planes de asignatura de acuerdo a las necesidades de los programas educativos que dependen de la institución. En los programas de ingeniería, por ejemplo, se abordan las razones trigonométricas en asignaturas de Precálculo y las funciones trigonométricas en Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. En el Instituto Tecnológico de Sonora, es utilizada la propuesta metodológica de Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2012), donde en el tema 7 se aborda el estudio de las funciones trigonométricas predominando la graficación y aplicación en problemas de contexto.

En un tercer momento se elaborará una construcción geométrica con GeoGebra (ver figura 4) y a partir de ella se solicitará a los asistentes que diseñen una actividad didáctica en equipos enfocada a estudiantes del nivel educativo que trabajen, con el objetivo de que sean utilizadas las razones trigonométricas para determinar los lados del triángulo y el valor del ángulo faltante. Esta construcción geométrica fue elaborada a partir de la perspectiva constructivista de Moore (2009, 2010) que señala “el uso coherente de nociones previas a la razón trigonométrica, la acción colaborativa en situaciones problema y con el uso de tecnología (*applets* de GeoGebra) permiten una profunda comprensión”.

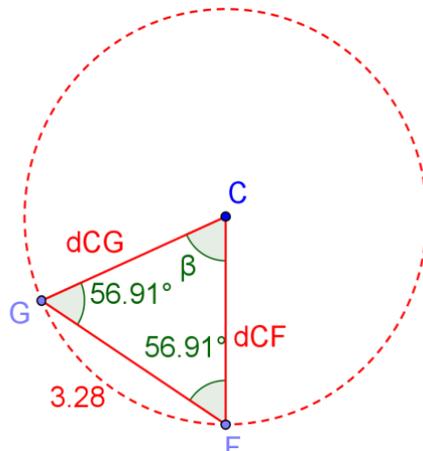


Figura 4. Construcción geométrica para diseñar una actividad didáctica con el uso de razones trigonométricas.

Para el cuarto momento se abordará el caso de las razones trigonométricas mediante el uso de GeoGebra y el análisis de una actividad didáctica donde se definan las razones seno, coseno y tangente a partir de la construcción del seno de un ángulo que varía (ver figura 5). Esta actividad didáctica fue diseñada principalmente para el estudio de las razones trigonométricas en Precálculo, la cual puede ser útil en la educación secundaria y media superior. Esta construcción geométrica fue elaborada a partir del análisis de los diseños de Vohns (2006) y Weber (2008) para la enseñanza-aprendizaje de conceptos trigonométricos, donde prevalece la proporción a partir de círculos de distintos tamaños, pues “lo trigonométrico se desarrolla con razonamientos de medición y estructuración geométrica” (Vohns, 2006).

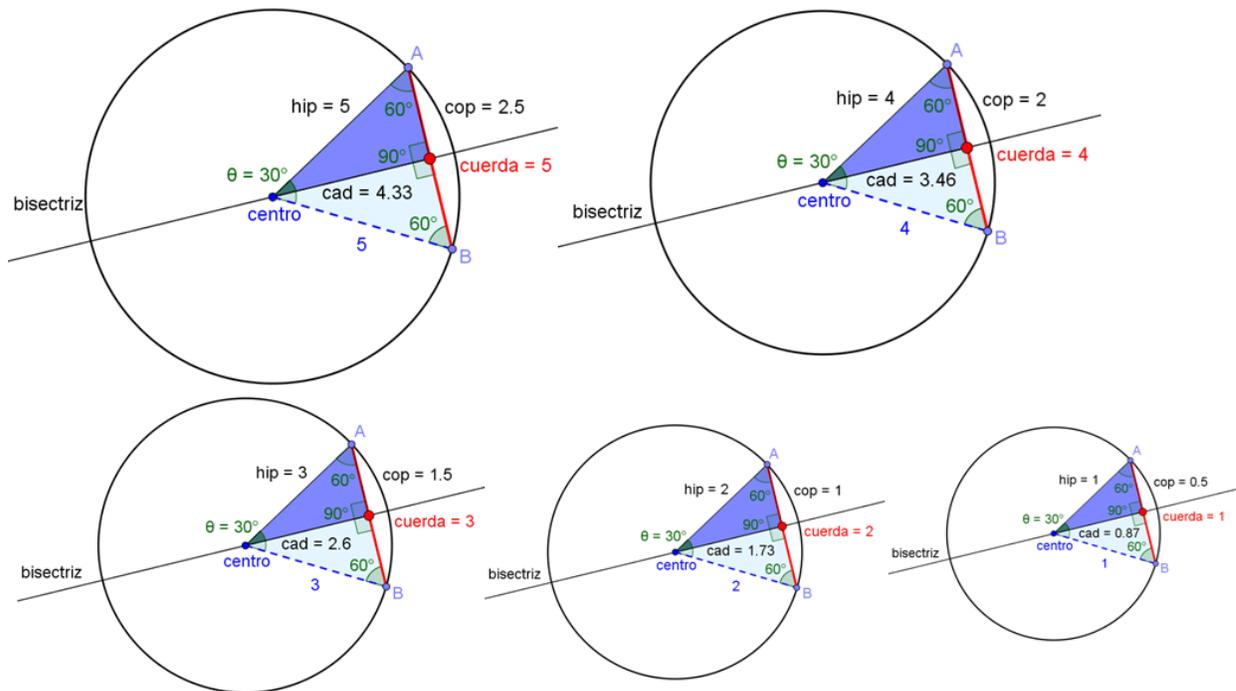


Figura 5. Construcción de la razón trigonométrica seno de un ángulo.

En un quinto momento se realizará la construcción geométrica de la función seno del ángulo en GeoGebra a partir del círculo y se pedirá a los asistentes diseñen una actividad didáctica para su enseñanza-aprendizaje (ver figura 6). Este diseño pretende que se vinculen las razones y las funciones trigonométricas ya que parten del círculo, con la formación del triángulo rectángulo inscrito y los ángulos están dados en grados y radianes; se elige la construcción del seno de un ángulo para dar un ejemplo del contexto para la transición de las razones a las funciones trigonométricas.

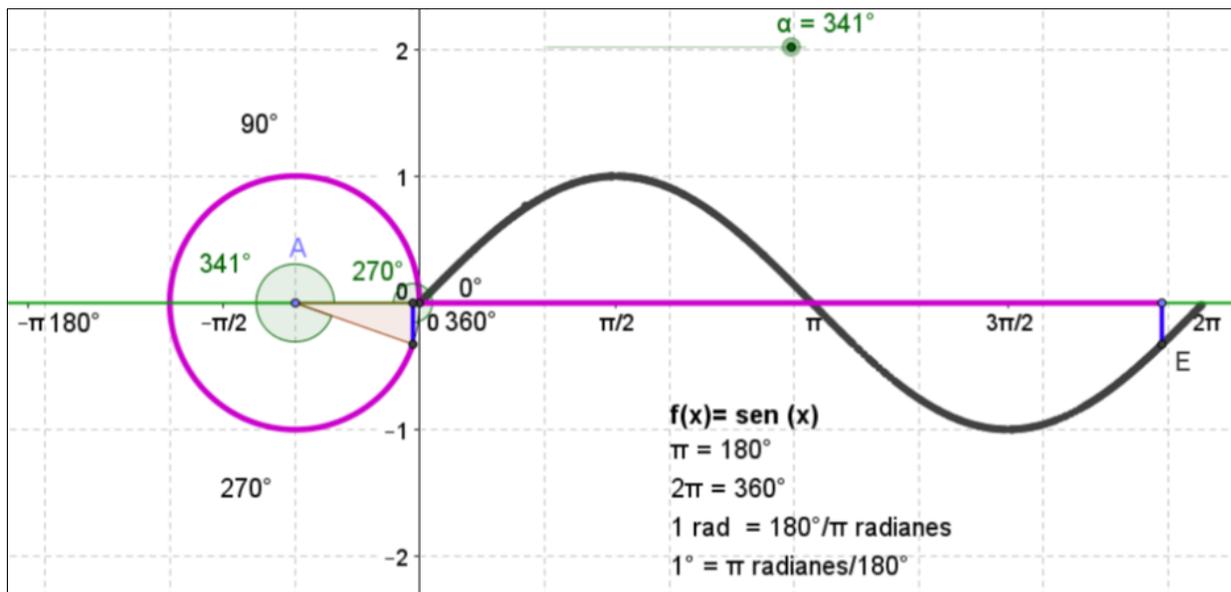


Figura 6. Construcción geométrica para diseñar una actividad didáctica con el uso de la función trigonométrica seno a partir del círculo.

Una vez que se ha vinculado las razones y funciones trigonométricas se estudiará la función seno respecto a sus parámetros amplitud, balance vertical, compresión y desfase horizontal (ver figura 7). La enseñanza-aprendizaje de la función trigonométrica vista de esta manera está enfocada principalmente en el nivel superior, en la asignatura de Cálculo Integral desde la propuesta del libro de Salinas *et. al.*, (2012).

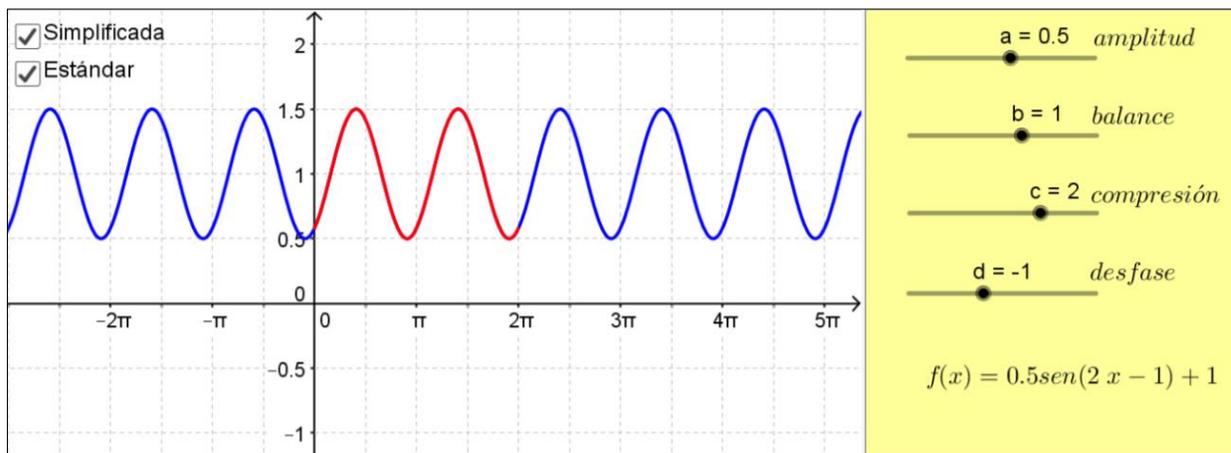


Figura 7. Construcción geométrica para el análisis de los parámetros de la función trigonométrica seno.

Consideraciones finales

Este laboratorio pretende que el participante reflexione, analice y diseñe actividades didácticas con el uso de GeoGebra de las razones y funciones trigonométricas, de forma que resignifique sus conocimientos previos sobre la forma de enseñanza-aprendizaje que ha realizado.

Los diseños analizados y elaborados en el presente laboratorio fueron experimentados en cuatro poblaciones de estudiantes de ingeniería en el Instituto Tecnológico de Sonora. Tres puestas en escena fueron sobre las razones trigonométrica, una de ellas fue en aula extendida (de manera voluntaria y sin calificación) en la asignatura de Fundamentos de Matemáticas (curso de Precálculo) producto de la tesis de maestría de la primera autora de este laboratorio. Dos puestas en escena en grupos de clase en el semestre agosto-diciembre 2014 y enero-mayo 2015. En el contexto de las funciones trigonométricas se realizó una puesta en escena en el aula de clases en un curso de Cálculo I en el semestre enero-mayo 2015; todas las puestas en escena fueron en aulas de cómputo que cuentan con una computadora para cada estudiante con GeoGebra, pizarrón, videoprojector y hojas de trabajo.

De las cuatro puestas en escena, se tienen evidencias de la resignificación lograda por los estudiantes al interactuar en el contexto del círculo para la enseñanza-aprendizaje de las razones y funciones trigonométricas. Dicha resignificación fue interpretada bajo la epistemología de prácticas de lo trigonométrico de Montiel (2011), pues esta permite reconocer las prácticas y elementos propios de la razón y función trigonométrica de forma situada en una población.

En las cuatro puestas en escena mencionadas, se reconoce a la resignificación como aquellas argumentaciones verbales y escritas de los estudiantes, los usos de saberes matemáticos como el ángulo en grados y radianes, la resolución de problemas en cálculo de ángulos y longitudes en triángulos rectángulos, la gráfica generada de la función seno y coseno con efectos de amplitud, desfase horizontal y vertical y periodo para la modelación de problemas de contexto de ingeniería.

Agradecimientos

Con respeto y gratitud para los profesores y compañeros del Departamento de Matemáticas que hicieron recomendaciones al presente trabajo y al Instituto Tecnológico de Sonora por facilitar los medios para lograrlo.

Referencias bibliográficas

- Molina, N. (2013). Discusiones acerca de la resignificación y conceptos asociados. *Patrimonio: Economía Cultural y Educación para la Paz (MEC-EDUPAZ)* (3), 39-63.
- Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.).

- Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones*, 55-82. México: Lectorum.
- Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*. Distrito Federal, México: Secretaría de Educación Pública.
- Montiel, G. y Jácome, G. (en prensa). Significado trigonométrico en el profesor. Aceptado para su publicación en *Boletim de Educação Matemática (Bolema)*.
- Moore, K. C. (2009). An investigation into precalculus students' conceptions of angle measure. Paper presented at the Twelfth Annual Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education (SIGMAA on RUME) Conference, Raleigh, NC: North Carolina State University.
- Moore, K. C. (2010). The role of the radius in students constructing trigonometric understandings. In P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 815-822. Columbus, OH: The Ohio State University.
- Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Escobedo, J. y Garza, J. (2012). *Cálculo aplicado: Competencias Matemáticas a través de contextos*. Tomo I. México: Editorial Cengage Learning.
- Subsecretaría de Educación Básica (SEB) (2011). Orientaciones didácticas y Planes de Clase de Matemáticas del Tercer Grado de Secundaria. Recuperado el 18 de mayo de 2015 de <http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/index.php/sec-mat-tercer-grado?sid=748>
- Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS) (2012). Educación media superior en México. Recuperado el 18 de mayo de 2015 de http://www.sems.gob.mx/es_mx/sems/reforma_educativa_educacion_media_superior
- Torres, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería* (Tesis de maestría). Instituto Tecnológico de Sonora, México.
- Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry—an empirical approach. *ZDM* 2006 38(6), 498-504.
- Weber, K. (2008). Teaching Trigonometric Functions: Lessons Learned from Research. *Mathematics Teacher* 102(2), 144-150.

Autores

Diana del Carmen Torres Corrales; ITSON. México ; diana.torres@itson.edu.mx

Gisela Montiel Espinosa; CINVESTAV-IPN. México; gmontiele@cinvestav.mx

Omar Cuevas Salazar; ITSON. México ; omar.cuevas@itson.edu.mx

Jesús Eduardo Hinojos Ramos; ITSON. México ; jesus.hinojos@itson.edu.mx

Evaristo Trujillo Luque; ITSON. México ; evaristo.trujillo@itson.edu.mx

Mucio Osorio Sánchez; ITSON. México; mucio.osorio@itson.edu.mx