ESTRUCTURAS ARGUMENTATIVAS PRESENTES EN LA PRODUCCIÓN DE UNA PRUEBA: EL CASO DE LA IGUALDAD DE ÁREAS EN GEOMETRÍA

Johnny Alfredo Vanegas Díaz

Resumen

La presente investigación analiza las *estructuras argumentativas* que se configuran en un grupo de futuros profesores de matemáticas, cuando se involucran en la producción de una *prueba*. De manera particular, se ejemplifican tres estructuras argumentativas: *abductiva*, *inductiva* y *deductiva*; sustentadas en el *modelo fundamental de Toulmin* (1958), las cuales tienen lugar en la reconstrucción de los argumentos dados por los estudiantes frente a una tarea particular, que consistía en probar que una recta que pasa por el centro de un cuadrado, lo divide en dos regiones de igual área. A modo de conclusión se discuten posibles relaciones entre las estructuras identificadas y la prueba en matemáticas.

Palabras claves: modelo fundamental de Toulmin, estructuras argumentativas, prueba formal, inferencia abductiva, inferencia inductiva, inferencia deductiva.

Contextualización y planteamiento del problema

La presente investigación se inscribe en el marco de la producción académica desarrollada en la asignatura: *Metodología de la Enseñanza de la Matemática II*, del Programa de Maestría en Ciencias, Área Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero. Surge como resultado del estudio de diversos artículos de investigación concernientes a la argumentación en el campo de la Matemática Educativa.

La revisión de literatura permitió identificar dos líneas de trabajo en el análisis de los argumentos producidos por estudiantes y matemáticos, a saber: a) el contenido de los argumentos y b) la estructura de los argumentos (Inglis, Mejía-Ramos & Simpson, 2007). Además, dicha revisión mostró que un análisis estructural de la argumentación posibilita una mayor comprensión de la relación entre argumentación y prueba en matemáticas (Knipping, 2003; Pedemonte, 2007; Knipping & Reid, 2015).

Para la elaboración de análisis estructurales de los argumentos, las investigaciones en Matemática Educativa frecuentemente han empleado un modelo basado en el trabajo de Toulmin (1958). Por ejemplo, en Inglis et al. (2007) se utiliza la versión del esquema completo de Toulmin: *dato*, *garantía*, *soporte*, *calificador modal*, *refutación* y *pretensión*, para analizar los argumentos individuales construidos por estudiantes de matemáticas, resaltando el papel que juegan tanto el calificador modal como la refutación, en las argumentaciones producidas. En cambio, otras investigaciones (Pedemonte, 2007; Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2011; Krummheuer, 2015) enfocadas en la reconstrucción de las estructuras argumentativas suelen omitir esos elementos.

La presente investigación, únicamente considera los siguientes elementos del esquema de argumentación de Toulmin: dato, garantía y pretensión. En conjunto dichos elementos constituyen el *modelo fundamental* de Toulmin. Diversos investigadores (Boero et al., 2011) han demostrado que este modelo permite representar las estructuras argumentativas de los estudiantes en términos de estructuras: abductivas, inductivas y deductivas. Incluso, recientemente Conner y sus colaboradores (2015) trabajaron con el modelo fundamental y lo combinaron con aspectos distintivos del razonamiento, desde la propuesta de Pierce, para identificar tipos de razonamientos en *argumentaciones colectivas* (múltiples personas trabajando juntas para establecer una pretensión).

El objetivo de esta investigación está vinculado con la línea de trabajo desarrollada por Boero et al. (2011). En este sentido, se pretende analizar, con base en el modelo fundamental de Toulmin, las diferentes estructuras argumentativas que se configuran en un grupo de futuros profesores de matemáticas y discutir a modo de conclusión, posibles relaciones de estas estructuras con la prueba en matemáticas. No obstante, a diferencia de otras investigaciones que también se han desarrollado en esta dirección (eg. Pedemonte, 2007, Pedemonte & Reid, 2011) aquí se quiere mostrar que una tarea particular, puede dar lugar a diversas estructuras argumentativas y que estas guardan una estrecha relación con la prueba.

En el marco de estas delimitaciones, esta investigación se propone abordar la siguiente pregunta: ¿Qué estructuras argumentativas se configuran en un grupo de estudiantes de licenciatura en matemáticas, durante la producción de una prueba?

Marco de referencia conceptual

En esta investigación el modelo fundamental de Toulmin (1958) es usado para analizar y comparar, desde un punto de vista estructural, las argumentaciones y sus posibles relaciones con laprueba en matemáticas. Este modelo está constituido por tres elementos: dato, garantía y pretensión. Estos elementos pueden representarse de acuerdo con el siguiente esquema (figura 1).

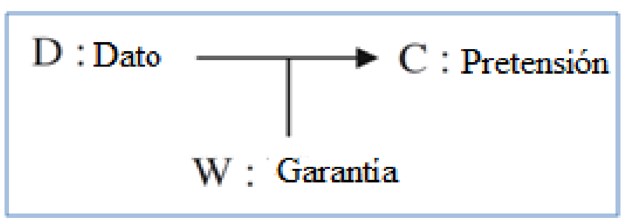


Figura1. Modelo fundamental de Toulmin (1958)

En la terminología de Toulmin (1958), la argumentación es la actividad de plantear pretensiones, apoyarlas con razones, criticar esas razones y refutar esas críticas. La pretensión (C) significa, tanto el punto de partida como el punto de llegada en la argumentación, donde el dato (D) representa las razones o hechos específicos en favor de la pretensión, mientras que la garantía (W) se refiere a enunciados generales que posibilitan la conexión entre las razones y la pretensión; apelando a reglas, definiciones y analogías (Atienza, 2005).

Con base en el modelo fundamental de Toulmin se pueden representar diferentes estructuras argumentativas: abductiva, inductiva y deductiva (Pedemonte, 2007). Incluso, es posible clasificar ciertos tipos de abducción: *undercoded*, *overcoded* y *creative* (Pedemonte, 2011). En esta investigación se considera la representación propuesta por Pedemonte (2007), puesto que los diferentes tipos de abducción no tuvieron presencia en la tarea que aquí se ejemplifica. A continuación se ilustra la representación de la estructura abductiva (figura 2) y la estructura inductiva (figura 3) de la argumentación. La estructura deductiva se corresponde con el modelo fundamental (figura 1).

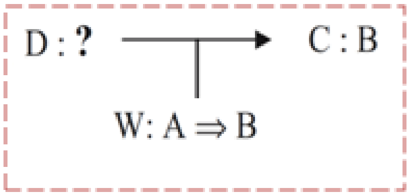


Figura2. Estructura abductiva

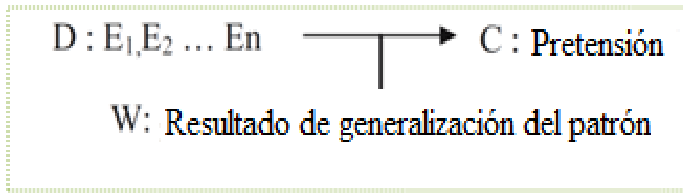


Figura 3. Estructura inductiva

En una estructura abductiva, la pretensión (B) es probable pero no certera, puesto que depende de la validez de la razón (A), la cual debe ser organizada con otras razones (D: ?) para aplicar alguna regla de inferencia (W: A $\Rightarrow$ B). El signo de interrogación significa que hay que buscar un orden para los datos, antes de aplicar la regla de inferencia.

Por otro lado, en la estructura inductiva, la pretensión se construye a partir de algunos casos particulares (D: E_1, E_2,..., E_n) donde la identificación de un aspecto clave permite pensar la generalidad de los casos. En este sentido, la garantía (W) puede entenderse como el resultado de la generalización del patrón, pero la pretensión (C) puede no resultar certera.

Finalmente, una estructura deductiva queda determinada cuando la pretensión se construye a partir de hechos y reglas de inferencia, sustentadas en conocimientos de la matemática, lo cual imprime certeza a la pretensión. Así, lo que distingue la deducción de otro tipo de inferencia es la garantía y la naturaleza del soporte. Entonces una prueba formal se entiende como una justificación de carácter deductivo que encadena en forma explícita razones a través de leyes matemáticas (axiomas, definiciones, teoremas, etc.), desde la información conocida (dato) hasta el enunciado esperado (pretensión).

Diseño del estudio

El contexto de la situación

Con el objeto de reconstruir las estructuras argumentativas de un grupo de futuros profesores de matemáticas seusó como instrumento para la recolección de datos una situación problemática conformada por tres tareas. No obstante, esta investigación se focaliza en la primera tarea y deja para estudios posteriores en análisis derivado de las tareas restantes. El contexto de la situación tomó como referente un problema propuesto por Santos-Trigo (2008, p.164) cuyo objetivo era que los estudiantes representaran y exploraran relaciones matemáticas por medio del uso de un software dinámico. En contraste, la situación que aquí se presenta (figura 4) fue pensada para desarrollarse en un contexto de lápiz y papel.

Sara y Francisco son estudiantes encargados de la siembra de hortalizas en el jardín de la escuela; se les asigna un pedazo de tierra en forma de cuadrado y deciden repartirse el terreno en dos partes de tal manera que a cada uno le corresponda la misma área. Las figuras 1 y 2 representan las dos formas que consideraron Sara y Francisco, respectivamente, para dividir el terreno. Otro estudiante, Johnny, les sugiere seleccionar un punto sobre cualquier lado del cuadrado y trazar una recta que pase por ese punto y el centro del cuadrado (figura 3). Johnny afirma que esa recta divide el cuadrado en dos regiones que tienen la misma área. **Tarea 1.** ¿Es cierta la afirmación de Johnny?

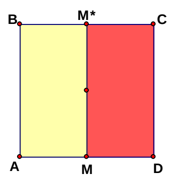


Figura 1. M y M son los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$*

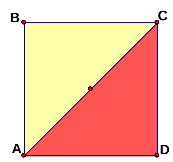


Figura 2. $\overline{AC}$ es la diagonal del cuadrado

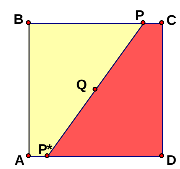


Figura 3. Q es el centro del cuadrado. P y P están sobre el perímetro.*

Figura 4. Contexto de la situación

La población y contexto del estudio

Los participantes fueron 14 estudiantes de un programa de licenciatura en matemáticas, los cuales se encontraban cursando el cuarto semestre. Estos estudiantes fueron distribuidos en cuatro grupos de trabajo (G_1,G_2, G_3 y G_4) destacándose para los intereses de esta investigación las producciones desarrolladas por los tres primeros grupos (G_1, G_2, G_3). La situación fue implementada como parte de una actividad de clase, puesto que teóricamente cada uno de los participantes contaba con los prerrequisitos matemáticos fundamentales para enfrentar la situación, tales como: criterios de congruencia de triángulos y fórmulas para calcular áreas de polígonos. Además, las actividades desarrolladas por los participantes, en sesiones anteriores de clase, permitió verificar que los estudiantes estaban familiarizados con la producción de pruebas en matemáticas.

Método de recolección de datos

La recolección de datos se hizo en una sesión de clase de 2 horas, distribuidas de tal forma que los estudiantes lograrán trabajar en argumentaciones colectivasal interior de pequeños grupos. Al final de la sesión, se le solicitó a cada grupo asignar un representante para que explicara la prueba ante toda la clase. En este sentido, tanto las producciones de los grupos como sus respectivas explicaciones jugaron un papel fundamental para reconstruir sus estructuras argumentativas. Se hizo entonces un seguimiento sistemático y continuo de cada una de las producciones de los estudiantes, empleando para ello dos cámaras de video y dos grabadoras de voz. Del mismo modo, también se filmaron los momentos en que los representantes de cada grupo explicaban sus producciones.

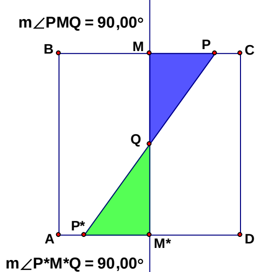
Análisis de los datos

Los tres episodios que se discuten en este apartado ilustran que en el análisis estructural de los argumentos producidos por los estudiantes, la estructura argumentativa no siempre es deductiva, sino que además pueden presentarse estructuras abductivas e inductivas.

Para la identificación de las diferentes estructuras argumentativas se tuvieron en cuenta las producciones escritas de los estudiantes, así como las explicaciones dadas por un integrante de cada grupo de trabajo. Los fragmentos discursivos sirvieron para no dar lugar a la ambigüedad,puesto que los fragmentos escritos, usualmente suministraban poca información para reconstruir las estructuras argumentativas. Con el objeto de hacer explícita la estructura derivada de los procesos argumentativos de los participantes, en cada fragmento discursivo, se presta especial atención a las declaraciones del representante de cada grupo,estableciendo correspondencias directas con algún elemento constitutivo del modelo fundamental de Toulmin. En algunos casos, la explicación está acompañada de una gráfica que es necesaria para entender sobre qué se está hablando. Cabe resaltar que dicha representación ha sido sometida a ciertos arreglos de imagen y forma, únicamente con el objeto de mejorar la visibilidad de los objetos que fueron citados por el representante del grupo.

Ejemplo de una estructura abductiva

Esta estructura queda determinada a partir de la suposición de un hecho, que de ser cierto permite validar la pretensión a la que se quiere llegar. El proceso de producción y explicación de los argumentos planteados por G_2configuran una estructura abductiva que puede hacerse explicita a través del siguiente fragmento:



Nosotros según trazamos la mediatriz de este segmento (refiriéndose al segmento $\overline{BC}$) y es obvio que tiene que interceptar el punto medio del cuadrado, entonces **aquí se forman ángulos de 90°** (señalando los ángulos $\measuredangle PMQ$ y $\measuredangle P^*M^*Q$: **D_1**) y también por criterio este de ...**éstos son iguales** (refiriéndose a las congruencias: **D_2** y **A**)...ya por criterio de congruencia lado..., por el **criterio de congruencia**(identificación de W) de lado, ángulo...de lado, lado, ángulo son iguales los triángulos (señalando el ΔMPQ y el ΔM^*P^*Q: **B**). Estos son iguales (refiriéndose a D_2) porque como es la mediatriz, el punto medio la divide en dos partes iguales. Ahora como dice Euclides, si a cosas iguales se le quitan cosas iguales los restos son iguales y por lo tanto, las áreas de los cuadriláteros son iguales.

En este caso, el primer dato D_1 se puede identificar cuando el estudiante expresa: "aquí se forman ángulos de 90°", señalando esos ángulos y haciendo explicita la congruencia. Además, cabe mencionar que este dato está debidamente sustentado sobre principios formales de la matemática: la mediatriz de un segmento es la línea recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio, lo cual implica que los ángulos considerados sean ángulos rectos. El segundo dato D_2se hace evidente cuando el estudiante dice: "estos son iguales" y señala los segmentos $\overline{M^*Q}$ y $\overline{QM^*}$. Es evidente para el grupo, desde lo que ellos conocen en matemáticas, que el centro del cuadrado divide el segmento perpendicular $\overline{M^*M}$ en dos partes iguales. Ahora bien, nótese que la congruencia entre los segmentos $\overline{P^*Q}$ y $\overline{QP}$ simplemente se dice, pero en ninguna parte del fragmento se justifica por qué es así. Este supuesto que hace el grupo y que se representa con A es lo que permite hacer evidente una estructura abductiva (figura 5).

El paso a la pretensión final (la igualdad entre las áreas de los cuadriláteros) está justificado por un conocimiento matemático que comparte y acepta toda la clase. Sin embargo, la prueba de este grupo no es formal, puesto que la sentencia de congruencia entre los triángulos se obtiene a partir de un dato (A) que es plausible. Se asume que A es válido y por lo tanto, se infiere la congruencia entre los triángulos. Es importante hacer énfasis que en el discurso de este grupo, tanto D_1 como D_2 están soportados en argumentos matemáticos, pero no se dice nada acerca de la validez de A.

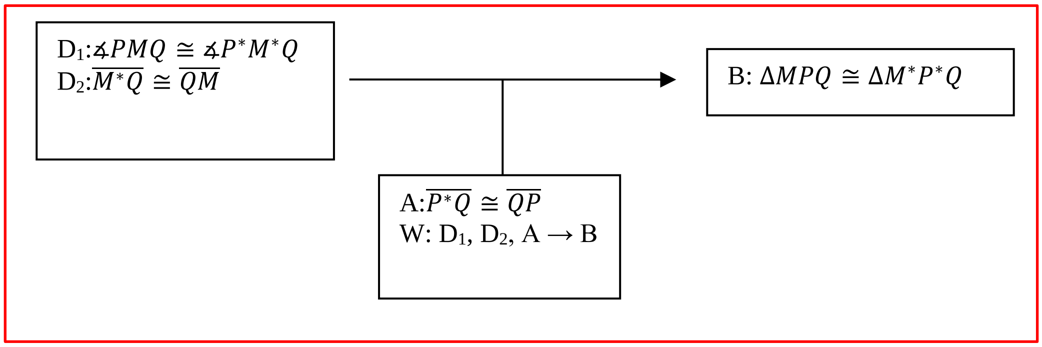


Figura 5. Reconstrucción de la estructura argumentativa de G_2

Ejemplo de una estructura inductiva

En este episodio se aprecia la manera en que G_1 reconoce que los modelos propuestos por Sara y Francisco son casos particulares del modelo sugerido por Johnny. En su solución expresan textualmente lo siguiente:

> "La afirmación de Johnny es cierta porque en los ejemplos que se dieron (figura 1 y figura 2) tienen el punto susodicho que se encuentra en el cuadrado, sólo que son casos particulares, en un caso es el punto medio de un segmento, en el otro es un vértice".

Este fragmento de texto por sí mismo, no permite poner de manifiesto la estructura inductiva de la argumentación. Sin embargo, la explicación realizada por uno de sus integrantes permite inferir este tipo de estructura.

> Nosotros **tuvimos en cuenta los ejemplos que nos daban** (refiriéndose a la figura 1 y 2) y nos dimos cuenta que **en todas las figuras los segmentos que dividen el cuadrado pasan por el centro**…y entonces estos puntos (refiriéndose a P y P*) se mueven así (indicando la variación de P* a medida que P se mueve)…esto nos lleva a pensar que este segmento (señalando el segmento $\overline{MM^*}$) y este otro (el segmento $\overline{AC}$) son casos particulares de los segmentos determinados por estos puntos (refiriéndose a P y P*)…y pues ya, estos cuadriláteros tendrán la misma área.

La reconstrucción de estos argumentos llevo a ser explicita una estructura inductiva. La inducción empieza a hacerse notaria en el instante en que el estudiante dice: "tuvimos en cuenta los ejemplos que nos daban", aspecto que nunca manifestó G_2. Ahora bien, suponiendo que los otros grupos hayan considerado los ejemplos, únicamente este grupo se percató de que en todas las figuras "los segmentos que dividen el cuadrado pasan por el centro" y que esto es importante para pensar en que cualquier segmento que pase por el centro del cuadrado lo divide en dos regiones de igual área. A continuación se muestra la representación de esta estructura inductiva (figura 6).

Es importante hacer énfasis en que este grupo logró reconocer que los ejemplos dados en las figuras 1 y 2 podían interpretarse como casos particulares de la figura 3, lo cual es importante dentro del análisis de los argumentos de los estudiantes, puesto que la situación no sugiere tal hecho. De igual importancia es el hecho de que los integrantes de este grupo, encontraran la regularidad en términos de un aspecto clave: todos los segmentos pasan por el punto medio del cuadrado. Además, sin hacerlo explicito, están considerando más casos de los que ellos mismos emplean para llegar al resultado de la generalización, debido a que interpretan P y P* como puntos móviles sobre los segmentos.

E_1: $\overline{MM^*}$ pasa por el centro y divide el cuadrado en dos partes iguales
E_2: $\overline{AC}$ pasa por el centro y divide el cuadrado en dos partes iguales

→ El segmento $\overline{PP^*}$ divide el cuadrado en dos partes de igual área

El segmento $\overline{PP^*}$ pasa por el centro del cuadrado. Si P es punto móvil sobre el segmento $\overline{BC}$ a medida que P se mueve una determinada distancia, el punto P^* sobre el segmento $\overline{AD}$ debe recorrer la misma distancia pero en sentido contrario, para que ambos lleguen al punto medio de sus respectivos segmentos. Así que $\overline{MM^*}$ y $\overline{AC}$ son casos particulares de $\overline{PP^*}$

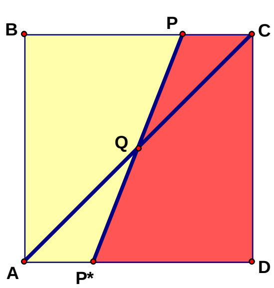
Figura 6. Reconstrucción de la estructura argumentativa de G_1

En cuanto a la prueba, es claro que esta carece de argumentos matemáticos explícitos que la hace vulnerable a críticas y pocas aceptaciones.La pretensión final se construye a través de inferencias eminentemente inductivas, pero a diferencia de una prueba inductiva, la validez de la pretensión no es certera porque puede pensarse en la posibilidad de que cierta recta que pase por el punto medio del cuadrado, no lo divida en dos regiones de igual área.

4.1.3. Ejemplo de una estructura deductiva

Los argumentos dados por G_3 configuraron una estructura deductiva, la cual permite apreciar cierta continuidad estructural con una prueba formal, puesto que las inferencias lógicas están sustentadas teóricamente a través del encadenamiento de razones soportadas en argumentos eminentemente matemáticos.

Uno de los integrantes de este grupo sugirió trazar la diagonal del cuadrado (el segmento $\overline{BC}$). A partir de aquí consideraron dos triángulos y reconocieron que la congruencia de ellos, les ayudaría a justificar la igualdad de áreas entre los cuadriláteros $ABPP^*$ y $PCDP^*$. Al igual que en los episodios anteriores, se pone de relieve un pequeño fragmento, donde uno de sus integrantes explica como construyeron la prueba.



Bueno, nosotros trazamos esta diagonal auxiliar porque aquí **ya sabemos que estas dos áreas son iguales** (refiriéndose al triángulo ΔABC y al triángulo ΔADC), entonces si este triángulo (ΔPQC) es igual a este (ΔAQP^*)… esta figura (cuadriláteroABPP*)es igual a esta otra (cuadrilátero PCDP*)…a la figura amarilla a la figura roja...y **vimos aquí que este ángulo (señalando el $\measuredangle PCQ$) es igual a éste(indicando el $\measuredangle P^*AQ$),**porque esta diagonal ($\overline{AC}$) es como si fuera la bisectriz…después,**estos dos (el $\measuredangle AQP^*$y el $\measuredangle PQC$) son opuestos por vértice entonces son iguales** y este ($\measuredangle AP^*Q$) está en un par de paralelas que los corta una transversal, entonces este ángulo de aquí ($\measuredangle CPQ$) va a ser igual a este ángulo de aquí ($\measuredangle AP^*Q$), pero **el criterio necesita que un lado sea igual, mínimo para que sea ALA,** entonces sabemos que esta diagonal pasa por el punto medio y punto medio está dentro de la línea media, entonces

cualquier línea que corte la línea media…cualquier transversal la va a dividir en dos partes iguales, entonces **estos dos segmentos son iguales ($\overline{QP^*}$ y $\overline{CQ}$)**. Por lo tanto, ya tenemos un criterio de congruencia y este triángulo es igual a este otro y ya las figuras amarillas y rojas son iguales.

El primer dato que reconocen es que los ángulos $\measuredangle PCQ$ y $\measuredangle P^*AQ$ son congruentes, argumentando que la diagonal del cuadrado divide el ángulo recto en dos partes iguales porque "es como si fuera su bisectriz". El segundo dato referido a la congruencia entre los ángulos $\measuredangle AQP^*$ y $\measuredangle PQC$ lo justifican por medio de la regla: ángulos opuestos por el vértice son iguales. El tercer dato, podría ser la congruencia entre los dos ángulos restantes de cada triángulo, pero este dato no es tomado en cuenta por el grupo, porque ellos saben que requieren únicamente dos ángulos y el lado común a esos ángulos: **"**el criterio necesita que un lado sea igual, mínimo para que sea ALA". Así que el tercer dato es precisamente la congruencia entre los segmentos $\overline{QC}$ y $\overline{QA}$ justificada en propiedades de la línea media de un cuadrado: "cualquier transversal que corte la línea media la va a dividir en dos partes iguales". Nótese que a diferencia de los otros grupos, G_3 deja entrever que cada uno de sus datos necesita estar soportado en leyes matemáticas antes de aplicar la regla de inferencia: criterio ALA (ángulo, lado, ángulo). La reconstrucción de los argumentos de este grupo se representa a través del siguiente esquema (figura 7).

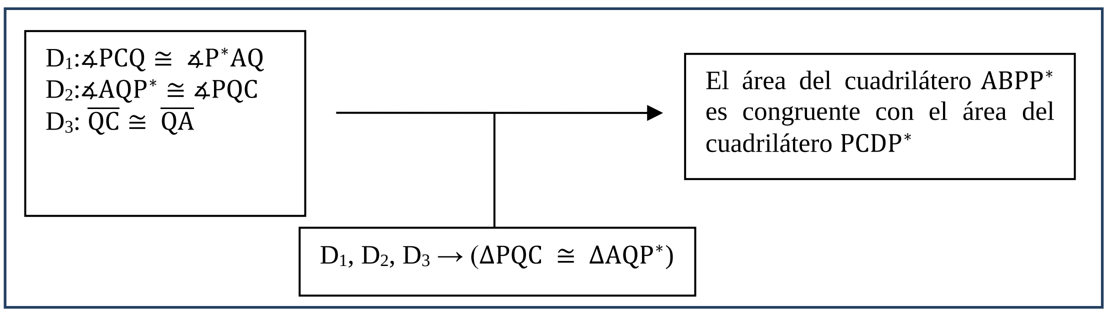


Figura 7. Reconstrucción de la estructura argumentativa de G_3

Es claro que este tipo de estructura se conecta directamente con una prueba formal. Sin embargo es interesante observar que en la primera parte del fragmento, el representante de este grupo se refiere a los triángulos ΔABC y ΔADC. Al parecer, este grupo recurrió a trazar la diagonal porque consideraron importante recurrir a una división que se sabía, previamente, dividía el cuadrado en dos regiones de igual área. Esto hecho, permite inferir que antes de la construcción de la prueba formal, existen aspectos que se corresponden con una estructura inductiva. Incluso, antes de empezar a nombrar los datos y la manera en que estos se sustentan en leyes matemáticas, se declara un supuesto importante acerca de que la posible congruencia entre los triángulos ΔPQC y ΔAQP^* permite probar que las áreas de los cuadriláteros son congruentes, lo que constituye en cierto sentido una hipótesis abductiva, dado que no se ha dicho de forma contundente, que argumentos matemáticos sustentar dicha idea.

Reflexiones finales

En esta investigación se constata que el modelo fundamental de Toulmin (dato-garantía-pretensión) permite analizar los argumentos de los estudiantes en el proceso de producción de una prueba. Por un lado, dicho modelo permitió tipificar las estructuras argumentativas de los estudiantes, en términos de estructuras inductivas,abductivas y deductivas. Por otra parte, posibilitó una mayor comprensión, desde un punto de vista estructural, de lo que significa la prueba en matemáticas y como ayudar a construirla.

La reconstrucción de cada una de las estructuras argumentativas puso de manifiesto la manera de proceder de los estudiantes ante la búsqueda de una prueba. Si bien, las estructuras inductivas y abductivas no pueden ponerse en correspondencia con una prueba formal; son en gran medida una fuente importante para que esta última pueda producirse. Esto implica que pese a la forma sofisticada de la prueba formal, el reconocimiento de estructuras argumentativas no deductivas abre el universo de posibilidades para concebir la prueba en matemáticas desde una visión más amplia.

En este sentido las estructuras abductivas e inductivas dar lugar a pruebas que pueden tipificarse como conjeturales. Desde un punto de vista estructural esto es perfectamente admisible, puesto que la pretensión en estas estructuras está parcialmente validada. Así, por ejemplo; en el caso de lo abductivo, la prueba puede definirse como una justificación parcial en la que se explicitan los datos necesarios para aplicar alguna regla de inferencia lógica, pero donde se supone la validez de una de las razones para poder construir la pretensión final.

El cambio de categoría de una prueba abductiva a una prueba formal requerirá entonces, llamar la atención sobre aquel supuesto y la debilidad que contiene en el acto de convencer a otros, con el objeto de que los estudiantes busquen argumentos matemáticos para sostener el supuesto y no para desecharlo, lo que eventualmente les ayudará a producir la sofisticada prueba formal que de hecho, como se puso de manifiesto aquí, no necesariamente todos los estudiantes la construyen.

Referencias bibliográficas

Atienza, M. (2005). La teoría de la argumentación en Toulmin. En R. Márquez& J. Yescas (Eds.), *Las razones del derecho* (pp 81-102). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2011).Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Belo Horizonte, Brazil 1.*

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P., & Francisco, R. (2015). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation.*Mathematical Thinking and Learning*, *16*(3), 181-200, doi: 10.1080/10986065.2014.921131.

Inglis, M., Mejia, J., Simpson, A. (2007). Modelling Mathematical Argumentation: The Importance of Qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.

Knipping, C. (2003). Argumentation structures in classroom proving situations. In M. A. Mariotti (ed.). *Proceedings of the Third Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy, ERME.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner, C. Knipning & N. Presmeng (eds.), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education (51-74). doi: 10.1007/978-94-017-9181-6_3.

Pedemonte, B., & Reid, D. (2011).The role of abduction in proving processes.*Educational Studies in Mathematics*, *76*, 281-303. doi: 10.1007/s10649-010-9275-0.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41. doi: 10.1007/s10649-006-9057-x.

Santos-Trigo, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. *Investigación en Educación Matemática XII.* 157-187.

Toulmin, S. (1958). *The uses of arguments*. Cambridge: Cambridge University Press.

Autores

Johnny Alfredo Vanegas Díaz; CIMATE, UAGro. México; yovanegasdiaz@gmail.com