Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

# ALGUNAS INVESTIGACIONES SOBRE ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

Melby Cetina-Vázquez
*Universidad Autónoma de Guerrero.melby_gcv@hotmail.com*

Guadalupe Cabañas-Sánchez
*Universidad Autónoma de Guerrero.gcabanas.sanchez@gmail.com*

**Resumen**

Este documento presenta los avances de una investigación cuyo objetivo es caracterizar los argumentos formales e informales suscitados en el salón de clases de matemáticas de sexto y noveno grado de la educación básica. La discusión se concentra en algunos estudios realizados en los últimos once años en matemática educativa sobre la argumentación matemática. La revisión de literatura reflejó que en los primeros años del nivel básico poco se ha analizado sobre la argumentación matemática, y aún menos los que discuten sobre la argumentación informal e informal en dicho nivel educativo. Es ahí donde la pertinencia del desarrollo de la investigación objetivo se sustenta.

**Palabras clave:** Argumentación matemática, argumentación colectiva, dualidad de la argumentación matemática.

## 1. INTRODUCCIÓN

Gran cantidad de currículos escolares plantean la idea de que la educación matemática debe contribuir a la formación de ciudadanos reflexivos, críticos y con capacidad de análisis y argumentación (Goizueta y Planas, 2013). La argumentación matemática debe fomentarse como núcleo de las actividades matemáticas de los estudiantes en el aula de clase (Yeckel, 2002). En esa dirección, y al interés tanto de investigadores como de profesores, se han realizado varios estudios con el fin de brindar elementos de cómo los estudiantes pueden aprender a hacerlo; así como de otros aspectos que conlleva su análisis.

En ese sentido, este documento tiene como objetivo presentar algunos trabajos realizados en los últimos once años en matemática educativa sobre la argumentación matemática. Con el fin de ser sustento de una investigación que se plantea caracterizar los argumentos formales e informales suscitados en el salón de clases de matemáticas de sexto y noveno grado de la educación básica.

ISSN: 2594-1046

## 2. TRABAJOS SOBRE ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

En la investigación en Educación Matemática uno de los modelos usados para examinar la argumentación que se produce dentro de las clases de matemáticas es el propuesto por Toulmin (1958, 2003), que está constituido por datos, garantía, conclusión, cualificador modal, refutación y soporte. En la Figura 1 se muestra el modelo argumentativo de Toulmin, donde se pueden observar las conexiones entre sus componentes.

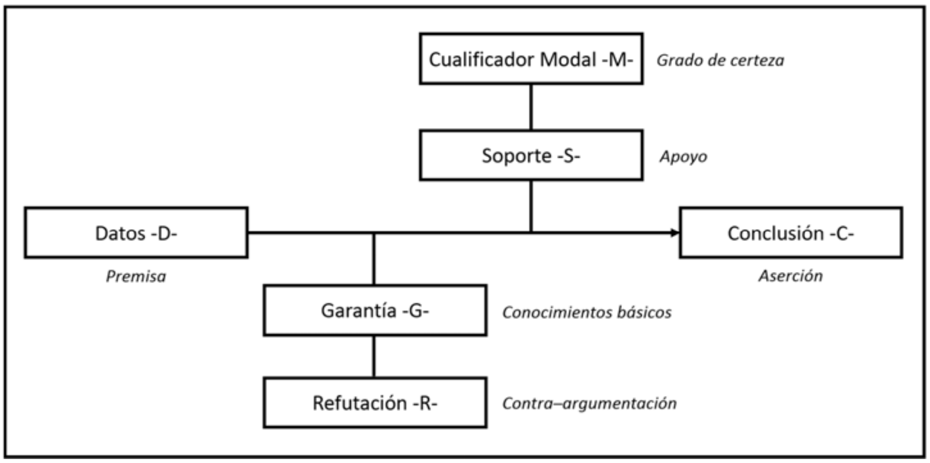

Figura1. Modelo del argumento de Toulmin.

La argumentación, desde la perspectiva de Toulmin (1958), queda entendida como un proceso secuencial que permite inferir conclusiones a partir de ciertas premisas, implicando un movimiento comunicativo interactivo entre personas. El argumento, por su parte, se concibe como una secuencia de afirmaciones y razones vinculadas entre sí que, entre ellas, establecen el contenido y la fuerza de la posición de un interlocutor en particular, que está discutiendo.

## 3. ESTUDIOS SOBRE LA ESTRUCTURA Y EL CONTENIDO DE LOS ARGUMENTOS

Bajo este panorama, de análisis con el modelo de Toulmin (1958/2003), algunas investigaciones se han centrado en estudiar la estructura de los argumentos. Un ejemplo es Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007) que demostraron el valor de examinar una parte fundamental de este modelo (el cualificador modal) y categorizaron algunas de las diferentes formas de argumentación utilizadas por estudiantes de gran talento de investigación matemáticas, en su resolución de tareas con contextos realistas. Entre los resultados se destacó que los cualificadores modales juegan un papel importante y no reconocido previamente en la argumentación matemática.

También, resalta que uno de los objetivos de la instrucción debe ser el desarrollo de habilidades en los estudiantes para que coincidan adecuadamente los tipos de garantías con los cualificadores modales. Debido a que este emparejamiento conlleva a asegurar que los estudiantes cualifiquen este tipo de garantías (razonamiento inductivo/intuitivo o deductivo/axiomático) de forma apropiada.

Por otra parte, en Reid, Knipping y Crosby (2011) se reportaron las formas de refutar *argumentos* por estudiantes de primaria superior y de secundaria al resolver problemas geométricos. Se evidenciaron cuatro maneras de refutar: 1) refutación de una conclusión implícita por una pregunta; 2) refutación de la suficiencia de una orden, mientras que hay la aceptación de los datos y de la conclusión; 3) refutación de la pertinencia de los datos ofrecidos en apoyo a una conclusión, y; 4) una refutación compleja. Estos tipos de refutaciones dieron pauta de algunos consejos sobre la lógica aceptada del maestro. Los consejos representan ser de valor para los estudiantes que están aprendiendo a cambiar de argumentos cotidianos a argumentos matemáticos, así como para investigadores interesados en este proceso. También admitieron una visión de la enseñanza de la práctica de refutaciones, pues en algunos casos se confrontaron las conclusiones hechas con contrajemplos; y en otros casos se reveló a un maestro confiar en su autoridad como un medio de impugnación. Este tipo de investigaciones permite dar un panorama de la práctica real de la enseñanza de la prueba.

## 4. ESTUDIOS CON UNA MIRADA COGNITIVA

Otro tipo de estudios sobre argumentación matemática se centra en reconocer la relación entre el contenido y la estructura de argumentos desde un punto de vista cognitivo. Un ejemplo es Pedemonte (2007), quien puso de relieve la importancia del análisis estructural entre la argumentación y la prueba. Metodológicamente usó el modelo de Toulmin combinado con el modelo cK¢ de Balacheff y Margolinas (2005). Este último modelo lo utilizó para detectar y analizar la estructura de una argumentación que soporta una conjetura (abducción, inducción, etc.) y la estructura de su prueba. El experimento lo llevó a cabo en la enseñanza de algunas clases tradicionales, grados 12 y 13, en Francia e Italia; el instrumento consistió en problemas geométricos. Como evidencia obtuvo que aunque hay casos claros de continuidad entre la argumentación que soporta una conjetura y su prueba, a menudo hay una distancia estructural entre los dos (de una argumentación abductiva a una prueba deductiva, de una argumentación inductiva a una prueba matemática inductiva).

En cambio, Martínez y Pedemonte (2014) analizaron cognitivamente la *relación entre* el proceso de la argumentación que conduce a la construcción de una conjetura y su demostración algebraica al resolver problemas de Álgebra. La investigación se desarrolló con nueve estudiantes de noveno/décimo grado. Se observó: 1) una distancia tanto en el sistema de referencia y en la estructura entre argumentación y prueba; 2) que al mirar a través de los problemas, las argumentaciones correspondientes se construyeron de forma inductiva con una fuerte presencia del campo de la aritmética, es decir, la conjetura se construye en la aritmética con ejemplos numéricos; 3) que todos los estudiantes comenzaron el argumento puramente en aritmética, pasando por los pasos que integran tanto la aritmética y el álgebra, salvando a los últimos pasos cuando utilizaron sólo el álgebra; y, 4) que el elemento de puente entre la argumentación inductiva en aritmética y prueba deductiva en álgebra es la coexistencia de la aritmética y el álgebra en el respaldo de los argumentos dentro de la argumentación.

## 4.1. Estudios sobre la dualidad de los argumentos matemáticos

De manera general, en matemática educativa hay investigaciones centradas en abordar la dualidad de las matemáticas, etiquetado por ejemplo como lo informal y formal. El estudio de esta dualidad se ha hecho presente desde diferentes líneas, por ejemplo en el lenguaje hablado (Barwell, 2015), en el conocimiento matemático (Zandieha & Rasmussen, 2010) y en el razonamiento matemático (Viholainen, 2005).

En dirección al estudio de argumentos, esa dualidad se ha hecho presente como: argumento inductivo y prueba deductiva (Martínez y Pedemonte, 2014); argumento intuitivo y axiomático (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007); argumento cotidiano y matemático (Reid, Knipping y Crosby, 2011); argumento informal y formal (Viholainen, 2005), por mencionar algunos. Los primeros tres trabajos ya han sido presentados en el cuerpo de este documento, por lo que únicamente se muestra en esta sección el de Viholainen (2005), quien indagó sobre la *relación entre el* razonamiento informal y formal de las matemáticas, para el caso de la derivada. Estableció lo que concibió como argumento informal y formal, pues fue la base para diferenciar y relacionar los tipos de razonamiento estudiados. Entrevistó a dos estudiantes universitarios que se especializaban en matemáticas, mientras resolvían tareas sobre la derivada y la diferenciabiliad de funciones reales de una variable. Los resultados revelaron que estos estudiantes entendían las interpretaciones informales de la derivada y el cociente de diferencias, pero tenían dificultades para comprender el significado visual del proceso de límite del cociente de diferencias. En lo que respecta al uso del razonamiento informal y formal, uno tendió a usar más el razonamiento informal y lo utilizó simultáneamente con el razonamiento formal. El otro, por su parte, usó con más frecuencia el razonamiento formal pero lo hizo a menudo por separado del razonamiento informal.

### 4.2. Estudios basados en la argumentación colectiva

Los trabajos anteriores (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007; Reid, Knipping y Crosby, 2011; Pedemonte 2007; Martínez y Pedemonte; 2014; Viholainen, 2005) se pueden categorizar como investigaciones donde el interés se centra en el argumento que hace la población objetivo de forma individual. Hay otras investigaciones cuyo fin es examinar los aspectos matemáticos (sobre todo de las conversaciones en el aula), desde una mirada en colectivo. Para ello, se hace uso de un constructo denominado argumentación colectiva, que en el sentido de Yackel (2002) es una construcción para el análisis de la naturaleza de actividad dentro de las clases de matemáticas que se caracterizan por la resolución de problemas y la colaboración de discusiones de toda la clase. Este constructo fue usado por Krummheuer (1955) por primera vez para referirse a cuando dos o más individuos interactúan para establecer (o intentar establecer) una aseveración.

Investigaciones que se ubican en esta última categoría han caracterizado los *diferentes tipos* de razonamiento en la argumentación colectiva en estudiantes de noveno grado (e. g. Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014), con el objetivo de informar cómo los estudiantes se involucran en la generación y el examen de hipótesis usando razonamientos inductivo y abductivo y avanzar hacia el razonamiento deductivo requerido para la prueba. Para su análisis combinaron regla, caso y resultado de Peirce (1956) y el modelo argumentativo de Toulmin (1958). Su intención fue que los profesores de matemáticas puedan basarse en la comprensión de estos tipos de razonamientos para apoyar a los estudiantes en el razonamiento de manera productiva.

Otra, como Krummheuer (2007), adoptó la hipótesis de que el aprendizaje de las matemáticas depende de la participación de los estudiantes en el proceso de argumentación colectiva. Con base en ello, combinó la teoría de la argumentación de Toulmin (1958) y la idea de Goffman (1981) de la descomposición de la función del hablante, a fin de reconstruir los diferentes grados de autonomía de estudiantes de primer grado en los procesos de participación y argumentación colectiva. Evidenció que la argumentación se hace presente como una cadena de argumentos, donde la conclusión de uno representa los datos del siguiente estudiante, así sucesivamente. También, presentó observaciones sobre las consecuencias para la mejora de la enseñanza de las matemáticas y de la formación del profesorado en el ámbito universitario.

### 4.3. Estudios sobre el profesor

En la investigación sobre la argumentación matemática, poco se ha observado o estudiado al profesor. En esta sección son dos los trabajos referenciados, cabe resaltar que los análisis metodológicos de estos estudios no se basaron en el modelo argumentativo de Toulmin, ello debido a que sus objetivos en sí se enfocaron en la práctica argumentativa.

En De Gamboa, Planas y Edo (2010) se presenta un estudio exploratorio realizado a un grupo de futuros maestros de Educación Primaria en el segundo curso de su formación universitaria. El objetivo fue *identificar prácticas de argumentos* en la resolución escrita de actividades matemáticas y *explorar la diversidad de interpretaciones sobre la noción de argumentación matemática*. El estudio permitió: identificar carencias importantes en contenidos conceptuales y procedimientos básicos; y dificultades prácticas y de interpretación en torno a la argumentación matemática. Las carencias reflejadas en los profesores en formación inicial fueron de tres tipos: 1) confusión práctica entre distintos tipos de razonamiento, concretamente entre argumentación y explicación; 2) dificultad para plantear preguntas que requieren argumentación; y 3) confusión teórica entre distintos tipos de razonamientos, concretamente entre explicaciones, argumentación y demostración.

Otro estudio (Homero, 2007) se centró en las prácticas argumentativas de dos profesores de bachillerato en activo. Utilizó actividades geométricas de construcción y validación en un ambiente de geometría dinámica. Se hizo a través de un experimento de enseñanza, el cual permitió mostrar el desarrollo de los participantes en cuanto a sus *esquemas de argumentación y sus prácticas argumentativas*. Para el análisis se retomó y adecuó la clasificación de las prácticas argumentativas de Harel y Sowder (1998). Se evidenció que los esquemas de argumentación que utilizaron los profesores son fundamentalmente fácticos y empíricos y que tendieron, con la práctica, a la discusión y la reflexión que ésta provoca, a volverse analíticos. La actividad que se desarrolló alrededor de la demostración, apoyada por la reflexión grupal e individual, permitió que los profesores reconsideren aquellos argumentos que les permiten construir exitosamente la justificación.

## 5. CONCLUSIONES

En Matemática Educativa, el estudio de la argumentación se ha analizado desde diferentes vertientes. Por ejemplo, en los últimos once años se han registrado trabajos sobre el análisis: de su estructura y contenido; de su relación estructural entre la argumentación y la prueba; de su dualidad; de las prácticas argumentativas, etc. Sin embargo, la revisión hecha a la literatura especializada evidenció que:

- hay pocos estudios enfocados en indagar procesos de argumentación matemática con estudiantes de los primeros años de la escuela básica, y aún menos de analizar la dualidad de los argumentos en dicho nivel educativo.
- hay poca investigación centrada en el profesor de matemáticas. Y es que De Gamboa, Planas y Edo (2010) evidencian una carencia de los profesores en formación sobre la interpretación y el uso de la argumentación matemática. Por lo que alientan a realizar trabajos sobre el conocimiento matemático de los futuros profesores con estudios empíricos en aulas de matemáticas de distintos niveles.
- son necesarios estudios que analicen (en conjunto) el uso que maestros y alumnos están haciendo de la argumentación matemática en el aula de clase, pues hasta el momento son pocas las investigaciones centradas en observar los papeles que estos dos agentes tienen en la práctica de argumentación.

Es en la conjunción de estos tres aspectos, que la pertinencia del desarrollo de la investigación objetivo se sustenta.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barwell, R. (2015). Formal and informal mathematical discourses: Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic. *Educational Studies in Mathematics*, doi: 10.1007/s10649-015-9641-z

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P., & Francisco, R. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning,* 16 (3), 181–200. doi: 10.1080/10986065.2014.921131

De Gamboa, G., Planas, N., y Edo, M. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. Revista *SUMA* 64, 35-44. Recuperado de http://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/SUMA_ArgumentacionMatematica_PROTEGIDO.pdf

Goizueta, M., y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias* 31(1), 61-78.

Homero, A. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática* 19(1), 63-98. SNN: 1665-5826

ISSN: 2594-1046

Inglis, M., Mejía-Ramos, J., & Simpson, A. (2007). Modelling Mathematical Argumentation: The Importance of Qualification. *Educational Studies in Mathematics* 66(1), 3-21. doi:10.1007/s10649-006-9059-8

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), T*he emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior* 26 (1), 60–82. doi:10.1016/j.jmathb.2007.02.001

Martínez, M., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics* 86(1), 125-149. doi:10.1007/s10649-013-9530-2

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics* 66(1), 23–41. doi:10.1007/s10649-006-9057-x

Reid, D., Knipping, C., & Crosby, M. (2011). Refutations and the logic of practice. *PNA* 6(1), 1-10. Recuperado de http://hdl.handle.net/10481/16011

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (Updat; 2; 2nd; ed.). Cambridge, U. K: Cambridge University Press.

Viholainen, A. (2005). Relationship*s between informal and formal reasoning in the subject of derivative. In M. Bosch (Ed.), Proceedings of the 4 Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 1811–1820). Sant Feliu de Guixols, Spain.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation? *Journal of Mathematical Behavior* 21(4), 423-440. doi:10.1016/S0732-3123(02)00143-8

Zandieha, M., & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior* 29, 57–75. doi:10.1016/j.jmathb.2010.01.001