Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

# CARACOL NAUTILUS, ESTUDIO DE LA COVARIACIÓN LOGARÍTMICA EN COORDENADAS POLARES

José Antonio Bonilla Solano
*Universidad Autónoma de Guerrero. jbonillasolano@gmail.com*

Marcela Ferrari Escolá
*Universidad Autónoma de Guerrero.mferrari@uagro.mx*

**Resumen**

En este artículo presentamos avances de nuestra investigación en búsqueda de ampliar los estudios de la covariación logarítmica. Las actividades diseñadas inician con la construcción de un caracol nautilus con doblado de papel. Al observar la figura se percibe que la curva se construye a través de triángulos semejantes, donde sus puntos se pueden localizar en el plano polar con un lado del triángulo y su ángulo. Esto nos invita a trabajar en otro sistema de coordenadas y utilizar geometría dinámica. Este ambiente propicia una red de modelos donde al localizar puntos pertenecientes a la curva y tabularlos, se percibe la regularidad que existe entre estos, encontrando así una progresión aritmética en los ángulos y una progresión geométrica en los radios (lado del triángulo) datos necesarios para abordar la covariación logarítmica.

**Palabras clave:** Espiral logarítmica, coordenadas polares, socioepistemologia.

## 1. INTRODUCCIÓN

La construcción de un diseño como facilitador para el aprendizaje de un saber matemático nos induce a construir, desde prácticas sociales, un indicio que ayude a comprender el significado del objeto de estudio, una exploración de los fenómenos naturales que ocurren en nuestro entorno de vida. La construcción de cómo se conciben estos fenómenos nos lleva a estudiar las herramientas matemáticas, la articulación entre ellas, la emergencia de modelos que den cuenta del fenómeno en tanto argumentamos.

En nuestro afán de ampliar los estudios realizados sobre covariación logarítmica (Ferrari y Farfán, 2008 y 2010) al sistema de coordenadas polares, encontramos que varios trabajos de investigación sobre el uso escolar del sistema de coordenadas polares (Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak, 2009; Ramírez y Ferrari, 2011; Moore, Paoletti y Musgrave, 2013) reportan que, por lo general, los estudiantes extrapolan argumentos válidos en el sistema de coordenadas cartesianas para interpretar las gráficas en polares. Evidencian también fragilidades en el uso de ángulos expresados en radianes (Martínez-Sierra, 2012), sin dejar de mencionar la problemática que surge al interpretar un par coordenado en este ambiente.

En este artículo, presentamos un avance de nuestra investigación sobre la argumentación de estudiantes de sexto semestre de la Licenciatura de Matemáticas alrededor de la covariación logarítmica en coordenadas polares. Reportamos entonces, el diseño de aprendizaje reflexionando sobre las herramientas y argumentos que emergen al construir, con plegado de papel, un caracol nautilus (Figura 1), así como el uso de geometría dinámica (GeoGebra) como herramienta para graficar su contorno propiciando una red de modelos que sustenta la covariación logarítmica.

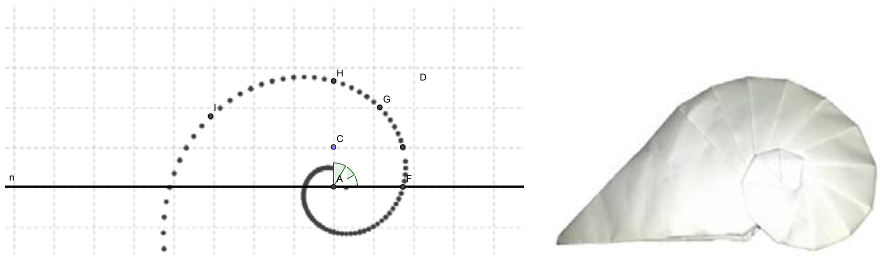


Figura 1: Esquema de un nautilus en coordenadas polares

## 2. MARCO TEÓRICO

En esta investigación nos identificamos con la socioepistemología al sostener que el saber no se limita a definir la relación que éste guarda con los objetos matemáticos sino a posicionar al ser humano en el acto mismo de significar, conocer, construir significados y en consecuencia estructurar sus sistemas conceptuales en tanto se lo problematiza. Ese saber emerge de prácticas sociales que no se limitan a caracterizar lo que el ser humano hace, sino a problematizar las causas del porqué lo hace, describir las circunstancias de cómo y cuándo lo hace, en dónde y por qué lo hace y cómo se concibe haciéndolo (Cantoral, 2013).

La Socioepistemología propicia la confluencia y relación dialéctica de aspectos que consideramos fundamentales al abordar un fenómeno didáctico. Contemplar y analizar el devenir de una noción a un objeto de saber; caracterizar las concepciones de los alumnos; dar cuenta de cómo vive una noción en las aulas y el discurso matemático escolar que se genera, ser conscientes que la matemática es un bien cultural inmerso en una sociedad y tiempo determinados que condiciona su comunicación y apropiación (Cantoral, 2013) conlleva profundizar en la reorganización de la obra matemática, en la reconstrucción de significados y en la matemática como actividad humana (Cordero, Cen & Suárez, 2010), supuestos básicos de la socioepistemología a la cual adherimos.

Ferrari (2008) reporta, en su indagación socioepistemológica, que se pueden distinguir tres etapas en el desarrollo de los logaritmos si se toma como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica; argumento utilizado por Napier para su primera definición y los aportes de Brigss para afinar su funcionamiento con el afán de *facilitar cálculos.* Elementos que también fueron utilizados por Bradardin, Huygens o Newton, entre otros, en la búsqueda de *modelar* el movimiento de un objeto en un elemento viscoso. Prácticas que este investigador consideró como las propulsoras de la construcción de los logaritmos.

Ferrari, Martínez y Méndez (2016) retoman de Confrey y Smith (1995) que "the construction of a counting and a splitting world and their juxtaposition through covariation provide the basis for the construction of an exponential function" (p. 80), idea que extienden a la función logarítmica. Parten entonces de la hipótesis epistemológica de que la incorporación explícita de la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, que denominan covariación logarítmica, como la esencia misma de los logaritmos, propiciaría una integración, quizás más efectiva y por tanto más robusta, de esta noción como función (Ferrari, 2008). Función que ahora estudiamos en el ámbito del sistema de coordenadas polares.

En esta investigación nos interesa resaltar el papel que juega la modelación (Arrieta & Díaz, 2015), en tanto emerge como argumento unificador, la covariación logarítmica en un ambiente de coordenadas polares. Nos enfocamos entonces en estudiar los argumentos que emitan los estudiantes universitarios al involucrarlos en un ambiente especial diseñado utilizando el plegado de papel y el uso de geometría dinámica, elementos que propicien la construcción de una espiral logarítmica y su discusión. Compartimos con Krummheruer (2015) la idea de que, por lo general se asume que la argumentación, que parece ser bastante explícita y sofisticada en los participantes, es una condición previa para la posibilidad de aprender y no sólo el resultado deseado del conocimiento matemático puesto en juego. Es decir, el conocimiento matemático es argumentativo y surge en la participación de los estudiantes en "una práctica de explicar" (Garfinkel, 1967, p. 1, citado en Krummheruer, 2007). Práctica que es provechosa y de apoyo, así como la iniciativa para los procesos de aprendizaje matemático de los estudiantes.

## 3. METODOLOGÍA

Es el experimento de enseñanza la metodología de nuestra investigación. Un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de pasos de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000, citado en Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Los experimentos de enseñanza se hacen para testar y generar hipótesis, durante el experimento, en general, o durante cada uno de los episodios, siendo en ocasiones necesario abandonar o reformular hipótesis a la luz de los datos. El objetivo último es elaborar un modelo del aprendizaje y/o el desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo este aprendizaje como resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente (Molina *et al*., 2011).

Además, tomando en cuenta las condiciones de recogida de datos, que es a través de grabaciones de video y voces, así como de evidencia física (instrumento de trabajo), el análisis que resulta hace perseguir el objetivo de nuestra investigación más allá de ver su efectividad sino, es mostrar por qué el diseño instruccional funciona y poder adaptarla a nuevas circunstancias (Confrey 2003).

## 4. DISEÑO DE LA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

En búsqueda de actividades recreativas para participar en la Expomatemática de nuestra escuela, evento que desde 2004 se presenta en el Zócalo de Acapulco, donde compartimos nuestra alegría y esfuerzos por acercar las matemáticas al ciudadano y por tanto impulsar la divulgación de las ciencias, hallamos un video de Tomoku Fuse [1] sobre la construcción de un caracol nautilus con plegado de papel. Este video nos desafió a analizar qué herramientas matemáticas se involucran en el plegado y los argumentos que van emergiendo al ir reconociendo ciertas regularidades, con el fin de diseñar una actividad de aprendizaje. Nos interesa entonces propiciar la emergencia de una red de modelos en tanto manipulamos una hoja de papel y le damos una particular forma (Tabla 1)

Observando con cuidado la forma de este caracol o simplemente recorriendo con el dedo su borde se perciben dos elementos importantes, el *giro* por tanto una variación angular y el aumento de la distancia al centro, que al considerarlas simultáneamente, surge una espiral. Podemos entonces describir su forma al visualizar simultáneamente "ángulo-distancia" lo que nos invita a trabajar en el sistema de coordenadas polares y si nos detenemos en cómo varían, percibimos que la covariación logarítmica rige la curva.

Pero ¿Qué elementos permite visualizar esta contrucción? Si analizamos nuevamente el caracol, vemos que una de las figuras geométricas determinante en él son los triángulos (Figura 2), que van rigiendo la curva, esto nos lleva a pensar sobre un modelo articulando el fenómeno

ISSN: 2594-1046

(construir el caracol) con la evolución de triángulos rectángulos semejantes que nos inviten a reflexionar sobre la curva que envuelve nuestro caracol.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |
| De un cuadrado obtenemos un romboide, doblamos a la mitad con respecto del eje menor, de lo obtenido doblamos la mitad entre el eje menor y el doblez anterior, repetimos el mismo procedimiento hasta obtener 8 longitudes. | De la mitad que queda se obtienen longitudes con valor uno y medio de las anteriores, iniciando con respecto del eje menor. | Doblamos diagonales. | Enrollamos. | Hacemos dobleces finales para concluir. |

Tabla 1: Nautillus plegado de papel

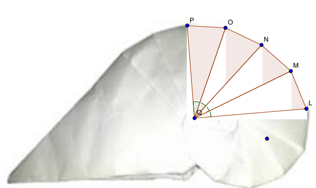
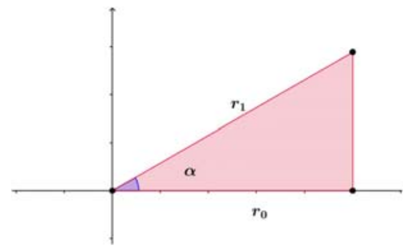



Figura 2: Ángulo constante

ISSN: 2594-1046

Con una simple inspección visual nos percatamos que tenemos una constante en los ángulos de los triángulos; por tanto, nuestra siguiente variante resulta ser la hipotenusa de los triángulos construidos. Para conocer la longitud de cada hipotenusa de estos triángulos rectángulos podemos recurrir a las razones trigonométricas. Si tenemos determinado el ángulo α, constante de nuestra construcción geométrica, y un radio inicial $r_0$ podemos calcular su hipotenus ($r_1$) con el coseno de α.

$$\cos \alpha = \frac{r_0}{r_1}$$



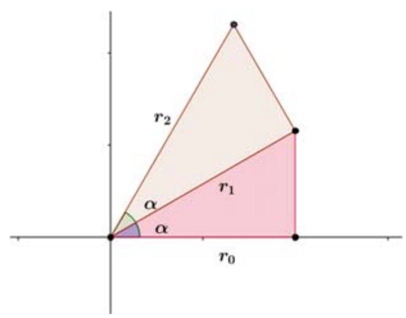

Despejando $r_1$

$$r_1 = \frac{r_0}{\cos \alpha}$$

Construir el siguiente triángulo, semejante al inicial, implica trazar una recta perpendicular a la hipotenusa del primer triángulo, quien fungirá como cateto del siguiente triángulo rectángulo. Luego, construir el ángulo $\alpha$ desde la hipotenusa y con esa apertura determinar un triángulo semejante al inicial. Así, hemos construído tres puntos de la curva, (1,0); $(r_1, \alpha)$ y $(r_2, 2\alpha)$.

Ahora obtengamos $r_2$ , usamos el mismo procedimiento que $r_1$

$$cos\alpha = \frac{r_1}{r_2}$$




Despejando $r_2$ y sustituyendo el valor de $r_1$

$$r_2 = \frac{r_0}{(cos\alpha)^2}$$

Así, obtenemos el valor de $r_2$.

Al construir más triángulos rectángulos semejantes logramos obtener más datos que podemos organizar en la Tabla 2:

Analizando los datos encontramos que en la variación de ángulos hay una progresión artimética, pues al hacer una resta entre dos elementos consecutivos encotramos que lo que va determinando es un α o que es lo mismo por cada triángulo vamos sumando un α, lo cual deriva directamente de la construcción donde se hizo notar que el ángulo de cada triángulo era constante.

| N° de triángulos | Ángulo θ | Hipotenusa |
|---|---|---|
| 1 | A | $\frac{r_0}{cos\alpha}$ |
| 2 | 2α | $\frac{r_0}{(cos\alpha)^2}$ |
| 3 | 3α | $\frac{r_0}{(cos\alpha)^3}$ |
| 4 | 4α | $\frac{r_0}{(cos\alpha)^4}$ |
| … | … | … |
| $K$ | $K$α | $\frac{r_0}{(cos\alpha)^k}$ |

Tabla 2: Tabla de datos

En el caso del radio obtenemos una progresión geométrica, pues al ir dividiendo dos elementos consecutivos obtenemos la razón $\frac{1}{\cos\alpha}$ y al ir multiplicando hacia adelante nos da el siguiente radio. La presencia simultánea de estas dos progresiones nos indican que hay implicada una coraviación logarítmica expresada en coordenadas polares.

Hemos logrado así de manera discreta, articular la construcción geométrica de triángulos semejantes con nuestro caracol mediante la acción de tabular. Nos interesa ahora analizar cómo construir cualquier punto, es decir, movernos del modelo geométrico-tabular, a un modelo algebraico-gráfico.

De la Tabla 2 podemos obtener las siguientes igualdades:

$$\theta = k\alpha \qquad (1)$$

$$r = \left(\frac{1}{(\cos\alpha)^k}\right)r_0 \qquad (2)$$

De (1) obtenemos k.

$$k = \frac{\alpha}{\theta} \qquad (3)$$

Sustituimos en (2)

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\theta}} \qquad (4)$$

Aplicando logaritmo natural en (4)

$$\ln \frac{r}{r_0} = \frac{\theta}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)$$

Aplicando exponencial de ambos lados de la ecuación

$$\frac{r}{r_0} = e^{\frac{\theta}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)}$$

Obteniendo como una constante a

$$b = \frac{1}{\alpha}\left(\ln\left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)\right)$$

Para finalizar así, con la expresión algebraica de la espiral logarítmica en coordenadas polares:

$$r = r_0\, e^{b\theta}$$

Para lograr la gráfica de la curva, utilizando el software Geogebra, basta crear deslizadores para $\theta$, $r_0$ y $\alpha$, así como aplicar correctamente la expresión algebraica en “entrada” y construir un punto en coordenadas polares $(r;\theta)$. Dándole animación al deslizador $\theta$ y rastro al punto se puede observar la espiral logarítmica, como en el ejemplo de la imagen donde $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $r_0 = 1$.

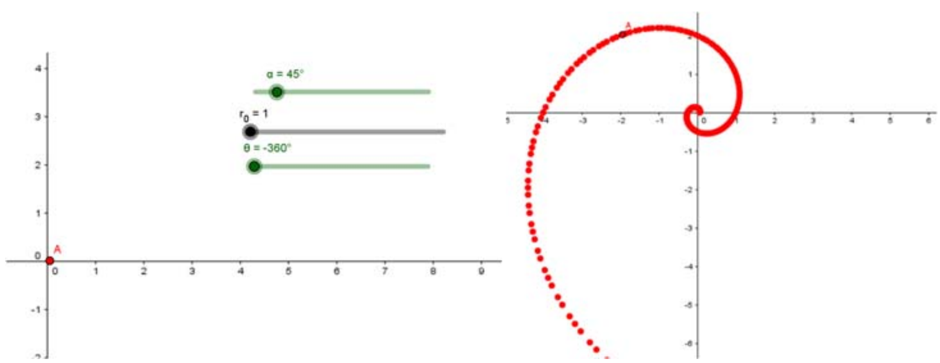



Figura 3: Espiral logarítmica con Geogebra

## 5. CONCLUSIONES

Al poner en escena esta actividad con alumnos del sexto semestre de la Licenciatura en Matemáticas, logramos percibir que algunas cuestiones del diseño esperan ser mejoradas. La actividad se desarrolló con la encomienda de construir triángulos semejantes dado un ángulo y lado, relativamente fácil para poder mirar datos. El desafío estuvo en encontrar la variación que había en la construcción, algo complicado en un principio, lo cual nos llevó al siguiente paso más desafiante: ¿cómo generalizar dando un ángulo y un lado cualesquiera, teniendo este último paso como tarea?

Las actividades diseñadas y la dinámica gestionada propiciaron discusiones sobre cómo describir la forma del caracol. Resultó interesante la argumentación del por qué sucedía, generándose nuevas preguntas y nuevas indagaciones en el diseño; elemento que estamos analizando.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Arrieta, J., & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 18*(1), 19-48.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66–86.

Cordero, F., Cen, C., & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 13*(2), 187-214.

Ferrari, M, Martínez-Sierra, G., & Méndez, M. (2016). "Multiply by Adding": Development of the Logarithmic-Exponential Covariational Reasoning in High School Students. *Journal of Mathematical Behavior 42*, 92-108

Ferrari, M., & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), 53-68.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva*. (Tesis de Doctorado no publicada). Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Ferrari, M., & Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(3), 309-354.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 60-82.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp.51-74). Springer.

Martínez-Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(1), 35-62.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a traves de los experimentos de enseñanza. *Revista de Enseñanza de las Ciencias,* 29(1), 75-88.

Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic, D., & Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 139–160.

ISSN: 2594-1046

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 461–473. doi:10.1016/j.jmathb.2013.05.002.

Ramírez, T., & Ferrari, M. (2011). Las coordenadas polares: Algunos de sus usos en disciplinas de investigación específicas. En L. Sosa, R. Rodríguez, y E. Landa (Eds.) *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. (pp.111-117). CIMATE: Zacatecas. Diciembre, 2011.