Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

RAZONAMIENTO COMBINATORIO EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO DE UNA COMUNIDAD CON ALTA MARGINACIÓN

Viridiana Galicia Hernández
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. viri1785@hotmail.com
María Araceli Juárez Ramírez
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. jilecara@hotmail.com
Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.lidiahr06@hotmail.com

Resumen

En este trabajo se presentarán los resultados de dos cuestionarios: el Test of Logical Thinking (TOLT) (Tolbin y Capie, 1984) y el Cuestionario para la Evaluación del Razonamiento Combinatorio (Navarro-Pelayo, 1996), los cuales se aplicaron a estudiantes de un Bachillerato General de la localidad de Tecpantzacoalco, Puebla. Se presenta también el análisis de las respuestas dadas a estos cuestionarios con la finalidad de diseñar, posteriormente, una secuencia de actividades que contribuya a superar las deficiencias de los estudiantes en el tema de combinatoria. Una de las dificultades que se esperaban detectar con estos cuestionarios es la capacidad de diferenciar entre combinación y permutación, así como la falta de habilidades para la resolución de problemas de este tema, como lo han reportado varios investigadores. Los resultados de este trabajo coinciden con los de la literatura revisada, pero se presentan más graves debidos, quizá, a la marginación y el rezago de la escuela en la que se aplicó este diagnóstico.

Palabras clave: razonamiento combinatorio, permutaciones.

1. INTRODUCCIÓN

En la práctica docente se ha observado que los alumnos tienen dificultades con los conceptos de combinatoria. En particular los estudiantes confunden permutaciones con combinaciones, es decir, si se parten de problemas con enunciado, comúnmente no saben distinguir si es importante el orden o no al momento de calcular todas las opciones que pide el problema. Como lo mencionan Roa, Batanero-Bernabe & Díaz-Godino (2000) los estudiantes con preparación matemática avanzada también presentan dificultades para resolver problemas combinatorios.

Por ello, se considera importante evaluar el nivel de razonamiento combinatorio inicial y final a un grupo de alumnos de bachillerato mediante el Cuestionario para La Evaluación del Razonamiento Combinatorio (Navarro-Pelayo, Batanero y Godino, 1996), así como el Test of Logical Thinking (TOLT) (Tobin y Capie, 1984). ¿Qué puede aportar el Test of Logical Thinking (TOLT)? Es un instrumento de diagnóstico útil y sencillo para obtener información sobre la situación de partida de los estudiantes, lo que hace que el profesor se sensibilice para poder conocer el tipo de conocimiento de sus alumnos. Este instrumento permite valorar las capacidades de los estudiantes en el uso de esquemas formales que resulten básicos para el aprendizaje de las ciencias experimentales y las matemáticas.

La finalidad de este diagnóstico es el diseño de actividades, diferentes a lo tradicional, que desarrollen el razonamiento combinatorio y no se centren en los cálculos algorítmicos. Además, para el desarrollo de las actividades se planea utilizar el aprendizaje autorregulado, de acuerdo a los planteamientos de Birembaun (2002). Uno de los aspectos que se pretende alcanzar con este trabajo es que los alumnos sean capaces de diferenciar entre combinación y permutación y resolver problemas de ambos temas.

2. MARCO TEÓRICO

La combinatoria no es simplemente una herramienta de cálculo para la probabilidad. Según Piaget & Inhelder (1941) si el sujeto no posee capacidad combinatoria, no es capaz de usar la idea de probabilidad salvo en casos de experimentos aleatorios muy elementales. Más aún, estos autores relacionan la aparición del concepto de azar con la idea de permutación y la estimación correcta de probabilidades con el desarrollo del concepto de combinación. Si analizamos el uso del diagrama del árbol en probabilidad y combinatoria, podemos también observar que hay una relación entre el espacio muestral de un experimento compuesto y las operaciones combinatorias. El inventario de todos los posibles sucesos en dicho espacio muestral requiere un proceso de construcción combinatorio, a partir de los sucesos elementales en los experimentos simples.

Además de su importancia en el desarrollo de la idea de probabilidad, la capacidad combinatoria es un componente fundamental del pensamiento formal. De acuerdo con Piaget & Inhelder (1941) el razonamiento hipotético-deductivo opera con las posibilidades que el sujeto descubre y evalúa, por medio de operaciones combinatorias. Esta capacidad puede relacionarse con los estadios descritos en la teoría de Piaget: después del período de las operaciones formales, el adolescente descubre procedimientos sistemáticos de construcción combinatoria, aunque para las permutaciones es necesario esperar hasta la edad de 15 años. Para estos autores, la combinación supone la coordinación de la seriación y la correspondencia, la permutación implica una reordenación respecto a un sistema de referencia móvil y reversible; por tanto, las operaciones combinatorias son operaciones sobre operaciones, características del nivel del pensamiento formal.

ISSN: 2594-1046

3. MÉTODO

El trabajo se realizó con estudiantes del Bachillerato General Estatal Joaquín Paredes Colín, ubicado en la localidad de Tecpantzacoalco, perteneciente al municipio de Ajalpan, Puebla. Dicho municipio es considerado de alta marginación y tiene un rezago educativo de 84.3% de su población. Específicamente, se aplicó a siete participantes que cursaban el sexto semestre de bachillerato en noviembre de 2015 con edades que oscilan entre diecisiete y dieciocho años.

Tipo de estudio: Cualitativo.

3.1. Instrumentos y materiales

TOLT es un cuestionario de diez tareas, dos por cada uno de los siguientes esquemas de razonamiento: proporcionalidad (PP), control de variable (CV), Probabilidad (PB), correlación (CR) y operaciones combinatorias (CB). Las ocho primeras constituyen cuestiones de dos niveles, respuesta y explicación diseñadas con un formato de opción múltiple tanto en lo que se refiere a las respuestas como una correspondiente justificación. Ello minimiza las posibilidades de acierto por azar, a la vez que facilita su correlación y posterior tratamiento estadístico. Tanto las respuestas como las explicaciones sugeridas como posibles alternativas, corresponde a algunos de los errores sistemáticas más frecuentes en los que se suele incurrirse en la resolución de este tipo de problemas. Por el contrario, las dos últimas preguntas, referentes a combinaciones y permutaciones, son de respuesta abierta semiestructurada. Con este cuestionario se pretende clasificar a los estudiantes como pensadores concretos o formales, de acuerdo a la teoría de Piaget.

La valoración se ha llevado a cabo considerando cada pregunta como correcta sólo si se respondía según la opción adecuada a la respuesta y a la explicación simultánea. De esta forma, la máxima puntuación posible que se puede alcanzar es diez. Se aplica la prueba en un periodo de tiempo determinado.

El Cuestionario para la Evaluación del Razonamiento Combinatorio consta de once problemas combinatorios simples y dos compuestos. Los problemas combinatorios simples (problemas 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 y 13) fueron tomados del cuestionario de Navarro-Pelayo, Batanero, & Godino (1996). Debido a que este cuestionario está dirigido a alumnos universitarios, para esta investigación se seleccionaron cinco problemas que se consideraron apropiados para el nivel Bachillerato. Los alumnos tuvieron un periodo de tiempo de una hora como máximo para la solución del cuestionario.

ISSN: 2594-1046

4. RESULTADOS

4.1. Resultados del primer instrumento

En cuanto a los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes: 44.4% contestaron de manera correcta las preguntas de proporcionalidad, mientras que las preguntas de control de variable la contestaron de manera correcta 44.4%, el 11.1% contestó correctamente las preguntas de probabilidad, las preguntas de correlación fueron contestadas de manera correcta por 22.2% y por último las preguntas de combinatoria no fueron contestadas por ningún alumno de forma correcta.

Con estos resultados podemos observar que la mayoría de los estudiantes tienen nivel de razonamiento bajo. En la pregunta uno referente a proporcionalidad sólo 3 estudiantes tuvieron una respuesta correcta, en la pregunta dos sólo un estudiante la tuvo correctamente, esta pregunta también pertenece a la parte de proporcionalidad, en la parte referente a control de variable tenemos las preguntas tres y cuatro respectivamente, de las cuales en la pregunta tres sólo dos estudiantes respondieron de manera correcta, también para pregunta cuatro dos estudiantes contestaron correctamente; para la siguiente parte que se refiere a probabilidad tenemos las preguntas cinco y seis, de las cuales sólo un estudiante logró contestar correctamente la pregunta cinco; en la parte de correlación tenemos la pregunta siete y la pregunta ocho, donde solo la pregunta siete fuere resuelta de manera correcta por dos alumnos; y por último, tenemos la parte de combinatoria que en este trabajo es fundamental para verificar los conocimientos previos que deben tener los alumnos referente a combinatoria y los resultados fueron que ninguno de los alumnos fue capaz de realizar de forma correcta estos dos problemas.

Es por ello que es de vital importancia conocer el razonamiento de los estudiantes ya que después del periodo de las operaciones formales, el adolescente descubre procedimientos sistemáticos de construcción combinatoria.

4.2. Resultados del segundo instrumento

Pregunta 1

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocar en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, negro y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo más, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el negro.

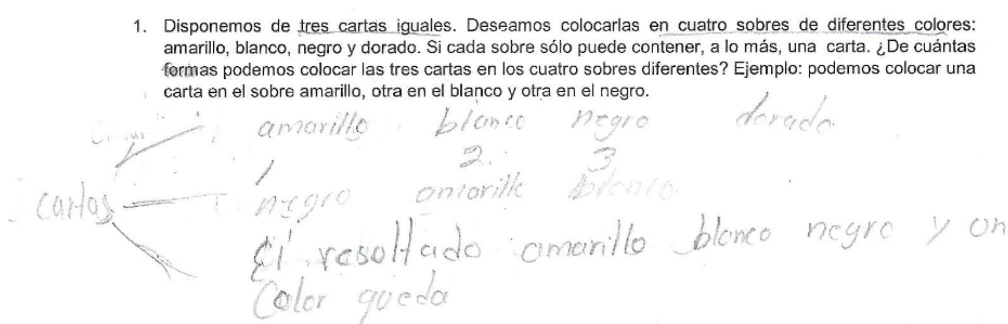
ISSN: 2594-1046

Se trata de la colocación de tres objetos no distinguibles en cuatro casillas distinguibles. Se obtienen la solución mediante la combinación C_3^4. Es un problema fácil de traducir a un esquema de selección, ya que colocar tres cartas en los sobres es equivalente a elegir tres de los cuatro sobres para poner dentro las cartas. Puesto que las cartas son iguales, el orden no interviene y se trata de una selección no ordenada.

Tipos de errores más comunes en esta pregunta

Confundir el tipo de objetos: Considerar objetos idénticos cuando son distinguibles o que objetos diferentes son indistinguibles. Por ejemplo, en este problema (introducir cartas en sobres) algunos alumnos creen que es posible distinguir entre las tres cartas iguales.

Interpretación errónea del diagrama en árbol: A pesar de su importancia como herramienta para producir la solución, muy pocos alumnos usaron el diagrama en árbol. Más aún, algunos de los alumnos que intentaron construir un diagrama en árbol para resolver el problema, construyeron un diagrama inadecuado, o interpretaron el diagrama producido incorrectamente.



1. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, negro y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo más, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el negro.

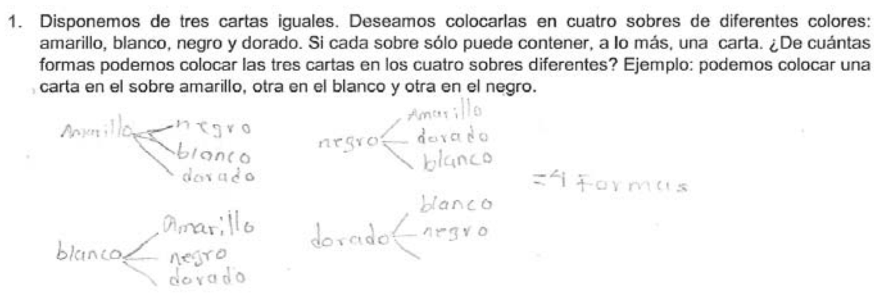
amarillo blanco negro dorado
1 2 3
cartas negro amarillo blanco
El resultado amarillo blanco negro y un
Color queda

Imagen 1. Respuesta a pregunta 1

En cuanto a los resultados de esta pregunta se detectó que 2 estudiantes (28.5%) dieron la respuesta correcta, 5 (71.42%) no contestaron correctamente el ejercicio.

Los alumnos que respondieron correctamente el problema hicieron uso del diagrama de árbol, se infiere que tienen algún conocimiento previo a lo que se refiere a las combinaciones que existen en el problema.

ISSN: 2594-1046



1. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, negro y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo más, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el negro.

Imagen 2. Respuesta a pregunta 1

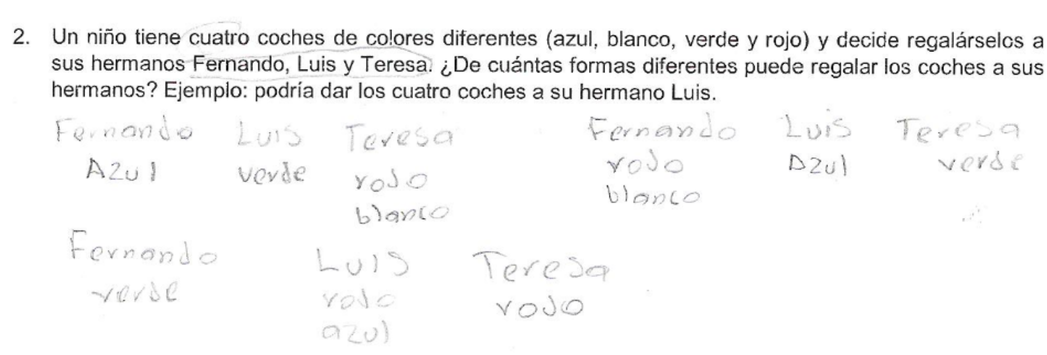
Preunta 2

Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuantas formas diferentes puede regalar los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Es un problema de partición de un conjunto de objetos diferentes (los coches) en tres subconjuntos distinguibles (los hermanos). No hay restricciones respecto al número de objetos en cada subconjunto. La solución viene dada por las variaciones con repetición $VR_{4,3}$.

Se convierte en un problema de selección si pensamos que para cada coche elegimos uno de los tres niños (al que le demos el coche). Se puede repetir el niño e influye el orden; es por lo tanto una muestra ordenada con remplazamiento.

Error en las particiones formadas. Esto puede ocurrir en los dos siguientes casos. a) La unión de todos los subconjuntos en una partición no contiene a todos los elementos del conjunto total. Por ejemplo, en este ejercicio (distribución de cuatro coches entre tres chicos).



2. Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede regalar los coches a sus hermanos? Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Imagen 3. Respuesta a pregunta 2

De acuerdo a las respuestas obtenidas en esta pregunta, se detectó que 7 (100%) dieron una respuesta incorrecta.

ISSN: 2594-1046

Fue un problema que implica un grado de dificultad alto ya que ningún alumno pudo llegar a la solución, algunos de ellos tenían la idea pero no se dieron cuenta que eran varios casos los que tenían que analizar.

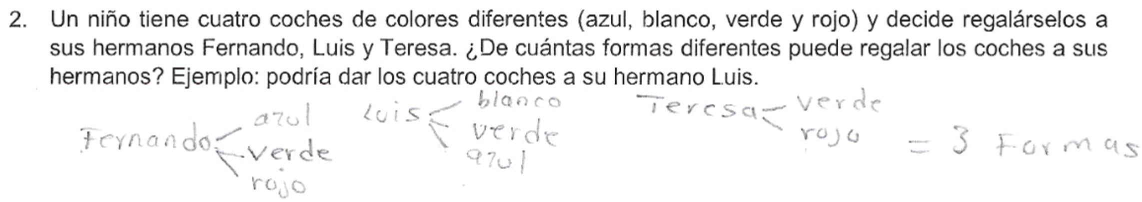


Imagen 4. Respuesta a pregunta 2

Pregunta 3

Una maestra tienen que elegir tres estudiantes para borrar el pizarrón. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, German, Jorge y María. ¿De cuantas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

Se trata de un enunciado de selección de tres personas entre las cuatro disponibles y el orden no interviene (selección no ordenada sin reemplazo). Por lo tanto, la solución del problema viene dada por las combinaciones ordinarias de cinco elementos tomados de tres en tres. C_3^5

Uno de los tipos de errores que podemos encontrar en este ejercicio es el error de orden: Este tipo de error descrito por Fischbein y Gazit (1988) consiste en confundir los criterios de combinaciones y variaciones; es decir, considerar el orden de los elementos cuando es irrelevante o, al contrario, no considerar el orden cuando es esencial.

En cuanto a la respuesta a esta pregunta, 7 (100%) contestaron incorrectamente.

En este ejercicio no obtuvimos ningún resultado correcto, sólo dos estudiantes se acercaron a la respuesta pero no lograron concluirla. Podemos observar que el alumno 1 hace algunas combinaciones de manera correcta pero no logra calcular todas.

ISSN: 2594-1046

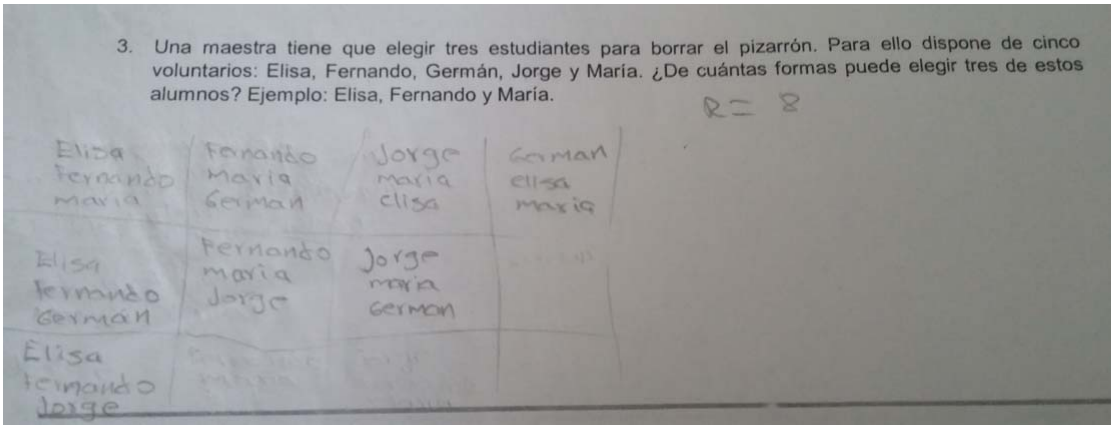


Imagen 5. Respuesta a pregunta 3

Pregunta 4

María y Carmen tienen cuatro muñecos numerados del 1 a 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos muñecos para cada una). ¿De cuántas formas se pueden repartir los muñecos? Ejemplo: María puede quedarse con los muñecos 1 y 2, y Carmen con los muñecos 3 y 4.

El esquema combinatorio del enunciado es el de partición. Se trata de formar dos subconjuntos distinguibles de dos elementos a partir de un conjunto de cuatro elementos distinguibles. Puesto que una vez formados los subconjuntos, el orden de los elementos no es importante, la solución viene dada por la C_2^4. Se puede también interpretar como la selección, por parte de una de las niñas de dos muñecas disponible (selección no ordenada sin reemplazo).

Respecto a las respuestas de esta pregunta, los alumnos que contestaron correctamente fueron 5 (71.42%), 2 (28.57%) contestaron incorrectamente.

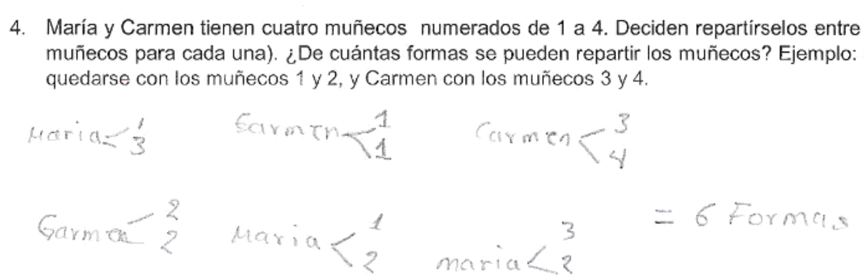


Imagen 6. Respuesta a pregunta 4

La mayoría de los alumnos dieron la respuesta correcta a esta pregunta, pero su justificación no es la adecuada, lo cual hace que la solución no sea correcta.

Pregunta 5

ISSN: 2594-1046

Se quiere elegir un comité formado por tres miembros, presidente, tesorero y secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos? Ejemplo: que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

Es un enunciado de selección ordenada sin reemplazamiento y la solución viene dada por las variaciones $V_{4,3}$. También puede interpretarse como un problema de colocación de objetos distinguibles en casillas distinguibles (colocar cada cargo en una de las personas disponibles). En la última pregunta 7 de los alumnos (100%) tuvieron una respuesta incorrecta.

En esta pregunta ninguno de los alumnos tuvo una respuesta correcta, se puede observar que tienen una idea de las posibles combinaciones que existen pero no llegan a concluir de manera concreta todas las combinaciones posibles.

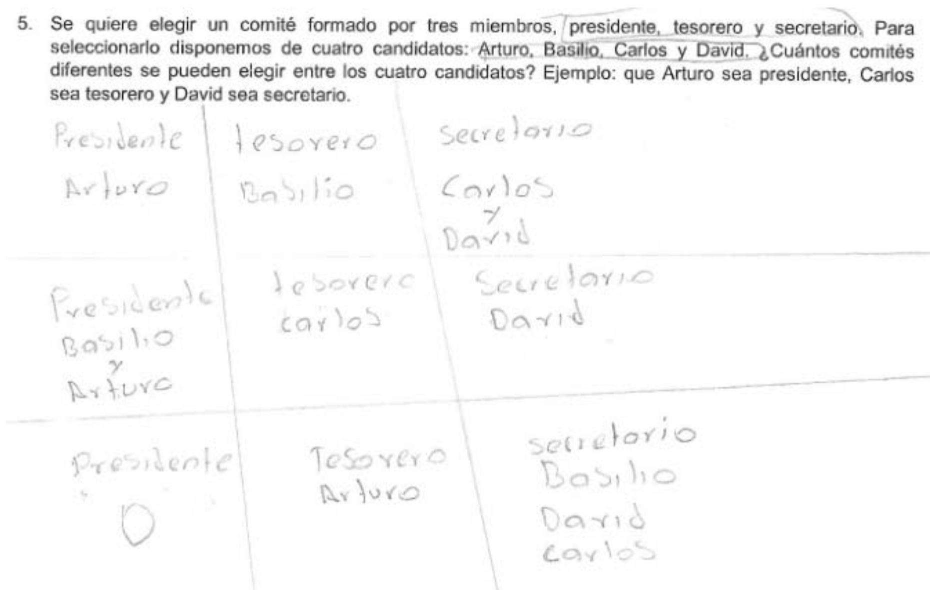


Imagen 7. Respuesta a pregunta 5

5. CONCLUSIONES

Se pudo observar los progresos obtenidos durante la formación académica de los estudiantes alcanzados en los cinco esquemas de razonamiento involucrado. Esto es importante para que el docente pueda conocer las debilidades y fortalezas que poseen sus alumnos, y de esta manera pueda proponer las actividades partiendo de lo básico a lo formal y ayudar a que el alumno pueda reconocer entre una permutación y una combinación.

ISSN: 2594-1046

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Birembaum, M. (2002). Assesing self-directed active learning in primary schools. *Assessment in Education:, 9*(1), 119-138.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., Godino, & J.D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matematica*, 26-39.

Piaget, J., Inhelder, B. (1941). *Le développement des quantités chez l'enfant. Conservation et atomisme*. Neuchâtel et Paris: Delachaux & Niestlé.

Roa, R., Batanero-Bernabe, C., & Díaz-Godino, J. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matematica avanzada*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Tobin, K., & Capie, W. (1984). The Test of Logical Thinking. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *7*(1), 5-9.