Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO EN SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA DESDE LA TEORÍA APOE

Linda Xitlali Díaz Nava
Universidad Autónoma de Zacatecas.malibux_135@hotmail.com
Darly Alina Kú Euán
Universidad Autónoma de Zacatecas.ku.darly@gmail.com

Resumen

La presente investigación pretende desarrollar una propuesta didáctica para segundo grado de secundaria que permita a los alumnos construir el concepto de ángulo de una manera dinámica visto desde la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). La propuesta didáctica permitirá analizar los mecanismos y construcciones mentales que los alumnos realizan para poder definir un concepto matemático, en este caso, en el área de geometría, entendiendo que en esta disciplina los conceptos se definen a partir de sus propiedades. Asimismo, de acuerdo con la metodología del marco teórico se realizará una descomposición genética para llevar a cabo las actividades que permitirán que los alumnos construyan el concepto de ángulo de forma dinámica para su posterior uso en la resolución de problemas.

Palabras clave: geometría, ángulo, descomposición genética, teoría APOE.

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son fundamentales para el desarrollo intelectual de cualquier individuo, les ayuda a ser lógicos, a razonar ordenadamente y a tener una mente preparada para el pensamiento, la crítica y la abstracción (Rodríguez, 2014). Dentro de la matemática existen ramas que ayudan de una manera más específica a desarrollar estos tipos de pensamiento, cada una abona por su parte. Por ejemplo, el álgebra ayuda a potenciar las destrezas lógicas y el pensamiento abstracto; la aritmética les proporciona las bases del álgebra, la comprobación de lo que se puede hacer, propiedades de orden y de campo, entre otros; por otro lado, la geometría, así como las demás ramas de la matemática, ayuda al alumno a desarrollar destrezas mentales de diversos tipos, como la intuición espacial, la visualización, la manipulación, la deducción y la experimentación. Andonegui (2006, pág. 35) afirma que "el estudio de la geometría ayuda a potenciar habilidades de procedimiento de la información recibida a través de los sentidos y permite al estudiante desarrollar, a la vez, muchas otras destrezas de tipo espacial".

La geometría es la encargada de estudiar las formas y propiedades de las figuras y cuerpos geométricos (Godino y Ruíz, 2002), mismos que podemos encontrar en la vida cotidiana y de las que podemos encontrar varias aplicaciones inmediatas. Por ejemplo, en la misma naturaleza podemos localizar el estudio de la geometría, como en la formación de los panales de abeja, cómo es que se forman hexágonos regulares que a su vez forman teselados regulares de manera precisa. En el contexto inmediato, con la medición de áreas y perímetros de terrenos, en el arte podemos encontrar la geometría con la construcción de obras como son las pirámides de Egipto, la razón aurea para la construcción en la arquitectura. La geometría ha estado y está presente en la vida diaria, no sólo de los matemáticos y arquitectos, sino de todas las personas.

Lamentablemente, el estudio de la geometría presenta algunas dificultades en su desarrollo formal, "la enseñanza de la geometría ha estado limitada al hecho de conceptualizar figuras y plasmarlas sobre papel" (Goncalves, 2006, pág. 84). Los docentes, encargados de guiar el aprendizaje, dejan de lado la geometría por considerarla una disciplina que no muestra mayor rigor a comparación con el álgebra. En la educación formal se le da más peso al álgebra que a otras ramas de las matemáticas ya que aún se tiene la concepción de que las matemáticas son números, letras y operaciones, no se ve más allá las propiedades de la geometría.

Es en geometría donde los alumnos para poder construir un objeto matemático, además de su conceptualización, deben hacer uso de las propiedades que posee cada uno, ya que es esto lo que define al objeto en sí. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000) menciona a la geometría como "la materia mediante la cual el estudiante estudia las formas y estructuras geométricas, y aprende a utilizar sus características y relaciones". La comprensión de la geometría es un campo extenso, es por eso que se han propuesto algunas teorías, para evaluar el nivel de adquisición de esta rama de las matemáticas.

Sin embargo, la falta de un currículum que se adecue a las características de los alumnos es otro factor que impide que los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la geometría se lleven a cabo de manera satisfactoria o explotando al máximo la disciplina.

Pero qué hacer si los encargados de guiar a los alumnos en el proceso de aprendizaje no consideran todo lo anterior, reconociendo la importancia de la geometría en sí, entendiendo que ésta ayuda a desarrollar muchas habilidades de proceso de la información recibida por medio de los sentidos, que también contribuye al desarrollo de muchas destrezas de tipo espacial que le permiten al estudiante comprender el espacio e interactuar con él, que además contribuye al desarrollo de habilidades mentales, como la intuición espacial e integración de la visualización con la conceptualización.

Existe un factor al cual se le puede atribuir el hecho de que los docentes no le den prioridad a la geometría, como la no superación de experiencias vividas por el docente en su etapa de formación y por eso termina planeando y utilizando los mismos recursos que ya experimentó, sin antes haber revisado el éxito o fracaso de los mismos al interior del aula. Otro factor que ha sido importante es el hecho de que en la década de los setenta se presentó el auge de las Matemáticas Modernas, lo que propició que la Geometría pasara a un segundo renglón dentro del ambiente escolar, relegándose al final de los contenidos anuales de estudio y, en consecuencia, que no alcanzara el tiempo para abordar los contenidos propios de esta ciencia.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Al revisar algunos trabajos de investigación, observé que estos se centran en los problemas que hay al aprender geometría, pero se deja de lado el aspecto cognitivo, es decir qué requieren los estudiantes para aprender o comprender los conceptos, y cómo entre ellos existe una transversalidad durante el ciclo escolar. En específico, el concepto de ángulo, el cual en ocasiones se ve como un concepto aislado y sin conexión con otros contenidos. Entender el concepto como un objeto aislado y de forma estática no le permite al alumno comprender el concepto de estudio. Es decir, siempre lo va querer ver de la misma forma, posición y orientación, si éste cambia, para el alumno deja de ser un ángulo, y no se fijan en que cumplan las propiedades.

> En el discurso escolar la noción de ángulo ha jugado un papel ambiguo en la escuela, sus definiciones, caracterizaciones y aplicaciones pueden encontrarse en asignaturas como matemáticas, física y dibujo técnico. La tradición escolar asume que cuando se define, se caracteriza, se expone su tipología y se manipula el concepto en la clase de matemáticas, su uso, aplicación o interpretación en otras asignaturas no debiera representar una dificultad para los estudiantes. Contrario a esto, es en las otras asignaturas donde se pueden localizar los conflictos más comunes en el manejo de esta noción. (Rotaeche, 2008, pág. 9).

De acuerdo a lo mencionado por Rotaeche (2008), la mayoría de las veces los maestros damos por sentado que con el simple hecho de enseñarle al alumno el concepto de ángulo de forma estática lo va a comprender. Desde mi experiencia, en mi práctica docente he caído en este error, pensar en que los alumnos aprenden el concepto de ángulo por el simple hecho de que es un objeto muy visual y que cualquiera tiene una idea de lo que es un ángulo, pero el verdadero problema no es que identifiquen visualmente el ángulo, sino que puedan utilizarlo posteriormente en la resolución de problemas.

En sí, la verdadera problemática en la enseñanza de Geometría es que enseñamos conceptos para memorizar, de manera estática, y no para comprender. Esto debido a que algunos profesores no se hacen responsables de las dificultades y por tanto no surgen verdaderos proyectos de investigación, que si bien no es el único trabajo del profesor y no es en sí su responsabilidad completamente, sí podemos ser generadores de proyectos que orienten la enseñanza este campo de las Matemáticas, no se le da la relevancia que ésta tiene y a lo que contribuye en el desarrollo del pensamiento matemático.

De acuerdo a la problemática planteada en el apartado anterior, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo los alumnos de segundo grado comprenden el concepto de ángulo en el nivel secundaria?

Para llevar a cabo esta investigación se ha planteado el siguiente objetivo general:

Elaborar una secuencia didáctica que le permita al alumno aprender y comprender el concepto de ángulo de una manera dinámica visto desde la teoría APOE.

Para llevar a cabo el objetivo general, se llevaron a cabo los siguientes objetivos particulares:

- Diseñar una Descomposición Genética del concepto de ángulo en Secundaria.
- Diseñar actividades basadas en la DG del concepto de ángulo.
- Aplicar las actividades que abordan el concepto de ángulo.
- Analizar los resultados obtenidos del instrumento de investigación.

3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El concepto de ángulo es uno de los objetos matemáticos que vemos más tangiblemente en la vida cotidiana, como es el ángulo de inclinación de una pendiente, los giros que da una persona al caminar, la abertura de una puerta o de unas tijeras o la rotación de una figura. La geometría es muy utilizada en lo cotidiano, y es necesaria para comprender y analizar la información que se tiene a nuestro alrededor, por lo tanto su uso va más allá del contexto áulico. Sin embargo, como antes se mencionó, algunos autores encuentran que el problema de este concepto en nivel secundaria es que no tiene una transversalidad ni entre los contenidos de la matemática misma y ni una transpolación a la vida diaria para resolver problemas que impliquen el uso del ángulo.

La definición de ángulo que se ha aprendido desde la educación inicial ha estado limitada la mayor parte del tiempo a una sola representación, que es la forma en que se ve un ángulo, como una abertura entre dos semirrectas. Sin embargo, los alumnos no han conceptualizado todo lo que está detrás de esta definición, lo ven como un ente estático sin relación con otro contenido, sin embargo no es así, hay más materias en las cuales este objeto matemático incide, como la Física, cuando miden el ángulo de incidencia, el ángulo de reflexión, en el lanzamiento de proyectiles. En la misma matemática, no se limita a un solo grado o a un solo contenido, sino que este concepto es utilizado de manera indirecta para la resolución de muchos problemas, como en trigonometría, en semejanza, teorema de Pitágoras, construcción de polígonos dados ciertos datos, entre otros (SEP, 2011).

Por estas razones es importante el estudio del concepto ángulo como un objeto matemático con transversalidad en los contenidos de la educación básica, cómo es que los alumnos pueden abstraer el concepto para posteriormente generalizarlo y utilizarlo en otra aplicación dentro y fuera de la matemática misma. Es por esto que la presente investigación está dirigida a proponer una secuencia didáctica que permita a los alumnos comprender las propiedades del concepto de ángulo para la transversalidad en la aplicación del mismo.

4. FUNDAMENTO TEÓRICO

Se ha elegido una teoría de corte psicogenético ya que ayudará a ir entendiendo los procesos por los cuales se va ir creando el concepto para poder conceptualizarlo, entenderlo en todas sus representaciones. La teoría APOE (por sus siglas Acción, Proceso, Objeto y Esquema) servirá como eje rector, ya que existen trabajos basados en teorías metodológicas como las Situaciones Didácticas de Brosseau y la Teoría de abstracción de Mitchelmore, pero no existen trabajos desde la teoría APOE a nivel secundaria, es por esto que se ha elegido ahora una teoría que ayude a entender los procesos cognitivos que los alumnos hacen al aprender un concepto.

Esta teoría fue propuesta por Dubinsky en 1985, nace a partir de preguntarse cómo es que el estudiante aprende conceptos matemáticos. La teoría apuesta por que todos los conceptos matemáticos se pueden aprender construyendo acciones, procesos y objetos que se organizan en esquemas. (Marambio, 2010).

La abstracción reflexiva se refiere a la reflexión sobre las acciones que se hacen sobre un objeto de conocimiento, un proceso de construcción del conocimiento matemático, esto debido a la reflexión que se hace sobre las acciones y la interiorización que se da por medio de ésta.

Este proceso de construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas principales: acción, proceso y objeto (Asiala, 1996), que no necesariamente tiene que ser un proceso lineal. Pero tal y como lo describe:

El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas con el fin de manejar las situaciones. (Dubinsky,1996)

Por ello, a continuación se describen cada una de estas etapas de construcción de conocimiento:

*Acción***:** Es una transformación de un objeto que es percibida por un sujeto como algo externo, se realiza por medio de una reacción a sugerencias que proporcionan detalles a seguir. Para poder realizar una acción es importante que el individuo realice una profunda comprensión sobre el cambio dado.

Si dentro de la comprensión de un concepto por parte del sujeto se limita a realizar acciones, se dice que posee una concepción acción de tal idea. Siendo esta parte inicial del proceso crucial para la comprensión del concepto.

*Proceso***:** Esto sucede cuando una acción se va repitiendo y el individuo va reflexionando sobre la misma, se interioriza en un proceso. Esto quiere decir que se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, la diferencia ahora será que no necesariamente trasmitida por un estímulo externo, puesto que ahora ese individuo tiene una concepción de proceso de una transformación y reflexionando sobre y describiendo, pudiendo revertir los pasos de transformación sin realizarlos.

*Objeto***:** Se refleja cuando el individuo es capaz de reflexionar sobre las operaciones realizadas a un proceso, toma conciencia del todo, realiza transformaciones que actúan sobre él, y puede construir esas transformaciones. Cuando esto se realiza se está pensando en dicho proceso como un objeto. Finalmente, este proceso puede ser encapsulado en un objeto.

*Esquema***:** Este proceso termina en una colección coherente de acciones, procesos y objetos en relación con otros esquemas que tienen un concepto en particular. Esta coherencia tiene para su uso lo que está dentro del alcance del esquema y lo que no es también.

Al llevar a cabo este proceso se realizan 7 pasos para el proceso mental y son: Interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, generalización, reversión y tematización.

Interiorización de una acción: Es el mecanismo mental que da lugar a un proceso después de realizar una reflexión sobre la acción involucrada. Cuando una serie de acciones sobre objetos cognitivos pueden ser realizadas o imaginadas para ser ejecutadas en la mente del estudiante sin necesariamente llevar a cabo todos los pasos específicos, decimos que la acción se ha interiorizado en un proceso (Dubinsky, 1991).

Coordinación: Piaget se refiere a este mecanismo como coordinación general de acciones, la cual se refería a que en la construcción de una nueva acción o de un proceso intervenían dos o más acciones que se relacionan entre sí (Dubinsky, 1991). Es decir, el proceso de coordinación de acciones o de procesos conduce a la construcción de un nuevo proceso unificador y más concreto.

Encapsulación: Se refiere al cambio que hay de una concepción proceso a una concepción objeto. Este objeto puede considerarse como una idea total y puede actuarse mentalmente sobre él por medio de acciones y procesos. En este caso decimos que un proceso ha sido encapsulado en un objeto. Entonces, la encapsulación es el proceso de conversión de un proceso dinámico en un objeto estático (Glosario RUMEC).

Desencapsulación: Es el proceso mental de volverse desde un objeto al proceso desde el cual fue encapsulado el objeto o tuvo su origen (Dubinsky, 1991).

Generalización: Cuando un estudiante aprende a aplicar un esquema existente a una colección más amplia de fenómenos, entonces decimos que el esquema ha sido generalizado. Esto ocurre porque el estudiante se vuelve consciente de la aplicabilidad más amplia del esquema o de un proceso o cuando un proceso se hace un objeto. Por tanto, el esquema queda igual y lo único que cambia está en el objeto que puede ser asimilado por el esquema ahora ampliado.

Reversión: Cuando un proceso existe interiormente es posible pensar en la reversión, como un medio de construir un nuevo proceso que consiste en revertir el proceso que le dio origen.

Tematización: Cuando un estudiante reflexiona sobre un esquema, viéndolo como "un todo", y es capaz de realizar acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido tematizado en un objeto (Asiala *et al*., 1996). En relación con este mecanismo, Piaget y García (2004, p. 103) definen la tematización como: "el paso del uso o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la conceptualización".

Para llevar a cabo la construcción de un concepto matemático también es importante que se realice una descomposición genética del mismo. Una *descomposición genética* es una descripción idealizada de las representaciones, vínculos, objetos, procesos y acciones esperadas matemáticamente relacionadas con el concepto.

Ésta proporciona un trayecto para la adquisición de información del concepto por parte del estudiante, pero esto no significa que realmente la trayectoria seguida por los estudiantes sea la planteada. Existiendo de esa manera la posibilidad de que distintas descomposiciones puedan coexistir para un mismo concepto.

Lo importante es que cualquier descomposición genética sea un instrumento que realmente describa las observaciones de los trabajos de los alumnos.

Es por esto que el estudio del concepto ángulo visto desde la teoría APOE es un problema que se debe atender y comprender el proceso que se sigue para que éste se conceptualice. Realizando, de acuerdo a la teoría propuesta, una descomposición genética del concepto, todo lo que implica aprender y comprender el concepto, para posteriormente elaborar una propuesta didáctica que permita a los alumnos aprender significativamente el concepto de ángulo, entendiendo el aprendizaje significativo como "cuando los contenidos: Son relacionados de modo no arbitrario y sustancial con lo que el alumno ya sabe." (Ausubel, 1983). Entonces si los alumnos relacionan sus experiencias con el conocimiento, lograrán construir su propia definición de ángulo y posteriormente utilizarla como un elemento en su repertorio de esquemas conceptuales.

5. METODOLOGÍA Y PROSPECTIVAS DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación a realizar se llevará a cabo en el municipio de Juan Aldama en la entidad de Zacatecas donde se ubica la Esc. Sec. Gral. "Juan Aldama", la cual tiene 19 años de creación, es relativamente la escuela más joven que hay en el municipio y esto hace que el prestigio que tiene sea bajo, ya que es considerada como la escuela a donde van todos los que no quedan en las otras

ISSN: 2594-1046

secundarias. Se tomará un grupo de segundo grado con una matrícula de 20 alumnos (aproximadamente).

La forma de realizar la investigación es a partir de la elaboración de una descomposición genética, de acuerdo a la teoría APOE, del concepto de ángulo para posteriormente realizar una secuencia didáctica que les permita a los alumnos comprender todas las propiedades que aborda este concepto de manera dinámica.

Se llevará a cabo la implementación de la secuencia didáctica y se analizarán los resultados obtenidos para poder establecer las conclusiones del trabajo realizado y ver en qué medida se cumplieron los objetivos planteados y qué tan verdadera era la hipótesis planteada.

Para finalmente hacer el análisis de los resultados y realizar el reporte final de la investigación. A partir de ello, se pretende mejorar la propuesta y poderla llevar a cabo en un trabajo posterior.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andonegui, M. (2006). Desarrollo del pensamiento matematico. Cuaderno núm. 12 Geometría: conceptos y construcciones elementales. Caracas, Venezuela.

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo.

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). ¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica. México: SM.

Cabrera, L. (2009). El pensamiento y lenguaje variacional en el desarrollo de competencias. México: CINVESTAV, Tesis de Maestría .

Cantoral, R. (2001). Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado. En J. Domínguez, & M. Sierra, Tendencias actuales de las matemáticas, su história y su enseñanza (págs. 97-110). Salamanca: Univerisdad de Salamanca.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper Use of Linear Reasoning: An In-Depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors. Educational Studies in Mathematics , 50 (3), 311-334.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). The illusion of linearity: From analysis to improvement. New York: Springer.

Flores, Á. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas de Bachillerato. Educación Matemática , 63-98.

Ford, J. (1986). Chaos: Solving the Unsolvable, Predicting the Unpredictable. En M. Barnsley, & S. Demko, Chaotic Dynamics and Fractals. Orlando Florida: Academic Press.

Godino, J. (2002). Geometría y su didáctica para maestros.

Goncalves, R. (2006). Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en geometria. Revista de Ciencias de la Educación.

ISSN: 2594-1046

Hernández, J., Borjón , E., & Torres, M. (2015). La presencia de la Tecnología en la formación inicial de los profesores de matemáticas del nivel medio superior. AMIUTEM, (pág. 11). Zacatecas.

IEESA. (2012). ¿De dónde vienen y a dónde van los Maestros mexicanos? La formación docente en México 1822-2012. Obtenido de Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación: http://www.snte.org.mx

Juárez, J. A., Mejía, A., González A. & Slisko, J. (2014). La construcción del modelo situacional de un problema matemático: El análisis basado en el Marco del Experimentador Inmerso. Revista de Didáctica de las Matemáticas , 87, 81-99.

Larios, V., & Díaz-Barriga, A. (2013). Las prácticas docentes en Matemáticas en el estado de Querétaro. Querétaro: UAQ.

Lyapunov, A. M. (1892). The general problem of the stability of motion. Kharkov: Kharkov Mathematica Society.

Marambio, V. (2010). Construcción del concepto de semejanza de tríangulos desde el punto de vista de la Teoría APOE. Valparaiso.

Mathematics, N. C. (2000). Principios y estandares para la educación matemática. Traducción de Manuel Fernández Reyes. España.

May, R. (1976). Simple Mathematica Models with very complicated Dynamics. Nature , 459-467.

Parks, P. C. (1992). A. M. Lyapunov's stability theory—100 years on*. IMA Journal of Mathematical Control & Informat , 275-303.

Pochulu, M., & Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime , 361-394.

Rodríguez, S. (02 de Octubre de 2014). Mephistofeles01. Recuperado el 12 de Marzo de 2016, de https://mephistofeles01.wordpress.com/author/mephistofeles01/

Rotaeche, R. (2008). La construccón del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria . México .

SEP. (1999). Planes de Estudio. Recuperado el 18 de mayo de 2016, de Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación: http://www.dgespe.sep.gob.mx/planes/les

SEP. (2011). Planes de Estudios 2011. México D.F.: SEP.

SEP. (2011). Programa de estudios 2011. Guía para le maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. México.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2003). The Illusion of Linearity: Expanding the Evidence towards Probabilistic Reasoning. Educational Studies in Mathematics , 53 (2), 113-138.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L. (2009). Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions. Journal for Research in Mathematics Education , 40 (2), 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2005). Not Everything Is Proportional: Effects of Age and Problem Type on Propensities for Overgeneralization. Cognition and Instruction , 23 (1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2008). The Linear Imperative: An Inventory and Conceptual Analysis of Students' Overuse of Linearity. Journal for Research in Mathematics Education , 39 (3), 311-342.

Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W., & Mukhopadhyay, S. (2009). Words and Worls: Modelling Verbal Descriptions of Situations. Rotterdan, The Netherlands: Sense Publisher.