CONSTRUCCIÓN DE UN ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO IDÓNEO EN ÁLGEBRA LINEAL: EPISTEME VERSUS CURRÍCULO

Patricia Vásquez Saldías, Arturo Mena Lorca, Jaime Mena Lorca

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio realizado con el marco teórico "Espacio de Trabajo Matemático" en el cual se estudian los elementos que influyen en la práctica de aula del profesor relativos a los contenidos propios de Álgebra Lineal, en Chile. Se ha realizado una 'triangulación' entre lo que se establece en los Estándares Orientadores del país, el currículo escolar nacional y los programas de las asignaturas de álgebra lineal de una institución formadora de profesores chilena. Entre otros aspectos, hemos observado que hay una desconexión entre aquellos tres elementos, que se traduce en que los profesores fomentan en sus alumnos la construcción de un Espacio de Trabajo Matemático personal cuyo plano epistemológico carece de elementos suficientes para una construcción coherente.

Palabras clave: Espacio de Trabajo Matemático, álgebra lineal, profesionalización docente, instrumentalización.

Introducción

Un ambiente de trabajo

El marco teórico elegido sitúa la actividad matemática de un individuo en un *Espacio de Trabajo Matemático, ETM*, que será descrito con precisión más adelante. Con el objeto de situar la problemática en el marco, damos aquí una noción general.

El ETM es un ambiente organizado para permitir el trabajo de personas que resuelven problemas matemáticos (Kuzniak, 2011). Si se trata del trabajo en cuanto aprendiz (de cualquier nivel), hablamos de *ETM personal* que el individuo construye. Ahora bien, un profesor de la asignatura debe además construir un ETM adecuado para el aprendizaje de sus alumnos: un *ETM idóneo*, el cual debe ser considerado tanto para el caso de estudiantes de pedagogía en Matemáticas –quienes deberán erigir uno para su ejercicio profesional– como para los docentes de la asignatura en las instituciones formadoras de profesores.

Problemática del Álgebra Lineal

En el siglo XIX se da inicio a la construcción del álgebra lineal propiamente tal. El concepto de espacio vectorial aparece en 1931, como caso de A-módulo (Dorier, 2000); los motivos que originaron su aparición fueron unificar, generalizar, simplificar y formalizar lo que hoy llamamos álgebra lineal (Cf. Robert, 1986a, 1986b).

Es bien sabido que los conceptos abstractos de espacios vectoriales (subespacio, dependencia lineal, generadores, suma de subespacios, aplicación lineal, ortogonalidad...) permiten tener mayor claridad sobre los procesos que se realizan comúnmente en álgebra lineal, como por ejemplo, la resolución de ecuaciones. Sin embargo, para que esta mayor claridad se alcance, el estudiante de la asignatura debe poder conectar esos conceptos abstractos con los que conoce previamente. Para futuros profesores, es justamente esa conexión en su ETM personal la que le permitirá desarrollar un ETM idóneo, es decir, aquel que utilizará en su enseñanza.

Los estudios muestran que lo anterior, como suele ocurrir ante materias novedosas y poco accesibles, los estudiantes de álgebra lineal a menudo encuentran el tema demasiado abstracto, formal y desconectado de los conceptos anteriormente estudiados, y procuran recurrir a un ambiente más familiar y entonces su estudio se torna puramente algorítmico (Robinet, 1986), lo que es una suerte de contradicción con aquellos propósitos de unificar, generalizar, simplificar y formalizar que el álgebra lineal persigue.

Por lo demás, es bien posible que el profesor de la asignatura, la imparta en el habitual estilo formal, que hurga escasamente en la visualización y que no recurra a problemas de modelización, por ejemplo. Así, la materia permanece inaccesible y su transposición distará de tener los elementos que deberían incluirse en su constitución. Una hipótesis razonable es entonces que, cuando un alumno de pedagogía en Matemáticas vuelva a tomar el tema en su práctica docente, tenderá a repetir lo que aprendió cuando era estudiante secundario (OCDE 2004) y no estará en condiciones de hacer las conexiones que la teoría de espacios vectoriales le ofrece.

Nos proponemos entonces dar ejemplos explícitos de uso de visualización y modelación y, además, mostrar cómo es que la multiplicidad de aspectos del álgebra lineal (algebraicos, geométricos, analíticos...) provee de medios para lograr la deseada interconexión de esos aspectos.

Formación de un profesor de Matemáticas en Chile

Actualmente, en Chile, un profesor de matemáticas de educación media se forma en universidades, cada una de las cuales determina el currículo de formadores de manera independiente. En el caso de Matemáticas, la formación depende sensiblemente de la facultad (de educación, de Matemáticas, de ciencias) en la cual se radica el programa; así, la relación entre los contenidos disciplinares de Matemáticas y los de carácter pedagógico varía de manera ostensible.

Por otra parte, el Ministerio de Educación del país, MINEDUC, establece programas uniformes para todas las materias de las enseñanzas primaria y secundaria de la nación.

Desde hace al menos una década los informes venían evidenciando que la formación de profesores no atendía a los requerimientos del estado en cuanto a las competencias implícitas necesarias para impartir el currículo del sistema educacional chileno, en particular, en el área de Matemáticas (por ejemplo, OCDE, 2004).

Debido a lo anterior, el Estado está llevando a cabo lo que se conoce como Programa Inicia. Este programa considera Estándares de desempeño para la formación de profesores de todas las disciplinas, una Prueba a los egresados para cautelar esos estándares, e instrumentos de apoyo a la formación de profesores.

El caso del Álgebra lineal

En los Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Media (CPEIP, 2012), se explicitan, justamente, estándares y también indicadores *ad hoc*.

El Estándar 3 de esa publicación indica que el egresado de Pedagogía en Matemáticas de Enseñanza Media debe ser capaz de conducir el concepto de función, sus propiedades y sus representaciones, en particular en el caso de las funciones lineales. El indicador 4 manifiesta que se debe conocer las dificultades que presentan los estudiantes en lo referente a las relaciones de proporcionalidad y ofrece estrategias para superarlas, para lo cual presenta dos ejemplos: el primero muestra una relación que no es de proporcionalidad "directa" y el segundo da a conocer una propiedad que verifican las funciones lineales y que los alumnos asumen verdadera cualquiera sea la función. Por otra parte, observamos en los programas del MINEDUC (2012) que las actividades para demostrar que los alumnos comprenden las proporciones directas e inversas, se centran en representar las funciones en una tabla, en el registro gráfico y desde allí observar sus propiedades. Las situaciones presentadas, se relacionan con diversas situaciones en el plano de la proporcional directa e inversa, pero las actividades de tipo geométrico se sugieren en el primer año de enseñanza media.

Ahora bien, en los programas de estudio de álgebra lineal, las funciones lineales se presentan en $\mathbf{R}^n$, y no se trata de manera particular estas funciones en el caso unidimensional. En cuanto a los sistemas de ecuaciones lineales las actividades se centran en plantear esos sistemas y resolverlos sin usar matrices; solo en el caso de dos incógnitas las ecuaciones lineales se deben representar gráficamente.

Marco teórico

El marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático, ETM, (Kutzniak 2011, Kuzniak, & Richard 2014) se concibe la reflexión matemática como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas de un dominio determinado en un ambiente organizado por y para el matemático (i. e., quien estudia matemáticas) mediante la articulación de dos planos: el *epistemológico*, vale decir, el de la disciplina, y el *cognitivo*. Cada plano está constituido por tres componentes o polos: el epistemológico por el *representamen*, el *referencial*, y el *artefacto*; el plano cognitivo está conformado correspondientemente por la *visualización*, la *construcción* y la *prueba*. Para describir la articulación de los planos se considera un conjunto de génesis que permiten relacionarlos: *semiótica*, *instrumental* y *discursiva*. (Kuzniak 2011, Kuzniak, & Richard 2014).

Hay tres tipos de ETM: de *referencia*, definido según la relación con el saber, e idealmente sobre criterios matemáticos; *idóneo*, destinado a la enseñanza de este saber en una institución dada con una función definida, y *personal*, que configura un individuo, a partir de la formación que recibe y para su propia comprensión y aprendizaje, según se enfrenta el problema con los propios conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas. (Kuzniak, 2004)

En este caso nos interesa el ETM idóneo del profesor, el cual, dependiendo de su formación y de la institución que lo acoge realizará transposiciones de los contenidos que quiere enseñar, y en sus propuestas didáctica propenderá a que sus alumnos activen las distintas génesis y realicen las respectivas circulaciones (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2014).

A su vez el ETM personal del profesor se modificaría también por los elementos que recibe de la cultura educativa en matemáticas, de la institución que lo acoge (la forma en que se imparte el currículo, las tradiciones en evaluación, etc.) y, naturalmente, por los elementos que guían la enseñanza de la matemática en los colegios (currículo, orientaciones para la enseñanza... Cf. MINEDUC, 2012).

Para realizar esta investigación, hemos procurado "triangular" tres instituciones que contribuyen a configurar el ETM idóneo de un profesor de matemáticas de enseñanza media en Chile: en primer lugar, el currículo nacional para estudiantes de enseñanza media actualmente en vigencia (MINEDUC, 2012); en segundo término, los estándares definidos por el Ministerio de educación para ese currículo; y, en tercer lugar, los programas de las asignaturas de álgebra lineal de una institución formadora de profesores del país. (De acuerdo a lo señalado, la primera es determinante en el ETM personal, pero incide también, según decíamos, en el ETM idóneo; la segunda y la tercera son elementos constitutivos del ETM idóneo).

Método

El estudio comienza con la triangulación que se señaló antes.

A continuación, se harán entrevistas realizadas a profesores de matemáticas noveles, encuestas a estudiantes de pedagogía, y entrevistas a profesores que enseñan álgebra lineal en la institución antes mencionada.

En este avance reportaremos solo acerca de la triangulación entre las instituciones señaladas, realizada en una perspectiva teórica de expertos, que procura discernir qué elementos constituirían nudos epistemológicos en los que se centran a la vez, por una parte las dificultades que se encuentra para realizar las conexiones entre los temas estudiados en la formación inicial y aquellos que se deben enseñar en el desempeño profesional, y, por otra, la posibilidad misma de realizar aquellas conexiones. Los resultados obtenidos permitirán levantar las preguntas que se harán tanto a los profesores en formación como a los formadores. A su vez, la información obtenida de estos informantes hará posible el levantamiento de una propuesta de aula y su correspondiente análisis a priori, como un primer paso de una ingeniería didáctica *ad hoc*.

Resultados

El análisis teórico epistemológico realizado en la triangulación nos da los siguientes como primeros elementos:

1. Respecto del currículo escolar, no se encuentra el álgebra lineal en forma explícita; en particular no se pide la enseñanza de funciones lineales; hay elementos del álgebra lineal, pero no en el ambiente de espacios vectoriales como tales, sino más bien la idea de la linealidad (asociada a la geometría euclidiana, en tanto el álgebra está apoyada en los enteros y los racionales) a saber: proporcionalidad; sistemas de ecuaciones homogéneos y no homogéneas; isometrías en plano euclidiano habitual.

2. En los estándares se explicitan con mayor precisión los contenidos del currículo en la dimensión de algebra lineal propiamente tal (es decir, no solo en la implícita en las homotecias, por ejemplo), apoyadas en la geometría vectorial, y funciones lineales propiamente tales (y no solo en las implícitas en el crecimiento proporcional y en el estudio de las rectas en el plano, pongamos por caso).

3. La relación entre los Estándares y programas de estudio de la institución formadora considerada en el estudio es más cercana; la diferencia más ostensible radica simplemente en la multitud de posibilidades de 'aterrizar' los conceptos en casos particulares de $\mathbf{R}^n$.

Conclusiones

Del análisis realizado se visualiza que a un profesor novel, le resultaría muy difícil configurar un idóneo en cuyas propuestas estén presentes de manera integrada la formación inicial y los estándares. Sin embargo, indagaciones preliminares permiten esperar una conexión real de los contenidos que posibilitaría a los nuevos profesores apoyarse en su formación para realizar mejores propuestas didácticas.

En coincidencia con otras investigaciones realizadas por los investigadores, los profesores propenden a fomentar principalmente la génesis instrumental y las circulaciones se remiten al plano de descubrimiento (Montoya, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2014); ello se debe a que, en términos teóricos, el profesor no dispone de un referencial que permita que su perspectiva no se remita a la sola instrumentalización. En este caso, la situación está además en consonancia con lo que plantea Dorier (2000) en cuanto a que es necesario transitar por lo algebraico, lo geométrico y lo analítico, entendiendo que lo analítico viene de la concepción de espacio vectorial en su plenitud.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente a través del Proyecto de investigación del Fondo Nacional Desarrollo Científico y Tecnológico FONDECYT 1151376, Chile.

Referencias

CPEIP (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media*. Recuperado el 07 de junio de 2015 de http://www.cpeip.cl/usuarios/cpeip/File/librosestandaresvale/libromediafinal.pdf

Dorier, J. L. (2000). *Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions.* Les cahiers du Laboratoire Leibniz, N° 12. Grenoble: Laboratoire Leibniz-IMAG.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Paris: IREM de Paris 7.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*,(4-I), 181-197.

MINEDUC(2012). Curriculum Nacional. Recuperado el 07 de junio de 2015 de http://www.curriculumnacional.cl/

Montoya, E., Mena-Lorca, A., y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*,(4-I), 181-197.

OCDE (2004). *Revisión de políticas educacionales. Chile*. París: Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos.

Robert, A. (1986a). Didactique de l'enseignement supérieur : une démarche en première année de DEUG, *Actes de la IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques.*

Robert, A. (1986b). Une démarche dans l'enseignement supérieur, *Cahier de didactique des mathématiques 28*, IREM de Paris VII.

Robinet, J. (1986) : Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire, *Cahier de Didactique des Mathématiques 29*, IREM de Paris VII.

Autores

Patricia Vásquez Saldías; PUCV. Chile; patricia.vasquez@ucv.cl
Arturo Mena Lorca; PUCV. Chile; arturo.mena@ucv.cl
Jaime Mena Lorca; PUCV. Chile; mena.jaimemena@gmail.com