Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

PAPIROFLEXIA Y GEOMETRÍA DINÁMICA PARA DISCUTIR COVARIACIÓN EN COORDENADAS POLARES

Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero; mferrari@uagro.mx

José Antonio Bonilla Solano
Universidad Autónoma de Guerrero, jbonillasolano@gmail.com

Manuel Trejo Martínez
Universidad Autónoma de Guerrero, mtrejo14@gmail.com

Resumen

Proponemos trabajar con actividades de aprendizaje diseñadas utilizando doblado de papel y geometría dinámica, en particular GeoGebra, como generadores del ámbito discursivo. La construcción geométrica de una curva será el disparador de una red de modelos que conllevará reflexionar sobre covariación en coordenadas polares. Percibir y estudiar la covariación, es decir, la simultaneidad de dos variaciones diferentes que se afectan mutuamente nos permitirá fortalecer nuestro acercamiento al concepto de función en el sistema de coordenadas polares. En Socioepistemología basamos los diseños de aprendizaje y utilizamos el experimento de enseñanza como metodología para la gestión del laboratorio dirigido a estudiantes y profesores de nivel superior.

Palabras clave: coordenadas polares – covariación – curvas – geometría dinámica

1. INTRODUCCIÓN

Desde los inicios de la matemática educativa investigadores se interesan por evidenciar cómo construir, con estudiantes de diferentes niveles educativos, el concepto de "función", aquel saber matemático troncal en cursos que involucran la variación y el cambio. Varios son los que reflexionan desde la idea de "covariación", término que se utiliza desde finales de los noventas y principios de este siglo al considerarlo como un prerrequisito para la apropiación de función. Basta mencionar el trabajo de Confrey & Smith (1995), uno de los pocos que reflexiona, en aquella época, sobre funciones particulares como la función exponencial, considerando que: "*the construction of a counting and a splitting world and their juxtaposition through covariation provide the basis for the construction of an exponential function*" (p.80). O la investigación de Saldhana y Thompson (1998) donde reportan que no es trivial la comprensión de gráficas que representan un continuo covariando de estados de cantidades.

Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, (2002), por su parte, proponen una mirada piagetiana para evidenciar lo complejo de desarrollar el razonamiento covariacional con el fin de construir una visión más integral de las funciones a través de eventos dinámicos. Ideas que son retomadas años después por Oehrtman, Carlson y Thompson (2008); Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin (2013); Moore, Paoletti y Musgrave (2013); Johnson (2015); Hitt y González (2015); Ferrari, Martinez, Méndez, (2016), entre otros. Efectivamente, Carlson *et al.* (2002) y Johnson (2012, 2015) usan el llenado de recipientes para estudiar la variación y el cambio en eventos dinámicos. Por su parte, Moore *et al.* (2013) analizan la representación gráfica de funciones en los sistemas de coordenadas cartesianas y polares. Weber y Thompson (2014) abordan funciones de dos variables y sus representaciones gráficas mientas que Nagle *et al.* (2013) analizan la conceptualización de la pendiente. En varios de los reportes mencionados coinciden en la necesidad de propiciar un acceso intuitivo al concepto de función desde la noción de covariación, privilegiando las representaciones gráficas antes de presentar expresiones algebraicas. En nuestra investigación, consideramos necesario propiciar la emergencia de una red de modelos donde las actividades de construir geométricamente puntos, tabular, graficar y ajustar, en tanto se percibe la covariación inmersa, generan un ambiente discursivo idóneo para la construcción de conocimiento matemático.

2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Como investigadores, consideramos necesario realizar estudios sistémicos. Es decir, empaparnos y analizar las prácticas escolares inherentes a la transmisión del saber, ser conocedores de prácticas de referencia que reflejan el desarrollo de ese saber, percibir las prácticas sociales que hablan de interacciones y herramientas, así como estudiar las prácticas discursivas que evidencian la significación y consensos adoptados. Hablamos entonces de comunidades que entrelazan sus producciones, donde el tiempo y el lugar, los sujetos y sus interrelaciones, los argumentos y herramientas, los avances y retrocesos, van construyendo conocimiento.

Adoptamos entonces la Socioepistemología como sustento teórico de los diseños de aprendizaje que proponemos para este laboratorio, en búsqueda de propiciar la confluencia y relación dialéctica de aspectos que consideramos fundamentales al abordar un fenómeno didáctico. Contemplar y analizar el devenir de una noción a un objeto de saber; caracterizar las concepciones de los alumnos; dar cuenta de cómo vive una noción en las aulas y el discurso matemático escolar que se genera, ser conscientes que la matemática es un bien cultural inmerso en una sociedad y tiempo determinados que condiciona su comunicación y apropiación (Cantoral, 2013) conlleva

Investigación e Innovación en Matemática Educativa
ISSN: 2594-1046

profundizar en la reorganización de la obra matemática, en la reconstrucción de significados y en la matemática como actividad humana (Cordero, Cen & Suárez, 2010).

En este sentido la revisión socioepistemológica reportada en Ferrari (2008) alrededor de covariación logarítmica sustenta el diseño del experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000) que proponemos analizar en este laboratorio. Encontramos en ella una cuidadosa mirada de argumentos matemáticos que han caído al olvido por la matemática escolar imperante. El importante papel que las construcciones geométricas jugaban en siglos anteriores, en aquellos donde se insinuaba un estudio robusto de la variación y el cambio, donde emergen herramientas matemáticas que permiten describir fenómenos, y donde la covariación como elemento unificador de modelos antecede a la idea de función (Ferrari y Farfán, 2010).

Es Euler quien distingue, en el siglo XVIII, entre funciones algebraicas y trascendentes en su obra *Introductio in analysin infinitorum*:

> "Functiones dividuntur in Algebraicas & Trascendentes; illæ"sunt, quæcomponuntur per operationes algebraicas solas, hævero in quibus operationes trascendentes insunt". [Las funciones se dividen en algebraicas y trascendentes; las primeras están formadas únicamente a través de operaciones algebraicas y las segundas suponen, en su formación, operaciones trascendentes. (Tomado de Martínez, 2008, p. 77)]

Martínez (2008) advierte que "lo que está en el fondo de esta definición es el hecho de que las funciones algebraicas son aquellas que se obtienen a través de un número finito de operaciones elementales y las segundas mediante un número infinito de operaciones elementales" (p.78). Argumento que emerge del desarrollo en serie de potencias de funciones como la exponencial, la logarítmica y las trigonométricas, manteniéndose en el discurso matemático de la época y fortaleciéndose a la par del análisis matemático.

Debeaune, discípulo de Descartes, desafía a los estudiosos de principios del siglo XVII a "Encontrar una curva tal que, para cada punto P, la distancia entre V y T, puntos donde la vertical y la línea tangente cortan al eje, sean siempre iguales" (Figura 1).

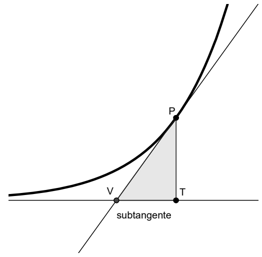


Figura 1: Interpretación gráfica del desafío de Debeaune

Según Hairer y Wanner (1996) es Leibnitz, en 1684, quien propone años después una respuesta al problema planteado, resolución que Agnesi (1748) utiliza en su libro *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana. Libro Secondo del Calcolo Differenziale* al discutir la continuidad de una función dando un giro didáctico al acercamiento epocal del Cálculo. Sin embargo, según Dennis y Confrey (1997) se puede proponer otra respuesta desde el trabajo de Descartes.

Dennis y Confrey (1997) involucran el uso de geometría dinámica en la construcción de una curva, siendo el círculo unitario y ciertas rectas tangentes y secantes elementos importantes, sustentando la evolución de los puntos en la semejanza de triángulos.

3. SOBRE LOS APORTES DE AGNESI Y DESCARTES DESDE EL TRABAJO DE AGNESI

Agnesi (1748) propone modelar un fenómeno particular descrito no por la observación de un cuerpo cayendo, práctica frecuente en la comunidad de los físicos, sino por un desafío geométrico, típica actividad de la comunidad de matemáticos. Es aquí donde la semejanza de triángulos, que se percibe, conforma la herramienta principal del modelo geométrico.

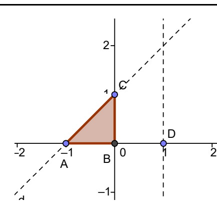
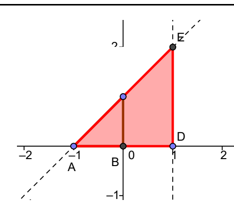
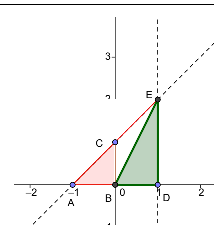
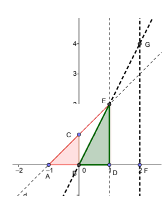
Elementos de la construcción		Construcción geométrica	
Triángulos	Puntos		
ABC semejante a ADE	C = (0,1) E = (1,2)		
ODE semejante a OFG	E = (1,2) G = (2,4)		

Tabla 1: Interpretación de la construcción propuesta por Agnesi

Descubrir otras regularidades, que cobran vida al reconocer progresiones en la construcción de los catetos de los triángulos rectángulos, nos permite predecir el siguiente segmento sin construirlo, sino calculándolo. Nuevamente la práctica de multiplicar sumando nos regresa a lo numérico, a lo cuantificable, en tanto que la forma de la curva nos desafía a unir los puntos

ISSN: 2594-1046

construidos geométricamente o calculados numéricamente, y nos cuestiona sobre su crecimiento o decrecimiento, que Agnesi soluciona desde lo infinitesimal (Figura 3).

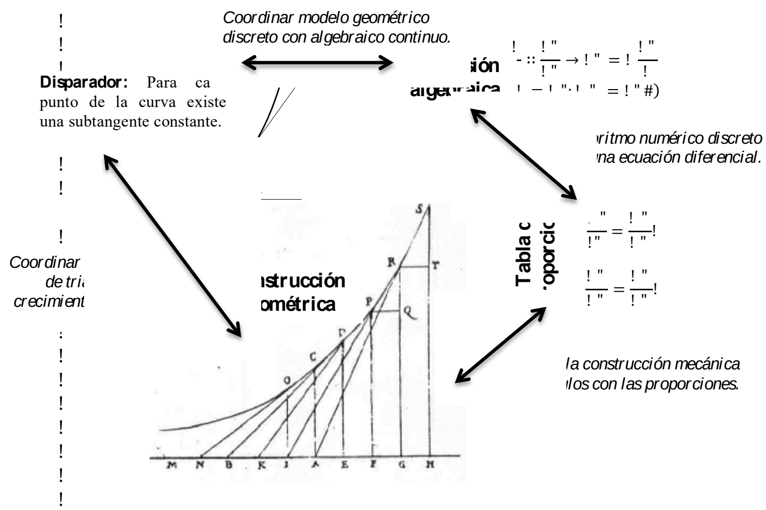


Figura 2: Esquema de elementos presentes en la obra de Agnesi (1748)

4. DESDE EL TRABAJO DE DESCARTES

Dennis y Confrey (1997) basándose en el trabajo de Descartes proponen la construcción de una curva, el círculo unitario y ciertas rectas tangentes y secantes elementos importantes, sustentando la evolución de los puntos en la semejanza de triángulos.

La construcción geométrica se inicia con un círculo unitario con el que se determina el primer punto de la curva, (1, 0), al intersecar el eje de las abscisas. Un punto colocado sobre la circunferencia determina la construcción de los puntos de la curva, ya que la semirrecta que lo une al origen del sistema de coordenadas determina la base de la covariación logarítmica a través del coseno del ángulo establecido. Las ordenadas de los puntos se establecen con una partición constante, en el ejemplo, $y_n - y_{n-1} = {}^{1}/_{4}$, en tanto que las abscisas se van construyendo con el uso de semejanza de triángulos y las circunferencias que de ellos surgen (Tabla 2).

Observamos entonces, en ambas construcciones, que se afanan en describir formalmente fenómenos que se imbrican en una *covariación logarítmica*, desde una construcción geométrica. Es decir, aquella coexistencia entre una variación regida por diferencias constantes y otra por razones constantes; una donde se puede reconocer una progresión aritmética y en la otra una progresión geométrica, es decir, una, respondiendo a un crecimiento lineal y la otra a un crecimiento

ISSN: 2594-1046

exponencial. Lo complejo no radica en cada una de estas variaciones, sino justamente en su coexistencia, su codependencia, su coconstrucción, dando vida a una función logarítmica o a una función exponencial dependiendo de qué variación juega como independiente y cual como dependiente. En su empresa, utilizan ciertas herramientas matemáticas conocidas, crean otras, articulan los modelos logrados, actividades que constituyen el basamento de nuestros diseños de aprendizaje.

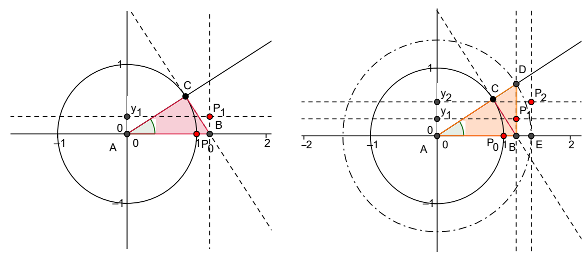
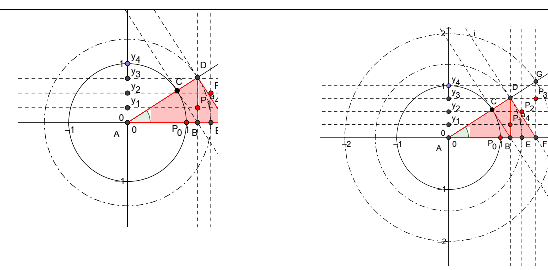
Elementos de la construcción		Consrtucción geométrica
Triángulos	Puntos	
ABC semejante a ABD B es intersección de la tangente al círculo unitario y el eje *x*. D es la intersección de la vertical por B y la recta AC.	$P_0 = (0,1)$ $P_1 = \left(\sqrt[4]{2}, \frac{1}{4}\right)$ $P_2 = \left(\sqrt[2]{2}, \frac{1}{2}\right)$	
ADB semejante a ADE E es intersección de circunferencia que pasa por D con eje *x*. F es la intersección de tangente a esta circunferencia que pasa por D y el eje *x*.	$P_3 = \left(\sqrt[4]{8}, \frac{3}{4}\right)$ $P_4 = (2,1)$	

Tabla 2: Interpretación de la construcción de Descartes (Dennis y Confrey, 1997)

Ideas similares utilizaremos para la construcción de curvas especiales donde la covariación imperante emergerá de ciertas regularidades, haciendo hincapié en aquellas curvas geométricas que en el siglo XVIII las separaron de las funciones algebraicas. El desafío ahora será reflexionar de ellas en el sistema de coordenadas polares, donde x´s y y´s serán reemplazadas por ángulos y radios, es decir, por r´s y θ´s.

5. COVARIACIÓN EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Uno de los principales motivos de la introducción del sistema de coordenadas polares, de acuerdo al discurso matemático escolar (dME) es la necesidad de estudiar ciertas curvas o regiones que se simplifican con el uso de este lenguaje (Ramírez y Ferrari, 2011). Montiel, Vidakovic y

ISSN: 2594-1046

Kabael (2008) señalan que cuando los estudiantes son introducidos al sistema de coordenadas polares "reconocen" ciertas gráficas y ecuaciones claves. Sin embargo, la prioridad del sistema cartesiano por sobre el sistema polar en el dme deriva en fenómenos como el señalado en Montiel *et al*. (2008) y Montiel Vidakovic, Elstak y Wilhelmi (2009), es decir, que los estudiantes tienden a "trasladar" hacia el sistema polar nociones o procedimientos que utilizan en el sistema cartesiano al iniciarse en el manejo de los nuevos elementos en juego, la relación radio-ángulo. Efectivamente, se consideran un semi-rayo, que refiere al eje polar y que comanda la medida de ángulos considerándolos como coordenadas angulares; y, un segmento indicando el lado final del ángulo, y al cual se puede referir como coordenada radial.

El sistema coordenado polar nos invita así, a imaginar una recta girando alrededor del polo lo que daría cuenta de la característica de simetría en las curvas, y que a la vez el hecho de que cada intervalo de 2π lleva al mismo segmento. Aspectos importantes en el hecho de que el sistema de coordenadas polares resulte más adecuado que el sistema cartesiano para describir curvas que tengan simetrías o que describan ecuaciones o fenómenos en los que haya periodicidad. La simpleza de escritura tales como $r = \theta$ o $r = a\theta$ que dan cuenta de una función constante u otras curvas descritas por expresiones como $r = ae^{b\theta}$ o $r = a/\theta$ (Figura 3) son características del sistema de coordenadas polares donde θ es considerado la variable independiente y r como variable dependiente.

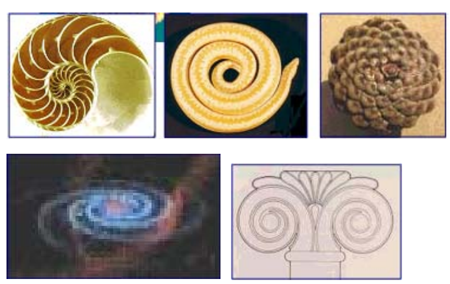


Figura 3: Imágenes extraídas de: Ortega y Ortega (2004)

6. DISEÑO DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

El laboratorio propuesto se desarrolla en tres sesiones de una hora y media. En la primera sesión se invita a los participantes a construir un caracol nautilus con papiroflexia ideas tomadas de un vídeo de Tomoku Fuse [1]. Nos interesa, en particular, propiciar la emergencia de una red de modelos en tanto manipulamos una hoja de papel y le damos una particular forma (Figura 4).

ISSN: 2594-1046

Figura 4: Construcción de un nautilus en papel

Se inicia la construcción con una hoja de color, tamaño carta, siendo el primer desafío extraer de ella el cuadrado de mayor área posible. Luego, construir un romboide isósceles y establecer la primera partición regular de su diagonal mayor, utilizando la idea de "la mitad de la mitad" repetidamente determinándose así trapecios de igual distancia entre sus bases. La diagonal mayor de estos trapecios da lugar a la forma final del plegado. Preguntas como ¿qué varía? ¿cómo varía? ¿qué se mantiene constante? ¿cómo describir el crecimiento y la forma del caracol? guían la discusión inicial de este laboratorio.

En la segunda sesión, se propone utilizar GeoGebra para describir la forma del caracol nautilus. Se parte de la pregunta: ¿Qué elementos geométricos se distinguieron en tanto se construía el caracol con el plegado de papel? ¿qué y cómo cuantificar los cambios?

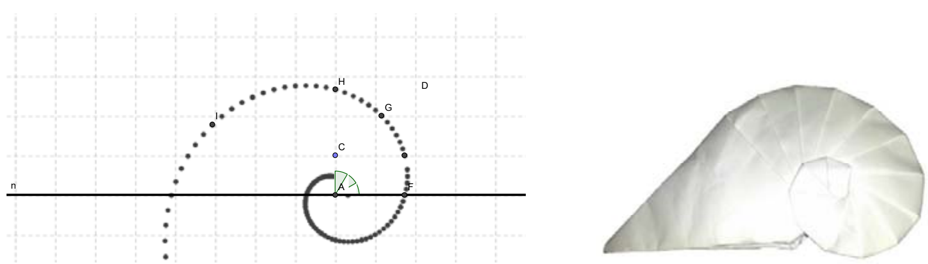


Figura 4: Esquema de un nautilus en coordenadas polares

En la tercera sesión se propicia la discusión de las conclusiones que los grupos de trabajo lograron en las sesiones anteriores; así como, sobre el diseño de aprendizaje propuesto.

7. CONSIDERACIONES FINALES

Tanto en la construcción que presenta Agnesi en su libro de Cálculo como en la que proponemos discutir para modelar el caracol nautilus, es el triángulo rectángulo inicial quien

ISSN: 2594-1046

determina la curva. En el caso de Agnesi la atención está en sus catetos y su razón, en tanto que en la construcción del nautilus es el ángulo inicial y el cateto horizontal r_0.

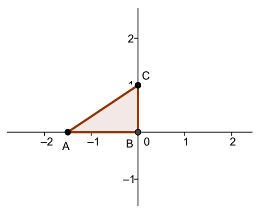
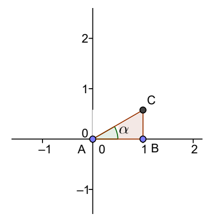
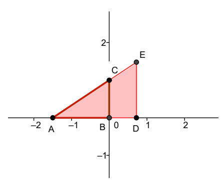
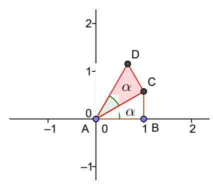
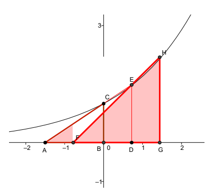
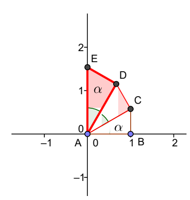
Sistema coordenado cartesiano $[(x, y)]$		Sistema coordenado polar $[(r, \theta)]$	
Triángulo inicial ABC C = (0,1) convención matemática $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ determinan la construcción			Triángulo inicial ABC B = (1,0) convención matemática $\overline{AB}$ y α determinan la construcción
ABC semejante a ADE $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$ C y E son puntos de la curva			ABC semejante a ACD $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$ B, C, D son puntos de la curva
El corrimiento de triángulos semejantes se hace con $\overline{AD} - \overline{AB}$ constante			El corrimiento de triángulos semejantes se hace con α constante
$y = ka^{bx}$		$r = r_0 e^{b\theta}$	

Tabla 3: Entre sistema coordenado cartesiano y polar

La construcción geométrica de estas curvas propicia reflexionar sobre el papel que juegan los triángulos rectángulos y su semejanza, ya sea en el sistema coordenado cartesiano o en el polar. Cuestionarnos sobre cómo varían las variables, cuáles son ellas, dónde radica la regularidad en sus crecimientos, cuál es la gráfica que ajusta los puntos construidos son los disparadores del laboratorio que proponemos desarrollar. Nos interesa que los participantes generen una red de modelos donde la argumentación colectiva sea el motor de la construcción de saberes.

ISSN: 2594-1046

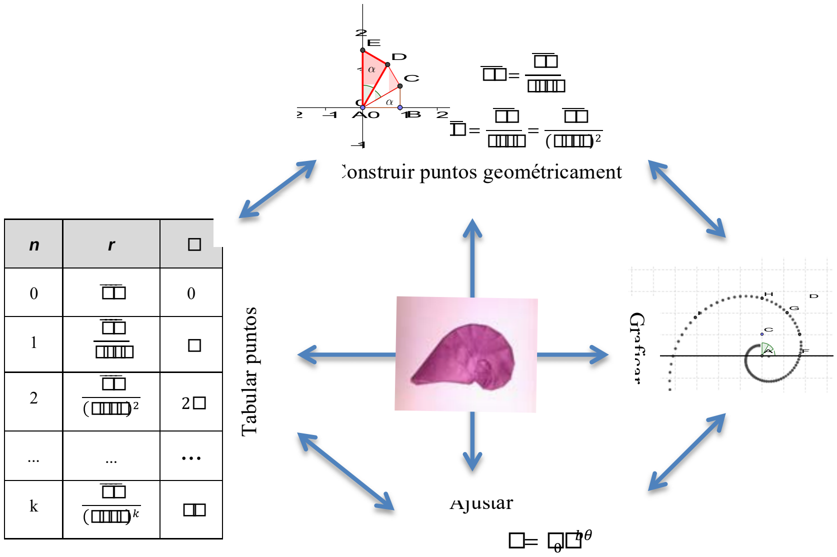


Figura 5: Red de modelos del caracol nautilus

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana.* Libro Secondo del Calcolo Differenziale. Milano, Italia: Nella Regia Ducal Corte.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352–378.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66–86.

Codero, F., Cen, C. & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 13*(2), 187-214.

Dennis, E. & Confrey, J. (1997). Drawing Logarithmic Curves with Geometer's Sketchpad: A Method Inspired by Historical Sources. En J. King & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Washington D.C., USA: Mathematical Association of America.

Ferrari, M, Martínez-Sierra, G. & Méndez, M. (2016). "Multiply by Adding": Development of the Logarithmic-Exponential Covariational Reasoning in High School Students. *Journal of Mathematical Behavior 42*, 92-108

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), 53-68.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva*. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Hairer, E. & Wanner, G. (1996). *Analysis by Its History.* New York, USA: Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process : The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics 88*(2), 201–219.

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 313–330. doi:10.1016/j.jmathb.2012.01.001.

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics 89*(1), 89-110. doi:10.1007/s10649-014-9590-y.

Martínez, C. (2008). El concepto de función en la obra de Euler: un recorrido a través de la constitución del Análisis Matemático Moderno. *Revista Miscelánea Matemática 46*, 73-91.

Montiel, M., Vidakovic, D., & Kabael, T. (2008). Relationship between studens' understanding of functions in cartesian and polar coordinate systems, *Investigations in Mathematics Learning*, 1(2), 52-70

Montiel, M., Vidakovic, D., Elstak, I., & Wilhelmi, M. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*. Vol.72, pp.139-160.

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 461–473. doi:10.1016/j.jmathb.2013.05.002.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus Students' and Instructors' Conceptualizations of Slope: a Comparison Across Academic Levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*, 1491–1515. doi:10.1007/s10763-013-9411-2.

Oehrtman, M., Carlson, M. P. & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understanding of functions. En M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 150-166). USA: Series: MAA.

Ortega, I. & Ortega, T. (2004): Evolventes y espirales. *Épsilon 57*, 477-492.

Saldanha, L. & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking convariation from a quantitative perspectivie: Simultaneous Continuous Variation. En W. N. Berensah y S. B. Coulombe (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America*. Raleigh, N.C: North Carolina State University.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. E. Kelly (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267–307). Hillside, NJ: Erlbaum.

ISSN: 2594-1046

Ramírez, T. & Ferrari, M. (2011). Las coordenadas polares: Algunos de sus usos en disciplinas de investigación específicas. En L. Sosa, R. Rodríguez, y E. Landa (Eds.) *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp.111-117). Zacatecas. Diciembre 2011.

Tomoko Fuse: *Origami Instructions: Navel Shell, spiral origami art desing* Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=-n1K_gKP_7Q

Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics 87*(1), 67–85