

ANIDACIÓN DE PRÁCTICAS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Mario Adrián Caballero-Pérez
Cinvestav-IPN. macaballero@cinvestav.mx

Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav-IPN. rcantor@cinvestav.mx

Resumen

Presentamos una propuesta de anidación de prácticas desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa que articula un desarrollo pragmático del estudio del cambio asociado el Pensamiento y Lenguaje Variacional. El esquema de anidación de prácticas que presentamos permite explicar empírica y teóricamente el proceso de construcción social de conocimiento matemático asociado a la matemática del cambio, en particular en lo referente al Cálculo Diferencial; esto al mostrar un desarrollo asociado a los cuestionamientos ¿Qué cambia y respecto de qué cambia?, ¿Cuánto y cómo cambia? y al uso de estrategias variacionales. Se muestra un ejemplo en donde el modelo sustenta el diseño de situaciones de aprendizaje.

Palabras clave: Anidación, prácticas, cambio, variación, Socioepistemología

1. INTRODUCCIÓN

La investigación que reportamos forma parte de un proyecto de investigación doctoral que tiene por objetivo caracterizar el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) asociado al estudio de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio (Cantoral, 2000). Presentamos para ello un modelo de evolución pragmática en cuanto al estudio del cambio en fenómenos de variación continua, sustentado en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

La enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral ha sido tema de interés en diversas investigaciones de la Matemática Educativa, ello debido parcialmente a que suelen presentarse dificultades en el entendimiento de sus principales conceptos y nociones, tanto en estudiantes como profesores. Algunas de estas investigaciones han involucrado la variación como una noción fundamental y caracterizado el tipo de concepciones que los estudiantes o profesores se forman de conceptos como función, pendiente, razón de cambio o derivada (Sánchez, García y Linares, 2008; Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin, 2013). Otro tipo de investigación se ha ocupado del desarrollo de ideas matemáticas enfatizando el carácter dinámico de los conceptos

mediante el diseño de actividades, que pueden o no incluir el uso de instrumentos tecnológicos (Doormar, Drijvers, Gravemeijer, Boon, y Reed, 2012; Sokolowski, 2014).

Las investigaciones mencionadas enfatizan la necesidad de trabajar con ideas de variación en lo que concierne al aprendizaje del Cálculo, no obstante identificamos que este tratamiento se caracteriza por lo que denominamos *centración en los objetos matemáticos*, esto es, el énfasis del aprendizaje está en la manipulación y explicitación de los conceptos matemáticos. Nuestra postura, desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, se centra no en el uso del objeto (el concepto de derivada, fórmulas de derivación, definición por límite, etc.), sino en el desarrollo de las prácticas (comparar estados, secuenciar cambios, estimar comportamientos, predecir valores, etc.) que hacen posible la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013).

Por ejemplo, en Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2002) se propone un modelo jerárquico del razonamiento covariacional asociado a las acciones mentales puestas en juego ante situaciones que precisan la coordinación de cantidades que varían entre sí. Una de las actividades que se trabajan consiste en una situación de llenado de recipientes donde se pide bosquejar la gráfica de la relación *volumen vs altura* para una botella con forma esférica. Los niveles de razonamiento 4 y 5, considerados los más avanzados, precisan del uso correcto y explícito de los conceptos de pendiente y razón de cambio instantáneo en la gráfica que se proponen, e incluso de una noción de derivada y límite.

Por nuestra parte, nos interesamos en las prácticas que se utilizan en el entendimiento de situaciones de cambio y, en un sentido amplio, dotan de significado a los conceptos matemáticos. Por ejemplo, en el llenado de recipientes nos enfocamos en la forma en cómo se comparan las alturas del líquido para dos valores de volumen, en la seriación de estados intermedios en el crecimiento de la altura o la estimación del comportamiento de la altura según la forma de la botella.

En ese sentido, nuestro objetivo de investigación en este escrito es analizar la forma como se desarrollan las prácticas asociadas al estudio del cambio. Para ello presentamos un modelo de desarrollo basado en la Socioepistemología y el PyLVar, asociado a una tipificación del estudio del cambio y una evolución pragmática de él.

2. MARCO TEÓRICO

Tomamos como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la cual modela la construcción social del conocimiento matemático a través del conjunto de *prácticas* que son aceptadas y establecidas socialmente, para lo cual estudia formas del pensamiento matemático fuera y dentro de la escuela (Cantoral, 2013).

La noción de práctica se encuentra ligada a la actividad humana, pero cabe aclarar que no toda actividad humana es una práctica, sino aquellas realizadas de manera consiente e intencional, no los actos instintivos o inconscientes. En ese sentido, el desarrollo de prácticas es normado por prácticas sociales, las cuales se entienden no como la acción efectuada (por ejemplo, medir) sino la orientación estratégica de la práctica (por qué medimos y por qué lo hacemos de esa manera). Asimismo, este desarrollo se articula mediante el esquema de anidación progresiva de prácticas (Figura 1), que muestra una jerarquía de las prácticas que componen la construcción social del conocimiento matemático.



Figura 1: Esquema de la anidación progresiva de prácticas (Cantoral, 2013)

Este esquema nos permite explicar empírica y teóricamente el proceso de construcción social de conocimiento matemático, a la vez de orientar la intervención y transformación de los procesos didácticos mediante la emergencia del saber matemático. Éste puede entenderse de dos formas que estructuran el desarrollo de prácticas: “Digamos que, hacia arriba, la construcción social del conocimiento comienza por la acción del sujeto sobre el medio y hacia abajo, la construcción social del conocimiento comienza por la norma que regula el quehacer de los individuos en colectividad” (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p. 13).

2.1. Pensamiento y Lenguaje Variacional

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) es una línea de investigación que se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje del conocimiento matemático, propios de la matemática del cambio (Cantoral, 2000), en particular del Cálculo y el Análisis. En un sentido amplio consiste en las formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente fenómenos de cambio.

El estudio del cambio se deriva de una necesidad inherente al ser humano, la necesidad de predecir, ya que ante la incapacidad de adelantar el tiempo para observar los resultados venideros se han desarrollado diversas herramientas basadas en el estudio del cambio y orientadas por la práctica social del *Prædicere* para anticipar el comportamiento de sistemas complejos (Cantoral, 2013).

Esta práctica social consiste en aquello que norma la actividad matemática con fines predictivos, no es la predicción como tal sino lo que orienta la intención de predecir. El *Prædicere* tiene tres niveles de evolución que dan cuenta de un tránsito del conocimiento al saber matemático y clasifican el tipo de predicción que se realiza: “El paso de los datos (*Prædicere* como esquema) al patrón o regularidad en el comportamiento (*Prædicere* como modelo) es un requisito para la emergencia del concepto en el marco de las redes conceptuales correspondientes (*Prædicere* como teoría)” (Cantoral, 2013, p. 132).

Los primeros dos niveles se refieren a la identificación de las variables involucradas, la descripción y caracterización del comportamiento de las variables y la cuantificación del cambio. El tercer nivel se refiere a la formalización teórica y estructural del saber matemático conformado en los niveles anteriores. Dado lo anterior nos enfocamos en la consideración de los primeros dos niveles, pues en ellos surge y se desarrolla el estudio del cambio.

En ese sentido, hemos identificado cuestionamientos clave asociados a estos niveles que dan cuenta del tipo de estudio que se realiza: ¿qué cambia? y ¿respecto de qué cambia? (*Prædicere* como esquema), ¿cuánto cambia? y ¿cómo cambia? (*Prædicere* como modelo).

El primer cuestionamiento, ¿qué cambia?, plantea que estudiar un fenómeno precisa identificar aquello que cambia, lo que resulta importante debido a que pueden existir una multitud de elementos que están cambiando simultáneamente. Por ejemplo, si consideramos una situación de llenado de recipientes encontramos que la altura del cuerpo del líquido, el flujo de entrada o salida, la forma del recipiente, el volumen del líquido, y el tiempo transcurrido están modificándose

continuamente. No obstante, no se centra la atención en todas las variables involucradas, sino que se eligen aquellas que se consideran relevantes para una situación específica.

Identificar aquello que cambia implica de la disposición de algún referente para comparar estados a fin de dar cuenta de ese cambio, es decir atender al cuestionamiento ¿respecto de qué cambia? Por ejemplo, determinamos que una función es creciente porque el valor de una imagen es *más grande respecto a la imagen anterior*, un automóvil está en movimiento si su posición es *diferente respecto a su posición en un instante anterior*, dadas dos rectas el valor de la pendiente de una es mayor si *está por encima de la otra*, etc.

Los primeros dos cuestionamientos se refieren a la identificación y establecimiento de relaciones de dependencia entre variables, en cambio los otros consisten en describir y caracterizar la naturaleza de cambio del fenómeno. La pregunta ¿cuánto cambia? está orientada a asignar un valor a la modificación de estado percibida, mientras que la pregunta ¿cómo cambia? a describir el comportamiento global. Ambos pueden realizarse en términos de valores numéricos o a través de descripciones cualitativas, mediante “relaciones adverbiales (...) que se traducen en relaciones de crecimiento, decrecimiento o estabilidad” (Cantoral, 2013, p. 187). Por ejemplo, más grande que, igual que, menor que, más frío, menos frío, cada vez más rápido, cada vez más lento, etc.

Por ejemplo, consideremos dos funciones, una cuya gráfica se corresponde con una recta (Figura 2) y la otra con una curva cóncava hacia arriba (Figura 3), ambas funciones son crecientes, pero la forma en cómo crecen no es la misma, su variación es diferente. La primera se caracteriza por un crecimiento constante de las alturas que se determina al analizar el cambio en la altura de un punto de la gráfica a otro, en tanto que en la segunda el crecimiento cerca del eje vertical es pequeño pero conforme se aleja es cada vez mayor.

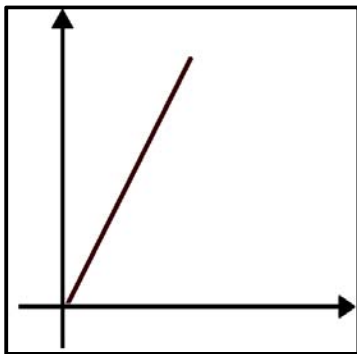


Figura 2

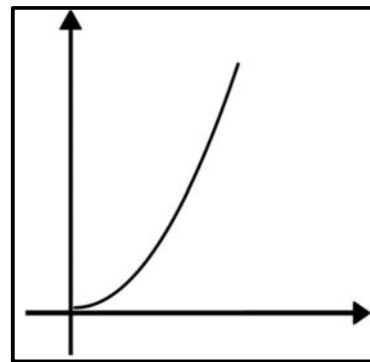


Figura 3

Ambos cuestionamientos caracterizan la naturaleza del cambio, pero lo hacen de diferente manera; ¿cómo cambia? se refiere al comportamiento global de un fenómeno y ¿cuánto cambia? caracteriza el comportamiento local, de un estado a otro del fenómeno. De tal manera que los cuatros cuestionamientos planteados nos permiten identificar tres tipos de estudio del cambio en un fenómeno, los cuales se muestra en la Tabla 1:

Identificación del cambio	¿Qué cambia? ¿Respecto de qué cambia?
Caracterización cualitativa de la naturaleza de cambio	¿Cómo cambia?
Caracterización cuantitativa de la naturaleza de cambio	¿Cuánto cambia?

Tabla 1: Tipificación del estudio del cambio

Con base en lo anterior, afirmamos que el PyLVar precisa atender los cuestionamientos anteriores, y la forma de atenderlos es mediante el uso de las *estrategias variacionales* (Caballero, 2012; Caballero y Cantoral, 2013), ya que se parte de la *comparación* de estados para identificar y cuantificar el cambio. La *seriación*, vista como una colección de comparaciones (López, 2016), permite caracterizar cualitativa y cuantitativamente el patrón de regularidad de la variación en un conjunto de estados sucesivos. Por último, la *estimación* y *predicción* organizan la información obtenida de las estrategias anteriores y la utilizan para anticipar comportamientos globales o estados puntuales respectivamente.

Dado lo anterior postulamos una evolución pragmática en el estudio del cambio, asociado a una jerarquía en las *estrategias variacionales* donde la *comparación* y *seriación* atiende a los cuatro cuestionamientos anteriores, en tanto que la *estimación* y *predicción* concretan la anticipación de estados futuros referida al *Prædicere*.

Plasmamos esta evolución pragmática asociada a la anidación de prácticas en la Tabla 2. Esta anidación consiste en que se parte de la acción, considerada como la intervención directa del sujeto (individual, colectivo o social) sobre el objeto de estudio, en este caso la variación, de modo que los elementos y variables del fenómeno se ordenan, agrupan, miden, etc. Dichas acciones son organizadas mediante las *estrategias variacionales* de comparación y seriación, vistas como actividades efectuadas de manera consiente e intencional. Estas actividades se organizan deliberadamente para componer una práctica, en este caso las estrategias de predicción y estimación. Dichas prácticas son orientadas y reguladas por una práctica de referencia, las cuales

son variadas y dependen del paradigma en el que se desenvuelve el individuo, los ejemplos de la Tabla 2 son retomados de Cantoral (2013). Por último, la práctica de referencia es normada por la búsqueda de la predicción, por el *Prædicere*.

3. REFLEXIONES

La anidación de prácticas propuesta nos permite postular una vía para el desarrollo del PyLVar, en el sentido que se tipifica el tipo de estudio del cambio que se requiere en la anticipación de estados futuros y lo relaciona con las prácticas necesarias para llevar esto a cabo. Lo anterior nos ha permitido sustentar el diseño de situaciones de aprendizaje asociado al desarrollo de ideas variacionales de conceptos como función y derivada. Mostramos ahora parte de una situación sobre llenado de recipientes que tiene por objetivo caracterizar los parámetros de una función lineal a partir del estudio del comportamiento lineal en el crecimiento de la altura de un líquido conforme al paso del tiempo.

Práctica social	<i>Prædicere</i>
Práctica de referencia	Toxicología Agricultura Física etc.
Práctica	Predicción Estimación
Actividad	Comparación Seriación
Acción	Ordenar Agrupar Medir Girar Mover etc.

Tabla 2: Anidación de prácticas del pensamiento y lenguaje variacional.

3.1. Situación 1

Un recipiente vacío de forma cilíndrica es llenado mediante una llave que deja salir agua a flujo constante. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanza el cuerpo del agua al transcurrir un segundo.

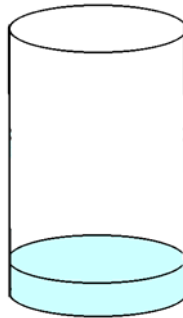


Figura 4: Botella con forma cilíndrica

Marca sobre la imagen la altura que alcanzará el agua a los 3 segundos.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- La altura que aumenta el agua cada segundo es cada vez mayor.
- La altura del agua no aumenta conforme pasa el tiempo.
- La altura del agua aumenta siempre la misma cantidad cada segundo.
- La altura que aumenta el agua cada segundo es cada vez más pequeña.

¿Cuántos segundos tardará en llenarse el recipiente? Justifica tu respuesta.

3.2. Situación 2

Los recipientes cilíndricos C y D son llenados a flujo constante. La altura del agua en el recipiente D aumenta el doble respecto al recipiente C. El siguiente plano cartesiano muestra la gráfica del llenado del recipiente C, construye la gráfica del recipiente D.

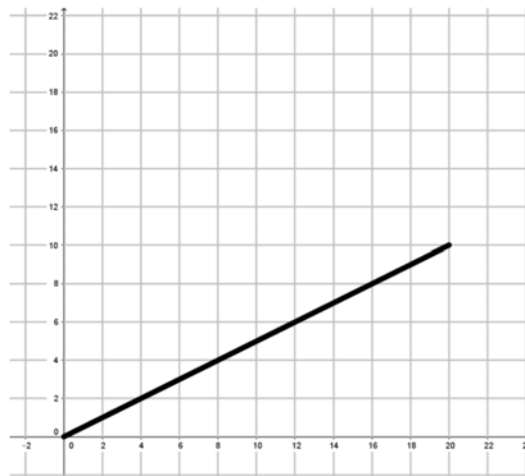


Figura 5: Gráfica de llenado de un recipiente cilíndrico

En cuanto a la primera situación, la primera pregunta tiene el objetivo de establecer la altura del líquido y el tiempo como las variables del fenómeno (¿qué cambia?), para lo cual se señala la parte en azul con el fin que se utilice como medida (¿respecto de qué cambia?) para indicar la altura a los 3 segundos. Para ello se precisa de acciones como medir y dibujar la altura en cada segundo, teniendo cuidado que la longitud de las alturas sea la misma, es decir, se *comparan* las nuevas alturas respecto a la original.

La segunda pregunta busca una descripción del fenómeno (¿cómo cambia?) con base en la forma de crecimiento. Para ello se puede recurrir nuevamente a los dibujos de la pregunta 1 y la *comparación* de los incrementos en cada segundo. La forma en cómo están estructuradas las preguntas conlleva a un análisis del incremento en cada segmento dibujado anteriormente.

La tercera pregunta precisa de una *predicción* del tiempo de llenado, para ello una vez identificado que el crecimiento de las alturas será siempre el mismo (¿cuánto cambia? y *seriación*), entonces se dibujan alturas en la botella hasta que se llene, o bien, se determina la longitud del segmento en cuestión y la altura total de la botella (¿cuánto cambia?) y se realiza una división entre ambas cantidades, en ese sentido se *compara* la altura total con la altura del segmento.

En lo que respecta a la situación 3, el objetivo es establecer la razón de cambio del llenado de un recipiente *comparándolo* respecto a una gráfica ya dada, de manera que el cuestionamiento ¿qué cambia? alude no sólo a la altura y el tiempo sino al propio valor de la razón de cambio, ¿respecto de qué cambia? consiste ahora en la razón de cambio de la recta ya dada, o incluso de los valores de las alturas de esa recta. Además la actividad precisa considerar que la cantidad de cambio de la gráfica solicitada es el doble de la otra (¿cuánto cambia?), de modo que la descripción de

ambas gráficas como crecimiento constante ya no es suficiente, por ello también en esta gráfica se incluye una cuadrícula, con el objetivo de que se utilice para medir los cambios en la altura.

Con estas dos actividades queremos ejemplificar cómo se relaciona el tipo de estudio del cambio que se pretenda fomentar con el esquema de anidación de prácticas propuesto. Esto permite organizar teóricamente las ideas esenciales del PyLVar con el fin de estructurar el diseño de situaciones de aprendizaje mediante un desarrollo pragmático.

Este desarrollo parte de *la identificación del cambio* apoyado en la estrategia de *comparación* que permite identificar modificaciones en los valores de las variables (la forma, la posición y, en general, las cualidades que se estudian). El siguiente momento está conformado por dos partes, la primera es la *caracterización cualitativa de la naturaleza de cambio*, que precisa de la estrategia de *seriación*, pues a través del estudio de varios estados sucesivos se determina, por ejemplo, si el crecimiento es constante, es cada vez mayor, es cada vez menor, etc. La segunda es la *caracterización cuantitativa de la naturaleza de cambio*, que recurre tanto a la *comparación* como a la *seriación*, pues con la primera se determina la cantidad de cambio de un estado a otro, en tanto que la segunda el patrón de crecimiento o decrecimiento del cambio. El último momento consiste en la anticipación de estados futuros, normada por el *Prædicere* y se realiza con base en la *predicción* para el caso de estados puntuales y la *estimación* en comportamientos globales.

De manera que el modelo propuesto permite explicar teóricamente la manera de proceder de los individuos ante fenómenos de cambio, en particular modela una forma de desarrollo pragmático del PyLVar. No obstante, en este escrito nos hemos limitado en dos aspectos. Por una parte, hemos manejado el esquema de anidación de práctica únicamente en “las relaciones de subida” (acción – actividad – práctica), es necesario analizar también “las relaciones de bajada” (práctica social – práctica de referencia – práctica). Asimismo, se requiere precisar el rol e influencia de la práctica de referencia en el PyLVar, esto debido a que la anticipación de estados, ya sea *predicción* o *estimación*, puede tomar formas diferentes dependiendo de esta práctica de referencia. Por ejemplo, la forma de predecir en medicina no es igual a la predicción en Cálculo Diferencial (apoyada fuertemente en el teorema de Taylor), pero en ambos escenarios, con prácticas de referencia diferentes, se recurre a las estrategias variacionales.

Otro aspecto a resaltar es que dependiendo de la situación específica puede presentarse una sucesiva anidación de prácticas. Por ejemplo, en la situación 1 la *seriación* se ubica al nivel de actividad, pero en la situación 3 corresponde al nivel de acción. Esto se debe a que la situación

precisa *comparar* la cantidad que incrementa la altura en ambos recipientes, siendo una el doble de la otra; pero esto requiere que previamente se determine la cantidad que incrementa la altura de la gráfica dada, lo que implica recurrir a la estrategia de *seriación* para dar cuenta de ese patrón de crecimiento. Estudiar la forma como se presentan y articulan anidaciones de práctica en diversas situaciones es un aspecto relevante que estudiaremos para caracterizar el desarrollo del PyLVar.

Estos aspectos se han considerado y estudiado en el proyecto doctoral del que forman parte los avances de investigación aquí presentados, en particular mediante la relación de la anidación de prácticas del PyLVar con la noción de *sistema de referencia*. Ésta consiste en una forma particular en que la variación se percibe y organiza, y mediante la anidación de prácticas se opera y comunica. Esto resulta importante ya que una característica de los fenómenos de variación es que el cambio puede ser percibido, pero la variación no, se requiere una abstracción de orden superior“...si bien nos percatamos del movimiento de las personas, de su cambio de posición, casi nunca nos cuestionamos por la forma en que se producen dichos cambios, aun cuando podríamos percatarnos de ello: si el movimiento era uniforme, si se presentaban variaciones, es decir, se movían cada vez más rápido o más lento o si alternaban este comportamiento. Menos llegamos a establecer algún sistema de medida para darle valor a esas variaciones del cambio. Es decir, si bien percibimos y comprendemos lo que cambia, el analizar los cambios de ese cambio no es tan natural. Se requiere de un segundo nivel de elaboración teórica, de una abstracción de segundo orden, dando lugar al concepto de *variación* “(Cabrera, 2009, p. 51).

Además, la forma de percibir esta variación no es siempre la misma, de manera que el *sistema de referencia* articula aquellos elementos y consideraciones invariantes en el estudio del cambio que permiten reconocer, estudiar y comunicar la variación. Los elementos que hemos caracterizado son la *selección de variables*, la *unidad de referencia* y *unidad de medida* y la *temporalidad*. Cada uno de ellos está asociado a los cuestionamientos presentados y las *estrategias variacionales*. Reportaremos los detalles y resultados de esta investigación en una ocasión futura.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional en profesores de bachillerato*. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

- Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 1007 – 1015.
- Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. (Tesis de maestría no publicada), Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
- Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En Cantoral et al, *Universidad Virtual. Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México, D.F., México: Trillas.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. México: Gedisa Editorial.
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, 7(3), 91-116.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for research in mathematics education*, 33, 35 -278.
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10, 1243-1267.
- Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus students and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11, 1–25.
- Sánchez, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267 – 296.
- Sokolowski, A. (2014). Modelling rate for change of speed in calculus proposal of inductive inquiry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45 (2), 174 – 189.