Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de noción variacional

Variational thinking: humans-with-GeoGebra in the visualization of variational notion

JHONY ALEXANDER VILLA-OCHOA[1]
MAURICIO RUIZ VAHOS[2]

Resumen

En este artículo mostramos cómo a través de la interacción de un colectivo de investigadores con el software GeoGebra surgieron algunas ideas para el diseño de estrategias que potencian el desarrollo del pensamiento variacional. Usamos el constructo teórico de seres-humanos-con-medios propuesto por Borba y Villarreal (2005) para analizar dos episodios de nuestra experiencia como investigadores. Desde dicho análisis pudimos observar cómo a través de la necesidades de la investigación se pudieron crear algunas "herramientas" del software, que a su vez permitieron estudiar, establecer y demostrar nuevas conjeturas acerca de algunos conceptos matemáticos.
Palabras clave: *Pensamiento variacional;seres-humanos-con-medios; GeoGebra; visualización*

Resumo

Neste artigo apresentamos como, por meio da interação entre um coletivo de investigadores com o software GeoGebra, surgiram algumas ideias para o desenho de estratégias que potencializam o desenvolvimento do pensamento variacional. Usamos a construção teórica de seres-humanos-com-mídias proposta por Borba e Villarreal (2005) para analisar dois episódios de nossa experiência como investigadores. Desta análise pudemos observar como por meio das necessidades da investigação foi possível gerar "ferramentas" do software, que por sua vez permitiram estudar, estabelecer e demonstrar novas conjecturas de alguns conceitos matemáticos.
Palavras chave:*Pensamento variacional; seres-humanos-com-mídias; GeoGebra; vizualização.*

El pensamiento variacional. Una introducción

La noción de variación se ha convertido en los últimos años en un elemento que ha llamado la atención de investigadores al interior de la Educación Matemática, tanto por su estrecha relación con algunos conceptos matemáticos (proporción, tasa de variación, función, derivada, integrales, ecuaciones diferenciales, entre otros) como porque permite caracterizar un estilo propio de razonamiento (CARLSON, JACOBS, COE, LARSEN, & HSU, 2003; VILLA-OCHOA Y MESA, 2009) y de pensamiento (CANTORAL Y FARFÁN, 1998; VASCO, 2006).

[1] Estudiante Programa de Doctorado en Educación (Matemática) de la Universidad de Antioquia. Medellín- Colombia. Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit). Docente Universidad de Antioquia. javo@une.net.co
[2] Estudiante Programa de Maestría en Educación (Matemática) de la Universidad de Antioquia. Medellín-Colombia. Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit). Docente Universidad el Antioquia y Colegio Vermont-Medellín. mruizxp@gmail.com

Investigadores como Tall (2009) resaltan la importancia de los aspectos dinámicos de la matemática y el papel de software en la reproducción de efectos visuales del cálculo. Este autor también señala que el cálculo está compuesto fundamentalmente por conceptos dinámicos, por ejemplo: el deseo de cuantificar las cosas que cambian (el concepto de función), la razón en la cual ellas cambian (derivada), la manera en la cual ellas se acumulan (la integral) y las relaciones entre ellas (Teorema fundamental del cálculo y la solución de ecuaciones diferenciales).

Dolores (2007; 1999), por su parte, llama la atención sobre la necesidad de acercarse a la noción de derivada desde un estudio de la variación y desarrolla una propuesta en la que reflexiona sobre algunas de las dificultades inherentes a la compresión de este concepto. Por otro lado, el establecimiento de relaciones entre los principios básicos del cálculo y la cinemática ocupó la agenda de investigación de Doorman y Gravemeijer (2009).

En Latinoamérica ha habido un creciente interés por el estudio de la variación, hasta el punto de gestarse un programa de investigación denominado *Pensamiento y Lenguaje Variacional* del cual, algunos de sus antecedentes se muestran en el trabajo de Cantoral y Farfán (1998). Este programa es entendido como una línea de investigación que, ubicada en el seno del acercamiento socioepistemológico, permite tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (CANTORAL Y FARFÁN, 1998). Algunas de las investigaciones de este programa pueden encontrarse en: Dolores, Chi, Canul, Cantú, y Pastor (2009), Diaz (2005), Dolores y Cuevas (2007), Reséndiz (2006).

En Colombia, el estudio de procesos de variación en las aulas escolares ha sido sugerido por los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (COLOMBIA, 1998) y apoyados posteriormente con la publicación del documento de los Estándares Básicos de Competencias (COLOMBIA, 2006) emanados por el Ministerio de Educación Nacional-MEN de Colombia. En este último documento se describe el pensamiento variacional en los siguientes términos:

> […] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.
>
> Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos

> significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (p. 66*)*.

Con el propósito de aproximarse a ese tipo de pensamiento, Vasco (2006) presenta un artículo en el que, además de describir el pensamiento variacional, sugiere algunos elementos para su desarrollo y establece algunas relaciones de éste con la modelación y la tecnología. En ese sentido este investigador señala que:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad (p. 138).

De acuerdo con las anteriores descripciones, el estudio de fenómenos asociados a la percepción, comprensión, representación y caracterización de la variación hace parte fundamental del "pensamiento dinámico" aludido por Vasco anteriormente. Es precisamente en este aspecto donde la Tecnología interviene como una manera de indagar no sólo por procesos asociados a la modelación desde fenómenos de variación en otras ciencias; sino también, como una forma de producir y reproducir las relaciones variacionales que se dan entre algunos objetos matemáticos.

Bajo la anterior mirada de la tecnología, hemos observado en nuestras investigaciones cómo en el desarrollo del pensamiento variacional se involucran procesos de experimentación con software, a partir de los cuales, tanto estudiantes como investigadores, visualizan, generalizan y abstraen relaciones y propiedades de los objetos matemáticos estudiados.

Al interior de nuestras investigaciones hemos diseñado un conjunto de situaciones flexibles, es decir, situaciones en la que los estudiantes no son sometidos a una secuencia rígida de preguntas, las cuales ellos deben ir abordando, como si fuera un cuestionario; sino que por el contrario, son situaciones en las que teniendo en cuenta los propósitos de la investigación se incorporan los asuntos que van emergiendo del trabajo experimental en el aula, así como la formulación de nuevas preguntas, de tal manera que y se promuevan confrontaciones entre los razonamientos, hipótesis y conjeturas de los estudiantes.

En este artículo analizamos dos de los episodios que surgieron en dos investigaciones, que, aunque están relacionadas, indagan por aspectos diferentes del conocimiento matemático. -El primer episodio hace parte de una investigación, que tiene como propósito indagar por el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse a una interpretación del concepto de derivada; esta investigación se desarrolla en el marco de la tesis elaborada por uno de los autores junto al programa de Doctorado en Educación, en la línea de Educación Matemática de la Universidad de Antioquia en Colombia. -El segundo episodio surge, de igual manera, de una pesquisa que indaga por el proceso de génesis instrumental en el estudio de las cónicas, esta investigación se encuentra adscrita al Programa de Maestría en Educación (Matemática) de la misma Universidad.

Ambos episodios surgen de la interacción entre el colectivo de investigadores con el software GeoGebra, en ellos pretendemos mostrar cómo desde dicha interacción pudimos acceder a ciertas relaciones matemáticas las cuales no habíamos explorado con anterioridad, ni habíamos encontrado en los libros de texto de los estudiantes. Discutimos así, cómo estas relaciones surgieron de un colectivo de *seres-humanos-con-GeoGebra* y para ello usamos el constructo teórico de *Humans-with-Media* desarrollado por Borba y Villarreal (2005) al cual nos referiremos en el siguiente apartado.

1. Seres-humanos-con-GeoGebra

En Borba y Villarreal (2005) se presenta un constructo teórico denominado *humans-with –media* en el cual se discute cómo el conocimiento matemático es el resultado de una construcción de un colectivo pensante de *seres-humanos-con-medios*. Estos autores puntualizan que los medios empleados para comunicar, representar y para producir ideas matemáticas condicionan el tipo de matemáticas que son construidas y el tipo de pensamiento a ser desarrollado en esos procesos.

El constructo teórico de estos investigadores está fundamentado epistemológicamente en los planteamientos de Lévy (1993) quien, según Borba y Villarreal (2005), afirma que la tecnología y los artefactos deben ser vistos en interrelación con los seres humanos, de dicha interrelación depende la manera en que producimos conocimiento; según Lévy, las bibliotecas, las ciudades y los artefactos son parte de la manera en que conocemos.

Villarreal y Borba (2010) señalan que el constructo teórico de Seres-humanos-con-medios está soportado en dos pilares, a saber: que la cognición no es un trabajo individual sino más bien de naturaleza colectiva; y que la cognición incluye herramientas, dispositivos, artefactos y medios con los cuales el conocimiento es producido. Dentro de este constructo teórico, la separación entre seres humanos y medios no tiene sentido, pues los medios son componentes del sujeto epistémico, no son simples auxiliares ni complementos, sino una parte esencial y constitutiva de éste. Para estos investigadores, los medios son tan relevantes que el uso de diferentes tipos de medios conduce a la producción de diferentes tipos conocimiento.

La visualización en Seres-humanos-con-medios

La visión del constructo teórico *Seres-humanos-con-medios* permea diferentes esferas de investigación al interior de la Educación Matemática, tal es el caso de la modelación matemática, la experimentación, la educación *on-line* y la visualización. Dado que el interés de este artículo se focaliza en nuestra interacción con el software GeoGebra y en cómo a través de la visualización surgieron algunas ideas para el diseño de estrategias al interior de las investigaciones; centraremos nuestra atención en los elementos teóricos que sobre la visualización se desarrollan en seres-humanos-con-medios.

Para Borba y Villarreal (2005) la visualización ha sido considerada como una forma de razonamiento en la investigación en matemáticas y en educación matemática. Basados en una amplia revisión de la literatura, estos investigadores presentan dos niveles en los que puede considerarse la visualización: el primero asociado a su uso en la prueba matemática formal; y otro, relacionado con su uso en otras actividades matemáticas tales como la elaboración de conjeturas, la solución de problemas o los intentos de explicar algunos resultados matemáticos a colegas o estudiantes. Borba y Villarreal, se apoyan en las palabras de Hanna (2000) para puntualizar que en el primer caso las representaciones visuales no son aceptadas como parte de una prueba formal sino como un acompañamiento heurístico a la prueba que inspira a un teorema o a su demostración; en la segunda, la visualización -no es más que un recurso periférico o pedagógico.

Es así como los autores señalan que, a pesar de haberse iniciado movimientos internacionales para aumentar el estatus de la visualización, continúan ciertas resistencias de reconocer la importancia del razonamiento visual en la investigación matemática.

Aun cuando existe un acuerdo “teórico” sobre el valor pedagógico de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los estudios de Borba y Villarreal (2005) notan cierto tono de desconfianza con respecto a la visualización que, para estos investigadores, puede implicarse de la influencia que la práctica científica de las matemáticas tiene sobre las prácticas pedagógicas. En todo caso, estos investigadores presentan argumentos desde el acceso y comprensión del conocimiento matemático y de las maneras de resolver problemas para justificar la importancia de la visualización en la Educación Matemática.

Al interior del constructo teórico presentado en este apartado, la visualización es un proceso que va más allá del simple acto de mostrar una imagen. Al ser el constructo teórico Seres-humanos-con-medios asumido como una unidad, la separación entre lo interno y externo no tiene sentido, pues dicha dicotomía carece de valor ya que los límites entre ellos no son claros para el ser cognitivo. Para los autores, esta visión es compatible con los planteamientos de Nemirosky y Noble (1997) cuando sugieren que nuestras experiencias, memorias e intenciones se llevan con nosotros. La experiencia que estamos teniendo, o tuvimos con cualquier tipo de medio dado, es parte de esa unidad Seres-humanos-con-medios así no esté disponible en ese mismo momento (BORBA Y VILLARREAL, 2005).

2. Dos episodios

Conforme describimos anteriormente, en este artículo discutimos acerca de dos de los episodios que surgieron en el diseño de las situaciones que utilizaríamos posteriormente con los estudiantes que intervendrían en nuestras investigaciones.

Episodio No 1. La comprensión de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada

El primer episodio al que haremos referencia en este artículo emerge de una investigación cuyo propósito general fue indagar por el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse a una interpretación variacional de la derivada. La investigación involucró varias situaciones en las cuales los estudiantes debían describir y cuantificar la manera cómo covariaban las cantidades que intervenían en dichas situaciones. Posteriormente, ante el requerimiento de representar la tasa de variación para las gráficas de algunas funciones, surgió la necesidad de construir una “herramienta” que simplificara este procedimiento a través del uso del software.

El proceso de construcción de tal herramienta involucró, en primera instancia, una forma de construir un triángulo rectángulo en el cual se pudiera interpretar el cociente incremental que representa la tasa de variación en un punto. En la figura 1 (a) se observa la construcción realizada con el software GeoGebra. En ella, el segmento BE representa $\Delta x = a$, ED representa $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ y el segmento AF representa la razón entre los segmentos ED y BE. Adicionalmente se construyó el punto $F(x_A, AF)$cuyas coordenadas corresponden a la abscisa del punto A y la ordenada a la tasa de variación $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$.

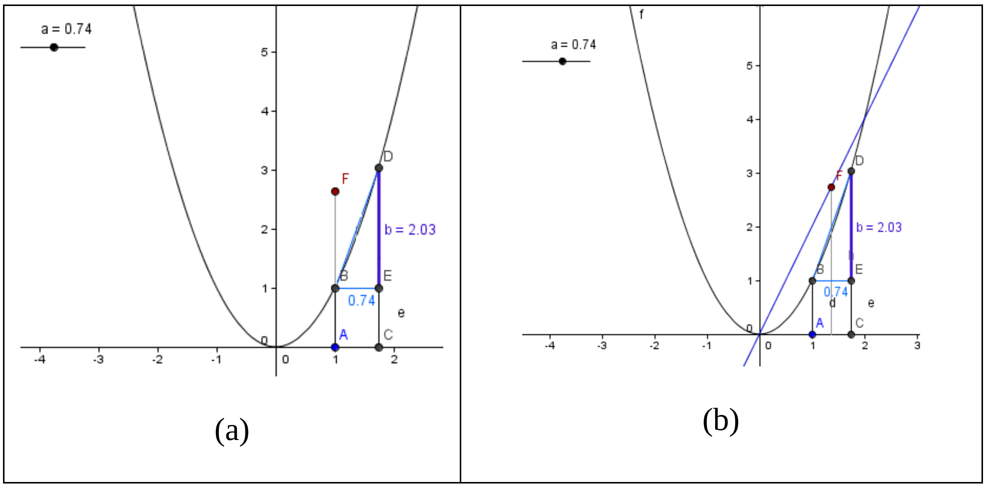


FIGURA 1.Construcción gráfica de la tasa de variación en un punto

El propósito inicial de esta herramienta fuera calcular la tasa de variación en intervalos cada vez más pequeños según el movimiento del "*deslizador a*". De ese modo, el punto F que representa la tasa de variación de *f* en el intervalo AC, se acercaría al punto que representa el valor de la derivada en A en la medida que el deslizador toma valores cercanos a cero. Surgió entonces la pregunta, ¿cómo el estudiante sabría que se aproximaría a la derivada?

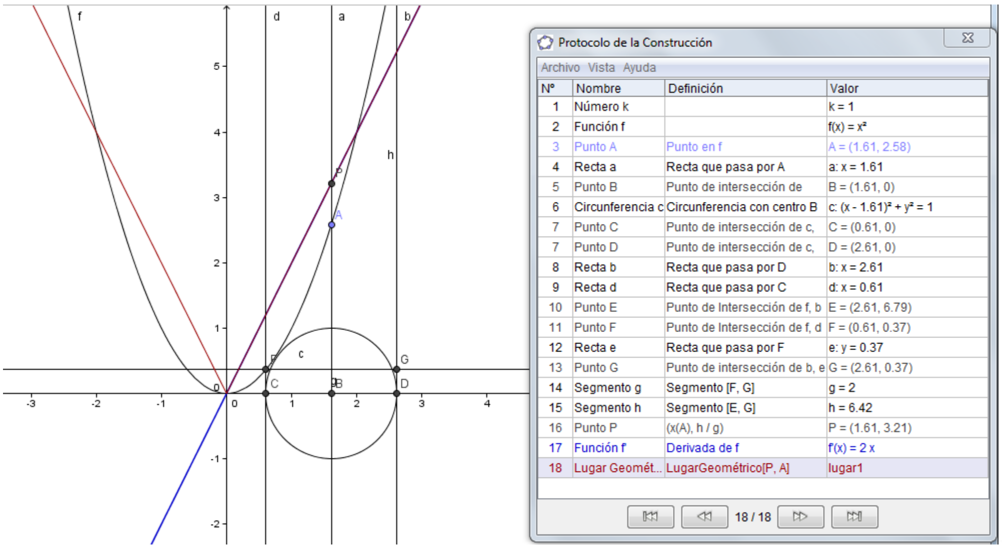
Usamos entonces la herramienta *derivada [f]* del GeoGebra para graficar tal función y, de esta manera, pudimos observar que la longitud del segmento AF coincidía con el valor de la derivada en el punto de la gráfica cuya coordenada en x está en el punto medio de AC. Ver figura 1 (b).

Al desplazar el punto A sobre el eje *x* encontramos que el punto F siempre se ubica en la recta que representa la derivada (recta azul de la figura 1 (b)); hecho que también se cumplía para una función f descrita por una expresión lineal. A partir de la experiencia nos surgió la primera conjetura:

Sea I el intervalo $[x_1, x_2]$ en el cual una función f (lineal o cuadrática) está definida; sea $M(\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$, entonces la derivada de la función f es el lugar geométrico de todos los puntos $F\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right)$.

A pesar de que esta conjetura pudo ser validada de manera inmediata como una consecuencia del teorema del valor medio para derivadas, nos causó especial inquietud, pues sugiere la igualdad entre la función tasa de variación y la derivada de funciones lineales y cuadráticas prescindiendo la noción de límite. Además, tal y como se presenta en muchos libros de texto de cálculo, nuestro abordaje del teorema del valor medio era visto sólo como un resultado local y estático. Por medio del software GeoGebra pudimos establecer una interpretación dinámica y más global de este teorema y relacionarlo con la función tasa de variación.

Posteriormente exploramos la construcción simulando un procedimiento con regla y compás. Usando el software GeoGebra desarrollamos la construcción, tal y como puede observarse en la Figura 2.



Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Número k		k = 1
2	Función f		f(x) = x²
3	Punto A	Punto en f	A = (1.61, 2.58)
4	Recta a	Recta que pasa por A	a: x = 1.61
5	Punto B	Punto de intersección de	B = (1.61, 0)
6	Circunferencia c	Circunferencia con centro B	c: (x - 1.61)² + y² = 1
7	Punto C	Punto de intersección de c,	C = (0.61, 0)
7	Punto D	Punto de intersección de c,	D = (2.61, 0)
8	Recta b	Recta que pasa por D	b: x = 2.61
9	Recta d	Recta que pasa por C	d: x = 0.61
10	Punto E	Punto de Intersección de f, b	E = (2.61, 6.79)
11	Punto F	Punto de Intersección de f, d	F = (0.61, 0.37)
12	Recta e	Recta que pasa por F	e: y = 0.37
13	Punto G	Punto de intersección de b, e	G = (2.61, 0.37)
14	Segmento g	Segmento [F, G]	g = 2
15	Segmento h	Segmento [E, G]	h = 6.42
16	Punto P	(x(A), h / g)	P = (1.61, 3.21)
17	Función f'	Derivada de f	f'(x) = 2 x
18	Lugar Geomét...	LugarGeométrico[P, A]	lugar1

FIGURA 2. Construcción y protocolo de construcción de un posible trazo de la derivada con regla y compás**.**

Con excepción del trazo negativo de la derivada en el tercer cuadrante, la traza construida (lugar geométrico) de la función tasa de variación y la derivada coincidían en todos sus puntos sin importar el radio de la circunferencia construida. Este resultado sugería una construcción con regla y compás para la derivada de una función lineal y cuadrática. Decidimos experimentar con funciones trigonométricas, exponenciales y polinómicas de grado mayor que 2. Con esta experiencia conseguimos observar la presencia de la noción de límite, ya que la función *tasa de variación* (lugar geométrico obtenido por el punto P) tiende a la función derivada a medida que el radio de la circunferencia se hace más pequeño. Este resultado nos ofreció más argumentos visuales para justificar en la primera conjetura que habíamos plateando sobre el Teorema de valor medio y las funciones lineales y cuadráticas. Finalmente creamos entonces un *deslizador k* que representara el radio de la circunferencia y de esa manera pudimos observar que la función derivada podría definirse en términos del límite de la función tasa de variación (f_v ver figura 3). De la siguiente manera:

$$\lim_{k \to 0} f_v(x) = f'(x)$$

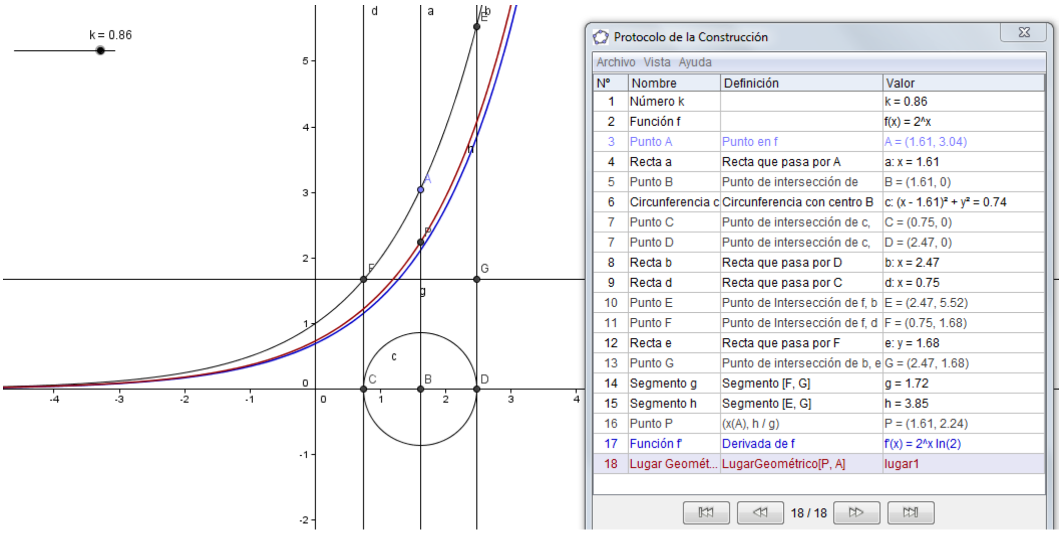


FIGURA 3. Gráfica que muestra relación entre f_v y f'.

A partir de nuestra comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en esta experiencia, observamos una alternativa para introducir el concepto de derivada por medio del estudio de la tasa de variación, tanto a nivel local como global. De este modo, preguntas como: ¿Sería posible calcular el "error" de aproximación de $f_v(x)$ hacia $f'(x)$ dependiendo del valor de k? y ¿Cuál es el valor de verdad del reciproco de la primera conjetura plateada anteriormente? Fueron surgiendo y abordándose a través de la interacción con el software GeoGebra y en los casos necesarios, apoyados con cálculos a lápiz y papel.

Episodio No 2. La variación del "segmento central" de una elipse

El episodio que narramos a continuación se desprende de la tesis de maestría que lleva por título "*la génesis instrumental en el estudio de las cónicas como lugares geométricos: el caso de GeoGebra*". Este episodio tiene lugar en las discusiones del colectivo de investigación al analizar las producciones de los estudiantes cuando describían algunas características de una elipse a través del uso del GeoGebra. Entre las características que los estudiantes reconocían se tienen: "*Dos puntos fijos*" (focos), "*una distancia constante*" (suma de las distancia de un punto de la elipse a los focos) y "*un radio que varía*" (refiriéndose al segmento que trazado desde cualquier punto de la elipse al centro de la misma, al que llamamos *"segmento central"*).

Al escuchar en las verbalizaciones de los estudiantes "*radio que varía*" de inmediato se nos ocurrió matematizar esa variación. Para ello surgieron preguntas como: ¿De qué depende esa variación? ¿Cómo varía? Las respuestas a estas preguntas nos permitieron determinar que la función que estábamos analizando describía la covariación entre el ángulo ɵ y la longitud del "segmento central" OP (ver figura 4).

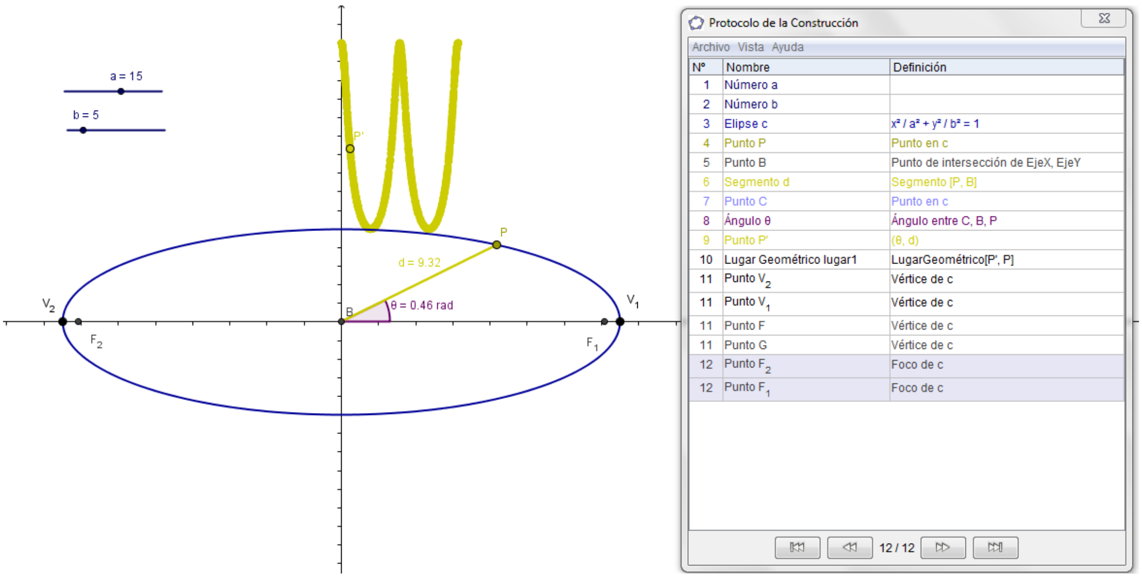


FIGURA 4. Covariación entre la longitud del segmento central de la elipse y el ángulo central de la misma.

En la exploración de algunas propiedades de esta función cambiamos la excentricidad de la elipse con lo cual pudimos conjeturar cierto comportamiento en la gráfica de tal función. En la figura 5 se muestra una secuencia de funciones que se obtiene al cambiar la excentricidad de la elipse.

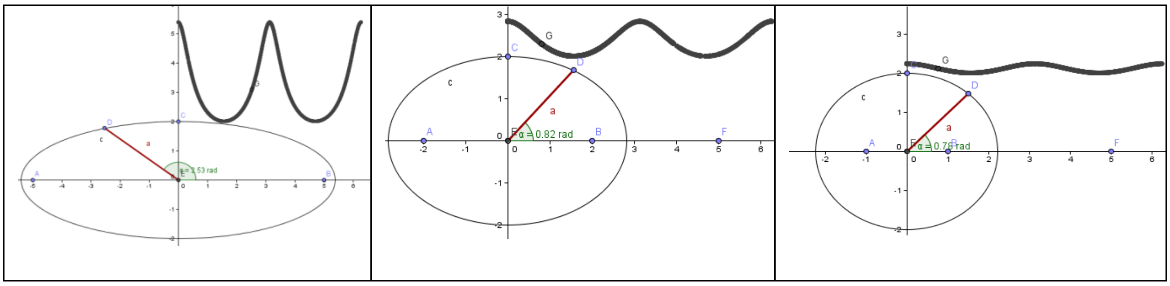


FIGURA 5. Comportamiento de la función dependiendo de la excentricidad.

De la secuencia anterior pudimos establecer las siguientes características:

- Cuando la distancia entre los focos tiende a cero la función se acerca a una constante.
- Cuando la distancia entre los focos se hace cada vez mayor, se generan cambios cada vez más "bruscos" en los valores de $\theta = n\pi$.
- La función es periódica y su período es π.
- La abscisa del intercepto de la elipse con el eje positivo *x* corresponde a la ordenada del intercepto de la función con el eje *y*.

Algunas de estas conjeturas fueron validadas de inmediato con el establecimiento de relaciones entre la elipse y la circunferencia. Para la validación de otras fue necesario determinar la expresión algebraica que representaba la función "segmento central".

En la interacción entre la visualización del software y las anotaciones en lápiz y papel pudimos determinar que la función "segmento central" que estábamos analizando está dada por la ecuación $f(\theta) = ab\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{-1}}$ donde a y b son los respectivos parámetros de la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La gráfica $f(\theta)$ se muestra en la figura 6.

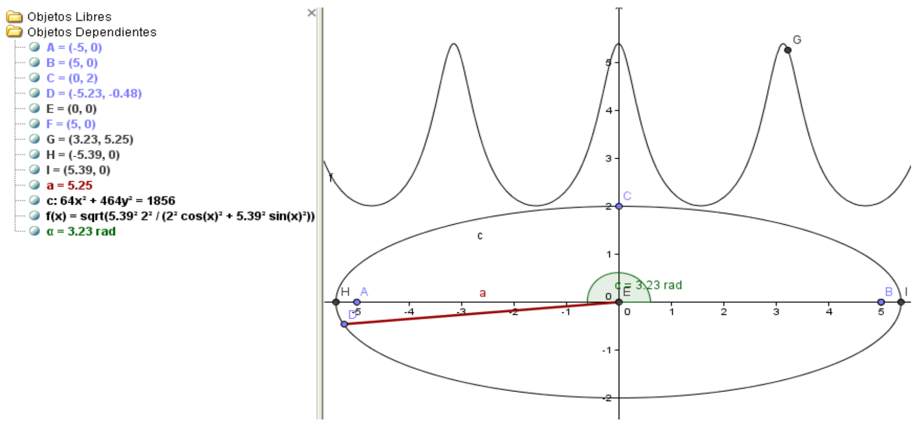


FIGURA 6. Gráfica de la función eje central.

El estudio de esta función abrió el panorama para estudiar otras funciones que se pueden determinar en la elipse, las cuales a su vez se convierten en una generalización de las funciones trigonométricas presentadas en los currículos colombianos de Educación Media (16-17 años). Algunas de esas funciones se observan en la figura 7:

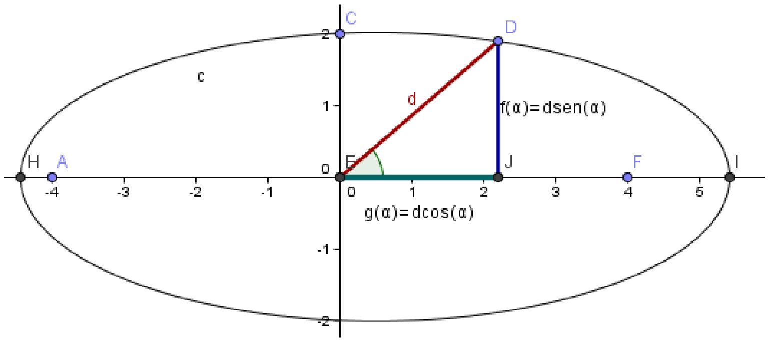


FIGURA 7.Generalización de las funciones trigonométricas en la elipse.

Con nuestro estudio de estas funciones nuevos cuestionamientos emergieron, entre ellos:

- ¿Desde cuál perspectiva podría ser pertinente el estudio de estas funciones en el aula de clase?
- ¿Cuál es la importancia que representa para el desarrollo del pensamiento variacional el estudio de estas funciones en las matemáticas escolares?
- ¿Podría integrarse el estudio de estas funciones al currículo escolar?

Discusión y conclusiones

Durante nuestra interacción con el software GeoGebra pudimos observar maneras alternativas de aproximarse a los conceptos matemáticos y al software mismo. Las necesidades que van surgiendo aunadas a los momentos de incertidumbre experimentados en la interacción con el software, hizo que nuevas preguntas emergieran y al abordarlas se pudo ampliar tanto nuestra visión de algunos objetos matemáticos como de las potencialidades del software. Consideramos de suma importancia el papel de tales preguntas, ya que en la misma interacción se van desencadenando conjeturas y surgen mayores evidencias para su confirmación o refutación.

En el proceso de diseño de las situaciones atravesamos por diferentes momentos que parecen involucrarse en el desarrollo del pensamiento variacional a través del uso de un software como el GeoGebra, a saber: captación y descripción de una relación, creación de una estrategia, construcción de herramientas, surgimiento de conjeturas, construcción de representaciones gráficas y algebraicas de tales relaciones, refutación o demostración formal de las conjeturas. Los anteriores momentos fueron dinamizados en la interacción de un colectivo-de-investigadores-con-GeoGebra[3] y, aunque el uso de lápiz y papel fue necesario para apoyar el análisis y demostración formal de las conjeturas, estuvo subordinado por las ideas que fueron emergiendo de la visualización proporcionada por el software.

Villarreal y Borba (2010) observan que en la literatura se está demandando una exploración del potencial de los computadores con el fin de evitar el uso de estos medios de manera anticuada. En ese sentido observamos desde nuestra experiencia, cómo a través de la interacción con el software surgen nuevos cuestionamientos que alimentan la exploración del software mismo y redimensionan la mirada sobre los objetos matemáticos, a la vez, de tales cuestionamientos emanaron nuevas necesidades con las cuales conocimos otras potencialidades del software, hasta el momento no exploradas por nosotros. Sin embargo el surgimiento de relaciones variacionales como las presentadas en el episodio 2, -ponen de relieve nuevos cuestionamientos sobre la pertinencia o no de incorporar esos conceptos en el aula de clase. Desde nuestra experiencia como profesores de una institución educativa de carácter privado, hemos observamos que los estudiantes (15-16 años) pueden aproximarse con menores dificultades al estudio de algunas relaciones como las presentas en el episodio mencionado. Sin embargo, la discusión queda abierta, y cada aproximación a estos cuestionamientos ofrecerá nuevos elementos para la discusión sobre cómo el uso de la tecnología puede redimensionar los contenidos de las matemáticas (DEVLIN, 1997, citado en BORBA Y VILLARREAL, 2005) y a la vez a los currículos en las matemáticas escolares.

La posibilidad de generar "herramientas" en el software, transformarlas y usarlas en el estudio de algunos objetos matemáticos, permitió un diálogo entre la visualización y los procedimientos algebraicos con papel y lápiz y, permitieron la validación formal de algunas conjeturas. Con esto no pretendemos suprimir la polémica de la relación de la visualización y la demostración a los que Borba y Villarreal (2005) hacen alusión, pero sí mostrar otras evidencias de cómo el pensamiento matemático, en este caso el variacional, se va transformando *cualitativamente* en la interacción de un colectivo pensante de seres-humanos-con-Medios.

---

[3] Usamos el término *colectivo-de-investigadores-con-Geogebra* para referirnos a los miembros de nuestro grupo de investigación quienes periódicamente se reúnen para discutir sobre la manera de construir conocimiento matemático a través del software Geogebra

Basados en esta experiencia, en otros elementos proporcionados en nuestras investigaciones y en los principios epistemológicos del constructo teórico seres-humanos-con-medios ofrecemos una mirada alternativa a la *representación matemática proporcionada por el software GeoGebra;* discutimos entonces cómo esta representación (en singular) más que una suma de representaciones algebraicas, numéricas y geométricas, puede considerarse como una *Unidad* en la cual los registros están armonizados, es decir, dinámicamente relacionados, promoviendo la coordinación y la comprensión de los objetos matemáticos. Desde la investigación esperamos aportar mayores evidencias que contribuyan a la caracterización de dicha unidad de representación proporcionada por el GeoGebra.

Finalmente vale la pena aclarar que desde nuestras investigaciones, no consideramos el uso del software como un medio para enseñar o aprender matemáticas de manera más fácil, sino que consideramos que, a través de un colectivo pensante de seres-humanos-con-GeoGebra, la construcción del conocimiento matemático es diferente y parece armonizar con los elementos de una parte de nuestra sociedad en donde el uso de chats, celulares, computadores, internet, redes sociales y software libre se ha masificado e incorporado tanto a la cotidianidad, que ya hacen parte inherente de la cultura.

Referencias

BORBA, M., e VILLARREAL, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking.* New York: Springer.

CANTORAL, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. *Actas Latinoamerica de Matemática Educativa. 17,* págs. 1-9. México D.F.: Clame.

CANTORAL, R., e FARFÁN, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* (42), 353-369.

CANTORAL, R., MOLINA, J., e SÁNCHEZ, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez, & J. Molina (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 463-468). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

CARLSON, M., JACOBS, S., COE, E., LARSEN, S., e HSU, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *EMA , 8* (2), 121-156.

COLOMBIA, Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias.* Bogotá: Magisterio.

COLOMBIA, Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

DIAZ, L. (2005). Profundizando en los lenguajes entendimientos estudiantiles de la variación. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa , 8* (002), 145-168.

DOLORES, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada.* México D.F: Ediciones Dias de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.

DOLORES, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

DOLORES, C., e CUEVAS, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Relime. Revista de Investigación en Matemática Educativa, 10* (1), 69-96.

DOLORES, C., CHI, A. G., CANUL, E. R., CANTÚ, C. A., e PASTOR, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñazan de la matemática. *UNON. Revista iberoamericana de Educación Matemática* (18), 41-57.

DOORMAN, L. M., e GRAVEMEIJER, K. P. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the undertanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education , 41* (1-2), 199-211.

RESÉNDIZ, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latiniamericana de Investigación en Matemática Educativa , 9* (003), 435-458.

TALL, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM. Mathematics Education , 41* (4), 481-492.

VASCO, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. In C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos.* (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

VILLA-OCHOA, J. A., e MESA, Y. M. (2009). *El concepto de función en las matemáticas escolares. El caso de la función cuadrática.* Informe de investigación no publicado, Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas de la Asociación Sindical de Educadores del Municipio de Medellín, Medellín.

VILLARREAL, M., e BORBA, M. C. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and … notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM Mathematics Education , 42* (1), 49-62.