

ESTRATEGIAS VARIACIONALES EN EL ESTUDIO DE LAS DINÁMICAS CAÓTICAS

Jesús Enrique Hernández Zavaleta
Cinvestav del IPN. jesus.hernandez@cinvestav.mx

Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav del IPN. rcantor@cinvestav.mx

Resumen

Este escrito es parte de una investigación en curso que pretende dar cuenta del carácter estable del cambio ligado a sistemas con dinámicas erráticas o caóticas, en donde las interacciones de científicos ante la predicción darán indicios de una forma de construir conocimiento matemático. El problema de los tres cuerpos tratado estudiado por Poincaré, las formas de predicción climática de Lorenz y el crecimiento poblacional de May son ejemplos en donde se encuentran presentes este tipo de dinámicas. Las singularidades en las actuaciones de estos investigadores ante este tipo de sistemas serán caracterizadas por estrategias variacionales globales.

Palabras clave: estrategias-variacionales, predicción, dinámicas-caóticas, socioepistemología.

1. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

En diversas investigaciones de la Socioepistemología se ha encontrado que la enseñanza y el aprendizaje de *situaciones* variacionales (Cabrera, 2009), en el cálculo, plantean una problemática no trivial, así que enfocarse en los actos de entendimiento ante situaciones que precisan del pensamiento y lenguaje variacional se ha tornado fundamental para el desarrollo teórico (Cantoral & Ferrari, 2004; Chimal, 2005; Montiel, 2005; Caballero, 2012; Farfán, 2012; Cantoral, 2013a; Cordero & Morales, 2014). Esta investigación se enfocará en la búsqueda de regularidades en las acciones que emanan de situaciones variacionales particularmente no lineales, en otras palabras, se dispone identificar el carácter estable del cambio en situaciones de variación no lineales.

Sostenemos la existencia de principios que guían el desarrollo del pensamiento variacional y las interacciones que lo transforman. Desde un punto de vista complejo las interacciones de estos principios, propios de la construcción social del conocimiento, generan estructuras cada vez más intrincadas de saberes matemáticos. El caso que nos ocupa es la búsqueda y caracterización de uno de esos principios, el principio estrella (P^*), que asumimos se encuentra presente en la articulación entre la predicción y las adaptaciones de los individuos que hacen posible algún tipo de predicción

en sistemas con dinámicas no lineales caracterizadas como caóticas, comúnmente, vinculadas a otras disciplinas. Así, la pregunta que guía esta investigación es:

¿Cuáles son los argumentos, códigos y estrategias variacionales que se encuentran presentes al intervenir sistemas no lineales caracterizados como caóticos?

2. RUMBO A LA CONFIGURACIÓN DE UN NUEVO CURRÍCULO

Tratando de configurar la constitución de un nuevo currículo que oriente el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, el enfoque socioepistemológico propone su organización mediante prácticas, éstas aparecen a partir de las interacciones sociales y culturales de una forma desorganizada, así que es crucial el desarrollo de investigaciones que construyan propuestas adecuadas para su inserción en el ámbito escolar.

Cantoral (2013b) propone un diagrama de anidación de prácticas en el que se muestran diferentes niveles de organización promotores de la emergencia de la Práctica Social. En el primer nivel se encuentra una red de acciones cuyas aristas se conforman de interacciones, a través de estas emergen actividades que posteriormente conformaran las prácticas, es en este nivel donde el proceso de institucionalización cobra sentido como parte de la dinámica social y cultural, en la que la iteración intencional construye el camino hacia las experiencias compartidas logrando la constitución de Prácticas de Referencia (PR). Finalmente, debido a las características intrínsecas de cada PR y sus interacciones emerge la Práctica Social (PS), no se debe obviar la interacción biunívoca entre cada nivel de anidación, es decir, la PS norma a las PR, éstas a su vez a las prácticas y así sucesivamente.

La organización de las prácticas se propone a partir de principios propios de la construcción social del conocimiento matemático que mediante sus interacciones generan estructuras de saberes cada vez más complejas reflejadas en el diagrama de anidación de prácticas. Por su parte, la investigación socioepistemológica ha documentado con profundidad las acciones detrás de la práctica de predicción mostrando una diversidad de actividades en el día a día; por ejemplo, cruzar la calle o llevar una sombrilla en caso de lluvia, es decir, se encuentra presente y se institucionaliza de muchas formas. La imposibilidad humana de manipular el tiempo propone a la predicción como una estrategia emergente para la adaptación a su entorno y debemos considerar que proviene de la evolución en las interacciones del colectivo social (Cantoral, 2001).

Las actividades y las prácticas de las personas son llevadas a cabo en un mundo en esencia no lineal y aunque las estrategias que se utilizan para lidiar con él son de índole diversificada, en todas se encuentran procesos intrínsecos de constantificación que actúan sobre las variables del entorno. Estos muchas veces quedan, a suficiencia de los sentidos, en el cálculo instantáneo de dos órdenes de variación, es decir, considerando la posición, la velocidad y la aceleración. Sin embargo, la predicción en dinámicas no lineales requiere de estrategias globales sobre las variables, que permitan obtener más información sobre el entorno, así las prácticas y las formas de vislumbrar los fenómenos requieren del uso de nuevas direcciones para pensar y tratar las variables.

3. DEL DETERMINISMO AL CAOS DETERMINISTA

Los eventos determinísticos como la salida y puesta del sol, los experimentos de causa efecto (si lo empujas, se mueve en la misma proporción); por ejemplo, al lanzar un objeto desde la azotea de un edificio sabemos que caerá hasta tocar el suelo, etcétera, han sido ideales para realizar predicciones apegadas a la mecánica newtoniana, en caso opuesto se presentan los procesos aleatorios para los cuales dada por la probabilidad de suceso sabremos lo que sucederá, con cierto porcentaje, en tiempos posteriores.

Ford (1986) menciona que las nociones de determinismo, existencia y unicidad y soluciones analíticas exactas han dominado el pensamiento científico por décadas y que el significado de una solución exacta en símbolos es $S(t) = F(S_0, t)$, donde S es el estado exacto del sistema al tiempo t que evoluciona desde una condición inicial S_0 de acuerdo con la regla F implícitamente determinada por la existencia y unicidad. En otras palabras, el determinismo significa que el pasado y el futuro provienen del estado presente y eso es la esencia de la existencia y unicidad. Para Pierre Simon de Laplace este pensamiento era llevado al extremo al proponer una inteligencia que pudiera conocer todas las fuerzas de la naturaleza en un cierto momento y todas las posiciones de su composición podría poner en una fórmula el movimiento de todo el universo.

Básicamente, desde el determinismo se proponen dos tipos de sistemas dinámicos: las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales, las primeras en ámbito discreto y las segundas en el continuo. Estas ecuaciones funcionan para la predicción de estados futuros mediante la información obtenida en el presente. Es decir, dada una ecuación diferencial y cualquier condición inicial, podemos decir localmente cómo se comportan las soluciones y decirlo para cualquier condición inicial dada, no importando que el sistema sea un sistema de características no

lineales; por ejemplo, mediante técnicas y análisis cualitativos y cuantitativos, en el sistema del péndulo simple se pueden obtener condiciones para las cuales hay periodicidad o trayectorias cerradas, oscilantes, puntos de equilibrio estables e inestables, es decir, podemos describir toda su dinámica.

Es importante mencionar que las variaciones entre las soluciones de ecuaciones diferenciales existen, pero no muestran gran diferencia entre una solución y otra, es decir, soluciones que pertenecen a Condiciones Iniciales (CI) cercanas, permanecerán cercanas para todo tiempo. En años recientes se ha retomado la Teoría de la Estabilidad propuesta por Lyapunov (1892) para caracterizar las dinámicas caóticas, de acuerdo a la distancia entre soluciones con CI muy parecidas, su distancia crece al poco tiempo de haber comenzado la dinámica, de acuerdo al exponente característico del sistema (Parks, 1992). En este sentido las acciones de búsqueda y selección de CI y de variación de parámetros son esenciales para la predicción en sistemas que presentan dinámicas de comportamiento errático o caóticas.

4. LA PREDICCIÓN EN SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES

Los sistemas dinámicos no lineales han dado paso a un cambio de paradigma en el análisis de sistemas deterministas. Su foco no se centra en la búsqueda de soluciones precisas de las ecuaciones que definen el sistema dinámico, así que las preguntas que surgen de su estudio tienen sentido en la búsqueda de los estados estables o periódicos a largo plazo de todo el sistema, las posibles cuencas de atracción o atractores o de la dependencia de las condiciones iniciales y haciendo que el análisis cualitativo tome un papel central. De esta forma las dinámicas no lineales han mostrado dinámicas estables, inestables, periódicas y caóticas.

Las dinámicas caóticas han sido de gran importancia para creación de nuevas formas de acercarse a la predicción, ya que, en presencia de éstas, se requiere de un conocimiento exponencial del presente para dar significado al pasado y al futuro. Dicho sea de paso, no solamente aparecen en sistemas complejos, ya que se ha encontrado en sistemas aparentemente triviales, como el mapeo logístico (May, 1976). El cambio del paradigma comienza cuando la primera ley de Newton no se cumple a cabalidad, es decir, a toda acción corresponde una reacción, pero no necesariamente de la misma magnitud, éste es el sentido de la metáfora propuesta por Lorenz (1995), “El efecto Mariposa”.

En principio, el uso de análisis locales mediante cantidades infinitamente pequeñas es necesario y de esta forma se pueden hacer análisis de variación de diversos órdenes, de funciones analíticas, mediante expansiones en series de Taylor, sin embargo, la predicción ante el caos debe estar relacionada con la búsqueda y selección de condiciones iniciales adecuadas, además de la construcción de sistemas de referencia que consideren la comparación entre todas las soluciones del sistema y su comportamiento respecto a un amplio marco en la variación de los parámetros asociados. Se propone que además de las estrategias variacionales ya estudiadas, la predicción en sistemas no lineales caóticos se requiere de estrategias como “la variación de parámetros y la selección y estudio de condiciones iniciales”, esto brinda un espectro amplio de dinámicas que permite hacer distinciones entre comportamientos deterministas, aleatorios o caóticos.

5. CONCLUSIONES

Recordemos que P^* se encuentra ligado a la búsqueda de la estabilidad del cambio y a dos momentos de constantificación, el primero se debe a la selección adecuada de las variables y el segundo a la selección del orden de variación para hacer predicciones, estos a su vez están orientados por estrategias variacionales como la comparación, seriación y estimación.

Sin embargo, la complejidad de los fenómenos que nos rodean es de orden superior así que debido a la PS Preadicere se han buscado estrategias para hacer predicciones sobre fenómenos donde intervienen gran cantidad de variables. En presencia de sistemas dinámicos no lineales, caóticos, se actúa sobre la variación de las variables seleccionadas en el primer momento, pero el orden de variación en el segundo puede ser tan grande como se desee, entonces hablaremos de un proceso de constantificación diferenciado en que se deben considerar estrategias para elegir los parámetros adecuados y seleccionar las CI.

En el transcurso de esta investigación se han generado nuevas preguntas que apuntan a responder la pregunta de investigación, a continuación, se presentan las últimas que se han hecho:

¿Cuáles son las formas de razonamiento que coordinan las acciones necesarias para realizar una predicción en un sistema no lineal?

¿Cómo se da la coordinación entre las acciones y actividades vinculadas con la predicción en sistemas no lineales?

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*. (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional en el desarrollo de competencias*. (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Cantoral, R. (2001). Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado. En J. Domínguez, & M. Sierra (Eds.). *Tendencias actuales de las matemáticas, su historia y su enseñanza* (págs. 97-110). Salamanca: Universidad de Salamanca.
- Cantoral, R. (2013a). Socioepistemología de la variación y el cambio. En C. Cuevas, & F. Pluinage (Eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral* (págs. 195-216). México: Pearson.
- Cantoral, R. (2013b). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. México: Gedisa.
- Cantoral, R., & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica*, 2, 33-70.
- Chimal, R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación*. (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Cordero, F., & Morales, A. (2014). La Graficación-Modelación y la Serie de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3), 319-345.
- Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona: Gedisa.
- Ford, J. (1986). Chaos: Solving the Unsolvable, Predicting the Unpredictable. En M. Barnsley, & S. Demko (Eds.), *Chaotic Dynamics and Fractals*. Orlando Florida: Academic Press.
- Lorenz, E. N. (1995). *The essence of chaos*. United States of America: University of Washington Press.
- Lyapunov, A. M. (1892). *The general problem of the stability of motion*. Kharkov: Kharkov Mathematica Society.
- May, R. (1976). Simple Mathematica Models with very complicated Dynamics. *Nature*, 459-467.
- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Parks, P. C. (1992). A. M. Lyapunov's stability theory—100 years on. *IMA Journal of Mathematical Control & Informat*, 275-303.