# MODELOS Y ESTRATEGIAS DE ESTUDIANTES DE ESCUELA ELEMENTAL AL RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

***Eric Figueroa González***
eric.figueroagonzalez@upr.edu
***Omar Hernández Rodríguez***
omar.hernandez4@upr.edu
*Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras*

**Recibido:** 20/12/2016 **Aceptado:** 8/02/2017

## Resumen

Reportamos los resultados de un estudio de caso que explora la forma en que seis estudiantes de nivel elemental resuelven problemas matemáticos cuando trabajan individualmente. En el estudio participaron estudiantes de quinto grado de una escuela adscrita a una facultad de formación docente. Cada estudiante resolvió cuatro problemas: dos de manera individual y dos en pareja. Se analizaron los trabajos escritos por los estudiantes, las observaciones del investigador y las entrevistas realizadas a los participantes después de resolver los problemas. Se presentan en este informe los hallazgos correspondientes al trabajo individual, entre los cuales se destaca que los estudiantes utilizan ciclos iterativos de lectura, representación, interpretación, operación, prueba de la solución encontrada y convencimiento de que la respuesta es correcta. Las estrategias que más utilizaron los estudiantes al resolver los problemas fueron el uso de las operaciones básicas y la asociación con problemas previos. También se evidenció que los estudiantes tienen la capacidad de integrar dos o más estrategias para resolver los problemas.

**Palabras claves:** resolución de problemas a nivel elemental, problemas matemáticos, estrategias de resolución de problemas.

## MODELS AND STRATEGIES OF ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS TO SOLVE MATHEMATICAL PROBLEMS

## Abstract

We report the results of a case study that explores how six elementary students solve mathematical problems when working individually. Fifth grade students from a school attached to a teachers college participated in the study. Each student solved four problems: two individually and two as a couple. Student solutions, investigator observations, and interviews with participants after solving the problems were analyzed. This paper presents the findings of individual work, among which it is emphasized that students use iterative cycles of reading, representation, interpretation, operation, proof of the solution found and convincing themselves that the answer is correct. The strategies most used by students in solving problems were the use of basic operations and association with previous problems. It was also demonstrated that students have the ability to integrate two or more strategies to solve problems.

**Keywords:** problem solving at elementary level, mathematical problem solving, strategies to solve problems.

## Introducción

La resolución de problemas es inherente a las matemáticas, sin embargo, no es sino hasta la década del 70 del siglo pasado que los investigadores en educación empezaron a interesarse por este tema. Varios expertos coinciden en que las publicaciones del matemático húngaro George Polya[1] fueron el detonante para que se iniciara de una manera sistemática la investigación en esta área (Lesh & Zawojewski, 2007; Schoenfeld, 1992).

El interés por incluir la resolución de problemas en los currículos de matemáticas de Estados Unidos se inició en 1980 con una aseveración por parte del Concilio Nacional de Maestros de Matemática (NCTM por sus siglas en Inglés) en su informe "Una agenda para la acción" (NCTM, 1980). Es así como decenas de matemáticos, investigadores, diseñadores de currículo y maestros de matemáticos se dedicaron a la tarea de hacer de la resolución de problemas su objeto de estudio, logrando que la década de 1980 fuera la década de la solución de problemas (English & Gainsburg, 2016).

Schoenfeld (1992) y Lesh & Zawojewski (2007) reportan las tendencias del tema de solución de problemas tanto en las investigaciones, como en las prácticas educativas, en dos metaestudios publicados en las dos enciclopedias de educación matemática más importantes publicadas en los Estados Unidos de América. Estos investigadores coinciden que, posiblemente influenciados por las estrategias descritas por Polya para los estudiantes de matemáticas, los investigadores se dedicaron a buscar estrategias efectivas para enseñar a todos los estudiantes de escuela superior a resolver problemas. En la revisión de la literatura, Schoenfeld (1992) concluyó que enseñar a los estudiantes el uso de estrategias generales no produce buenos resultados. Para hacer que los estudiantes sean buenos en la solución de problemas matemáticos, recomienda que se les enseñe estrategias específicas que atiendan ciertas familias de problemas y que se incorporen la enseñanza de estrategias metacognitivas y formas de contrarrestar las creencias negativas que tienen los estudiantes de sus propias capacidades. Es así como se traen a la atención de los investigadores dos asuntos que marcarían el desarrollo del tema en la década de 1990: la metacognición y las creencias.

[1] George Polya publicó en 1945 el libro *Cómo plantear y resolver problemas* y en 1954 *Matemáticas y razonamiento plausible* que se componía de los *volúmenes Inducción y analogía en las matemáticas* y *Patrones de inferencia plausible*. Los títulos en inglés eran *How to solve it: A new aspect of mathematical method*; *Mathematics and plausible resoning: Induction and anlogy in mahtematics*; y, *Mathematics and plausible resoning: Patterns of plausible inference*.

Entre otras cosas, Schoenfeld (1992) reporta cinco formas en que se pueden utilizan tradicionalmente los problemas: para justificar la enseñanza de ciertos temas matemáticos, para proveer motivación, como medio de recreación, para desarrollar nuevas destrezas y como medio de práctica. Si bien es cierto que los problemas no se estaban estudiando como un objeto en sí, estos acercamientos podían facilitar el logro de otros objetivos tan importantes como el mantener el interés en su estudio. Entre las aportaciones importantes del artículo de Schoenfeld se destaca el reconocimiento de cinco aspectos de la cognición que juegan un papel importante en la resolución de un problema: la base de conocimiento; las estrategias de solución; el monitoreo y el control; las creencias y el afecto; y, las prácticas. Es necesario determinar el grado de conocimiento que tiene el estudiante de los hechos y los procedimientos matemáticos que se requieren para resolver el problema, aspectos que son importantes pero no suficientes ya que también es necesario que el estudiante aplique algunas heurísticas. Sin embargo, enseñar y aprender estas heurísticas no resulta una tarea fácil, posiblemente por los materiales educativos de la época o por la misma dificultad que entrañaba el tema a los maestros. De la misma manera, se pueden se comprenden los retos inherentes a un cambio de paradigma que pretendía la toma de rienda por parte del estudiante en un ambiente en donde prevalecía la clase completamente dirigida por el maestro. Este nuevo conjunto de prácticas que se promovía requería que los estudiantes tuvieran la oportunidad de interactuar con sus compañeros para imaginar una conjetura, luego la pusieran a prueba y finalmente utilizaran procedimientos adecuados a su nivel para demostrar la validez de su afirmación, lo cual requería de prácticas novedosas para la época.

Por su parte, Lesh & Zawojewski (2007) reportan que las tres áreas de mayor importancia para la investigación en solución de problemas antes de la década de 1990 fueron: los determinantes de la dificultad de los problemas, la distinción entre los que son buenos y malos resolviendo problemas y la enseñanza de la solución de problemas. Los problemas que se proponía a los estudiantes para resolver respondían a los contenidos que se deseaba que dominaran, que se pudiera medir el desempeño, que invitara a utilizar ciertas heurística y que tuviera algo que los hiciera difíciles, generalmente la sintaxis. Otra dimensión de las investigaciones se dirigió a determinar los procesos que utilizaban los expertos cuando resolvían problemas matemáticos. Así se pudo determinar que los expertos tienen más conocimiento, éste está mejor conectado y cuando se enfrentan a un problema, focalizan su atención en la estructura mientras que los novatos se centran en aspectos superficiales. En cuanto a la enseñanza de la solución de problemas, consideran que tanto las estrategias de Polya como las Schoenfled fueron enseñadas como reglas a seguir y no resultaron beneficiosas para los estudiantes.

Varios autores coinciden en que es necesario revisar los fundamentos de la solución de problemas y considerar otras opciones (Englisn & Gainsburg, 2016; Lesh & Kehle, 2003; Lesh & Zawojewski, 2007). English, Lesh & Fennewald (2008) recomiendan un examen minucioso de los supuestos que han gobernado lo que significa entender un conjunto pequeño de grandes ideas en la solución de problemas en matemáticas. Mencionan, por ejemplo, que el trabajo de los expertos en un trabajo que requiere el uso intenso de matemáticas gira alrededor de la situación que se está analizando más que en estrategias generales.

Lesh & Zawojewski (2007) consideran que, a pesar de los cientos de investigaciones que se han reportado en todo el mundo, todavía se carece de contestación a muchas de sus interrogantes. Esas lagunas son más notables en la educación matemática a nivel elemental en donde se han realizado menos estudios. Estos investigadores expresan que una de las razones por la que las investigaciones sobre solución de problemas han realizado pocas aportaciones a las prácticas educativas es el foco en aspectos que se quieren generalizar a todas las poblaciones. Recomiendan que para formar una base teórica es necesario investigar en contextos locales.

Lubienski (2000) expresó que los estudios de solución de problemas deben enfocarse en: (a) descripciones adecuadas sobre lo que ocurre en clases en las cuales se resuelven problemas, y (b) investigaciones que se enfoquen en grupos y clases enteras, en vez de individuos particulares. Chapman (2006), considera que los problemas verbales pueden utilizarse como base para aplicaciones y para integrar la vida diaria en educación matemática. Según esta investigadora, los problemas contextuales pueden: a) proveer prácticas con situaciones problemáticas de la vida cotidiana, b) motivar a los estudiantes a entender la importancia de conceptos matemáticos y c) ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades creativas, críticas y de solución de problemas.

Millard, Oaks, & Sanders (2002), indican que otro factor que limita la debida atención de las estrategias necesarias para la solución de problemas es que los maestros sienten demasiada presión por cumplir con el contenido curricular que se indica en los estándares.

Esto conlleva a que muchas veces, los maestros que interesan promover en sus estudiantes el uso de diversas estrategias de solución de problemas, carezcan del tiempo necesario para este fin. A este factor se une que muchos libros de textos no incorporan problemas matemáticos de la vida diaria. Esta situación se hace más evidente en Puerto Rico, ya que muchos de los textos que se utilizan en los cursos de matemáticas son traducciones de inglés y los contextos utilizados no son necesariamente familiares para los estudiantes. Por otra parte, y como agravante, las traducciones no son realizadas en Puerto Rico.

## Descripción de la investigación

La presente investigación tenía como propósito explorar cómo los estudiantes de nivel elemental de una escuela adscrita a una Facultad de Educación resuelven problemas matemáticos. Se utilizó un método cualitativo–descriptivo de investigación que permite, por una parte, enfocarse en los procesos, en vez de los productos o resultados (Maxwell, 1996) y por la otra facilita una descripción holística y una explicación de la situación bajo estudio (Merriam, 1998). En el estudio se utilizó el diseño de investigación conocido como estudio de caso. El caso es el proceso de solución de problemas matemáticos por parte de estudiantes de quinto grado.

Participaron seis estudiantes de quinto grado matriculados en una escuela laboratorio que sirve de experiencias clínicas a maestros es formación. Los seis estudiantes que participaron en el estudio se seleccionaron basados en las siguientes características, según observado por su maestro de matemáticas: ser estudiante de quinto grado, poseer curiosidad intelectual, demostrar compromiso con su educación matemática, poseer autocontrol en la sala de clases, expresar que las matemáticas es una de sus clases preferidas y disfrutar la resolución de retos matemáticos. Otros de los criterios de participación en el estudio fueron la fluidez oral del estudiante y que el estudiante estuviese dispuesto a ser entrevistado y grabado. Los criterios de selección obedecen a las recomendaciones de varios investigadores (Fraenkel y Wallen, 1996; Merriam, 1998).

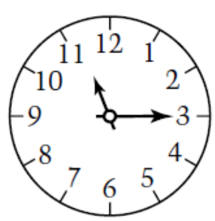
Varios expertos en investigación educativa (Creswell, 1994; Lucca y Berríos, 2003) recomiendan utilizar diversas técnicas de recopilación de información cuando se utilizan estudios de casos. A la luz de estas recomendaciones, se utilizaron tres técnicas diferentes de recopilación de información: a) entrevistas semi-estructuradas a los estudiantes después de una sesión de resolución de problemas, b) la observación de la ejecución de los estudiantes en sesiones de resolución de problemas y c) el análisis de los trabajos elaborados por los estudiantes en la sesión de resolución de problemas. Esta variedad de técnicas tuvo el propósito de comparar la información recopilada desde diversas perspectivas y por la otra, permitió un comprensión profunda del caso de estudio, lo cual a su vez, facilitó la contestación a la pregunta de investigación.

## Los problemas

Se redactaron siete problemas teniendo en cuenta el contenido estudiado durante el año escolar. Se pidió a un grupo de nueve expertos, entre los que se encontraban maestros de matemáticas, estudiantes graduados de matemáticas y de educación matemática, que resolvieran los problemas y expresaran su opinión sobre la pertinencia de los mismos para la investigación y lo apropiado para estudiantes de quinto grado. También se les pidió que ofrecieran todas las formas posibles que ellos encontraron para resolver los problemas. Finalmente, se les pidió que seleccionaron los cuatro problemas que ellos entendían que eran los más apropiados para estudiantes de quinto grado. En esta parte los expertos en educación tomaron en consideración la ubicación de cada problema dentro de la secuencia curricular de los centros en los cuales ellos ofrecían clases y en la secuencia curricular según el Programa de Matemáticas del Departamento de Educación de Puerto Rico. Los cuatro problemas que se utilizaron para la investigación fueron los siguientes.

*Problema #1:*

El reloj muestra la hora en que Luis sale de su casa por la mañana. Él regresa 6 horas y 50 minutos más tarde. ¿A qué hora regresa él?

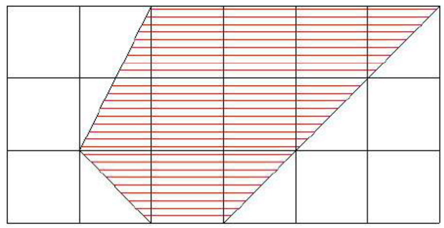



Problema #2:

Cinco grupos de la escuela van de viaje en autobús. Cada grupo tiene 21 estudiantes. Si cada autobús puede llevar sólo 18 estudiantes. ¿Cuántos autobuses se necesitan para el viaje?

Problema #3:

La siguiente figura muestra el diseño de una alfombra árabe.  La parte total sombreada representa un pentágono.  Si  cada cuadrito de la alfombra es de 1 m de largo, ¿Cuál es el área del pentágono?



Problema #4:

Una bombilla se enciende cada seis minutos y otra, cada nueve minutos. Las dos bombillas se encendieron simultáneamente al medio día.  ¿Cuándo será la primera vez, después de la 1:00 p.m., que se volverán a encender al mismo tiempo?

Los dos primeros problemas fueron resueltos por los estudiantes individualmente.  Los otros dos en forma grupal.   Se reporta en este documento la solución que dieron seis estudiantes de quinto grado a los primeros problemas.

## Procedimiento usado para recopilar la información

Durante el primer día de estudio, el investigador entregó el problema #1 al estudiante A.  Una vez el estudiante tenía consigo el problema se le leyeron las instrucciones, las cuales establecían que: (a) resolviera el problema de manera individual de tantas formas como le fuese posible, (b) no borrara nada de lo escrito y en su lugar tachara la parte escrita del proceso que entendía no era parte de una de las formas de resolver el problema, (c) tenía disponible todo el tiempo que necesitara para hallar diferentes formas de resolver el problema, y (d) de necesitar papel adicional podría solicitárselo al investigador.  Luego de que el estudiante entregó su solución, el investigador procedió a entrevistarlo para indagar acerca del proceso que utilizó para resolver el problema, destacando las estrategias empleadas por el individuo.  Una vez culminada la entrevista al primer estudiante, el investigador repitió el proceso con los restantes 5 alumnos el mismo día. De esta forma todos los participantes completaron el problema #1, con sus respectivas entrevistas, el mismo día.  La sesión de solución de problemas y entrevistas culminó justo antes del periodo de almuerzo. El segundo día de estudio se repitió el proceso del primer día pero con el problema #2.

El tercer y cuarto día de estudio los participantes contestaron el problema #3 y problema #4 respectivamente. No obstante, estos últimos dos días el proceso de resolución del problema se efectuó en pareja. Es decir, que el tercer y cuarto día el investigador agrupó los estudiantes en pares y les solicitó que resolvieran colaborativamente el problema, de forma que presentaran todas las posibles formas de resolverlo. Como parte de las instrucciones, se le indicó a los estudiantes que cada uno de ellos tendría una hoja de trabajo y que ellos debían decidir si trabajaban juntos todo el tiempo, separados todo el tiempo, o cuándo y cómo interactuaría con su compañero. Las parejas de estudiantes para resolver los problemas #3 y #4, estaban formadas por los alumnos A - B, C - F y D - E. Aunque a ambos estudiantes se les entregó una hoja con el problema, ellos decidían si usaban sólo una como hoja de respuestas o si les entregaban las dos al investigador. Una vez el par de estudiantes entregó las soluciones del problema, el investigador entrevistó a ambos alumnos simultáneamente.

Debido a que el estudio se llevó a cabo principalmente durante el periodo lectivo de los alumnos, el investigador conmutó el orden en que los estudiantes participaron en el estudio. Esta medida se implementó para que los estudiantes no se ausentaran a la misma clase durante los cuatro días del estudio. Por otra parte, permitió minimizar la contaminación, es decir, que los estudiantes compartieran información relacionada a los problemas del estudio antes de que se finalizara el proceso de entrevistar al último participante.

Las sesiones de solución de problemas y las entrevistas se realizaron en un salón destinado específicamente para la realización del estudio. El área estaba ubicada lejos de las demás salones de clases, de forma que el sonido propio de los niños en las aulas no afectara el desarrollo del estudio y se minimizaron las interrupciones durante las entrevistas. Las únicas personas dentro del salón de investigación eran los participantes y el investigador, lo cual conllevó a tener suficiente privacidad. El lugar presentó condiciones ideales para la investigación, ya que era silencioso, cómodo, con suficiente iluminación y una temperatura agradable.

Mientras los estudiantes resolvían los problemas, tanto cuando lo hacían en forma individual, como cuando lo hacían en pareja, el investigador anotó en manuscrito algunos indicadores que permitieron identificar características inherentes al proceso de solución de problemas que exhiben los participantes. Además, las notas de campo del investigador tuvieron como propósito la recopilación de información acerca de los ciclos que evidencian los estudiantes de nivel elemental al resolver problemas de matemáticas.

En las entrevistas y las anotaciones del investigador se utilizaron protocolos previamente diseñados teniendo en cuenta los instrumentos creados en investigaciones previas. Esto permitió que el investigador pudiera obtener información sistemáticamente en un contexto natural.

## Análisis de la información

Problema # 1

El estudiante A entendió que Luis llegó a su casa a las 11:15, que había estado 6 horas y cincuenta minutos fuera de ella y que debía hallar la hora en la cual salió de su casa. Utilizó la resta para resolver el problema, sin embargo, se observó que utilizó la base 10 y no la sexagesimal para realizar la operación de resta (11:15-6:50). El uso incorrecto de la base y errores en la operación llevan al estudiante a indicar que la respuesta es 4:55. Según García (1992) existen dos procesos fundamentales durante la resolución de problemas: la comprensión y la solución. Si el estudiante comprende incorrectamente el problema, es muy probable que no obtenga la respuesta correcta. En resumen, la estrategia que utilizó el estudiante A para resolver este problema consistió en hacer uso de una operación matemática. En la entrevista se puedo determinar que entendía que de la única forma que podría resolverse el problema era mediante operaciones matemáticas, entiéndase la resta.

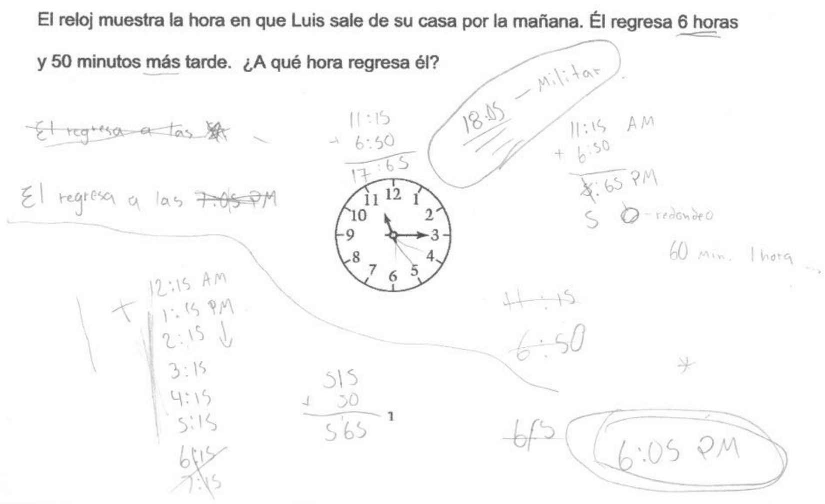
El estudiante B utilizó diversidad de estrategias para resolver el problema #1. Una de las estrategias que utilizó fue asociar el problema con otros visto anteriormente en sus cursos de matemáticas. Durante la entrevista, el estudiante B expresó que aunque no había resuelto este mismo problema, sí había trabajado con problemas que involucran la búsqueda de una determinada hora. Además, indicó que mediante asociación de estrategias utilizadas anteriormente, pudo reconocer que al buscar una hora posterior a la que le ofrecían de dato, entonces sabía que la operación matemática que debía utilizar era la suma.

Otra estrategia utilizada por el estudiante B consistió en utilizar operaciones matemáticas, junto con cómputo mental. Este estudiante asoció la solución del problema con la operación de suma. Durante la entrevista el participante expresó que realizó cómputos mentales para sumar por separado las horas y los minutos. Esta acción se asocia al nivel estratégico en la taxonomía de Webb (2002), cual es uno de los niveles de pensamiento más altos. Con relación a las horas, sumó 11 + 6. Esta operación representa la hora que Luis sale de su casa y le añade la cantidad de horas que está fuera de su casa. Al obtener que el resultado es 17, estableció equivalencia de horas (13 → 1, 14 → 2, 15→ 3, 16 → 4, y 17 → 5). Luego, de manera independiente el estudiante sumó los minutos, 15 + 50. Este estudiante comprendió que 60 minutos equivalen a una hora ya que cuando el total de los minutos excedió 60, reagrupó correctamente 60 minutos por una hora. De esta forma infiere que el horario debe apuntar al 6 y el minutero al 1. Por consiguiente, concluye que la hora que Luis regresa es a las 6:05.

Luego que el estudiante B halló que la hora en la cual Luis regresa a su casa es 6:05, verificó su proceso al aplicar la operación inversa de sumar. Aunque él consideró que al restar estaba realizando una estrategia diferente, más bien este proceso le sirvió para verificar su respuesta. Sin embargo, él verificó cuáles de los operaciones matemáticas tenían sentido aplicarlas como parte del proceso de resolver el problema. Otra estrategia empleada por el estudiante B para resolver el problema #1 fue contar las horas. Esta estrategia la efectuó apoyándose en el diagrama provisto en el problema. La diversidad de estrategias que utilizó este alumno también incluyó el uso de representaciones icónicas. Esta estrategia el estudiante la llama uso de palitos ("tally marks").

Al momento de leer por primera vez el problema, el estudiante C subrayó algunos términos del enunciado del problema. En la entrevista se pudo establecer que realizó esta acción para resaltar la importancia de los dichos términos porque para él son palabras claves que le facilitarían establecer las estrategias para solucionar el problema La primera estrategia de solución que empleó el estudiante C consistió en el uso de sumas repetidas. Con relación a esta estrategia, se observó que estableció el patrón de horas (12:15, 1:15, 2:15, 3:15, 4:15 y 5:15). Aunque este participante, sumó por separado las horas y los minutos, se observó que al sumar las horas utilizó como punto de referencia las 11:15, lo cual es cualitativamente diferente a la solución mostrada por el estudiante B, quien utilizó como punto de referencia las 11:00. El proceso de sumar por separado las horas y los minutos y luego interpretar los resultados para ofrecer una respuesta al problema evidencia acciones asociadas al nivel estratégico en la taxonomía de Webb (2002). Luego que terminó de sumar las horas y obtuvo 5:15, a esta hora le sumó 50 minutos y obtuvo la respuesta final que es 6:05. Por consiguiente, se deduce que la estrategia de suma repetida la empleó de manera entrelazada con la estrategia de operaciones básica (suma).

*Figura 1:* Solución del estudiante C para el problema #1

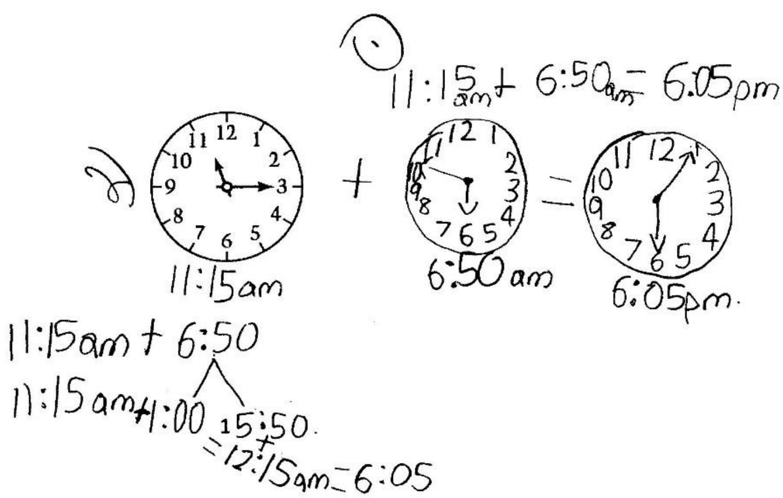



Posteriormente, el estudiante C sumó 11:15 + 6:50 y obtuvo las 17:65.  Esta operación es la que luego en la entrevista llamó "sumar de cantazo" y fue la que le permitió encontrar la respuesta correcta.  El estudiante expresó durante la entrevista que esta suma la realizó primero de forma mental y luego utilizó lápiz y papel para verificar su cómputo (Figura 1).

Por otro lado, el estudiante D inicialmente asoció el problema con otros similares estudiados previamente en su clase de matemáticas.  Luego de la correspondiente asociación, recurrió al uso de las operaciones básicas como estrategia de solución.  Durante la entrevista el estudiante expresó que la primera idea que se le ocurrió fue contar las horas de uno en uno (suma repetida).  El estudiante D sumó primero las horas y luego sumó de manera independiente los minutos, por lo cual también evidenció el empleo de niveles altos de pensamiento.  Este alumno también se percató que debido a que la suma de los minutos excedía 60, entonces había que reagrupar 60 minutos por una hora.  Después de varios intentos obtuvo que la hora que representa la solución al problema es 6:05. Además de las estrategias mencionadas, el participante D realizó sumas repetidas, de uno en uno, para determinar la hora de regreso de Luis.  El estudiante realizó los cómputos de dos formas diferentes, a saber: utilizando de referencia el reloj que se muestra en el diagrama del problema y también mediante cómputo mental.

El estudiante E también empleó varias estrategias para resolver el problema. En primera instancia anotó la hora que Luis salió de su casa y le sumó el tiempo total que estuvo fuera de ella. De esta forma, este alumno encontró que la hora a la cual Luis llegó a su casa es 6:05. Una segunda estrategia que empleó fue la utilización de sumas repetidas. El desarrollo de esta estrategia consistió en utilizar el diagrama provisto en el problema para contar, de uno en uno, las horas que Luis estuvo fuera de la casa. Por último, él verificó el resultado contando con los dedos, también de uno en uno, las horas que Luis estuvo fuera de la casa. Como puede observarse, estas últimas dos estrategias son similares ya que la única diferencia entre ellas consiste en el apoyo que utilizan al realizar los conteos. Mientras que en un caso el estudiante se apoyó del diagrama provisto en el problema; en el otro caso el estudiante utilizó los dedos de las manos.

*Figura 2:* Notación utilizada por el estudiante E para representar la solución del problema #1




Otra estrategia que utilizó el estudiante E consistió en el uso de modelos gráficos. Él construyó un diagrama para representar el tiempo transcurrido desde el momento que Luis sale de su casa. Este diagrama lo construyó justo al lado del diagrama provisto en el problema. Se observa que colocó un operador de suma entre ambos diagramas (Figura 2). Mediante este operador representó que a la hora que Luis sale de su casa le estaba sumando el tiempo transcurrido fuera de su casa.

El estudiante F utilizó operaciones matemáticas como estrategia de solución. En particular, él hizo uso de las operaciones de suma y resta. Según menciona en la entrevista, él sumó 11 + 6 = 17. A ese total le restó 12 "porque doce son todas las horas del reloj". Luego efectuó la resta de 17 y 12, por lo cual obtiene una diferencia de 5. Según explica en la entrevista, ese resultado lo interpretó como las 5:00. Seguidamente, le sumó 50 minutos a la hora que había obtenido. De esta forma el estudiante F concluyó que Luis regresaba a las 5:50 p.m. Por tanto, este estudiante utilizó en secuencia tres operaciones matemáticas: suma, resta y suma. Al computar por separado las horas y los minutos y luego unir los resultados para expresar la respuesta del problema, se evidencia el nivel estratégico en la taxonomía de Webb (2002). Como parte de este procediendo el estudiante F utilizó como hora de partida o referencia las 11:00 y olvidó sumar los 15 minutos que había descontado para comenzar a sumar desde una hora en punto. Además de las estrategias mencionadas, este estudiante realizó diagramas adicionales al ofrecido. Él mencionó que la construcción de dichos dibujos tenía como propósito contar las horas teniendo de referencia el reloj (modelo visual). Al emplear esta estrategia se pueda observar la integración de dos estrategias simultáneamente, a saber: uso de diagramas y suma repetida (contar de uno en uno). Además, se observó que este participante construyó una tabla de datos para establecer un asociación de números con horas. En la entrevista también se pudo establecer que asoció el problema a conocimientos vistos en clases previamente.

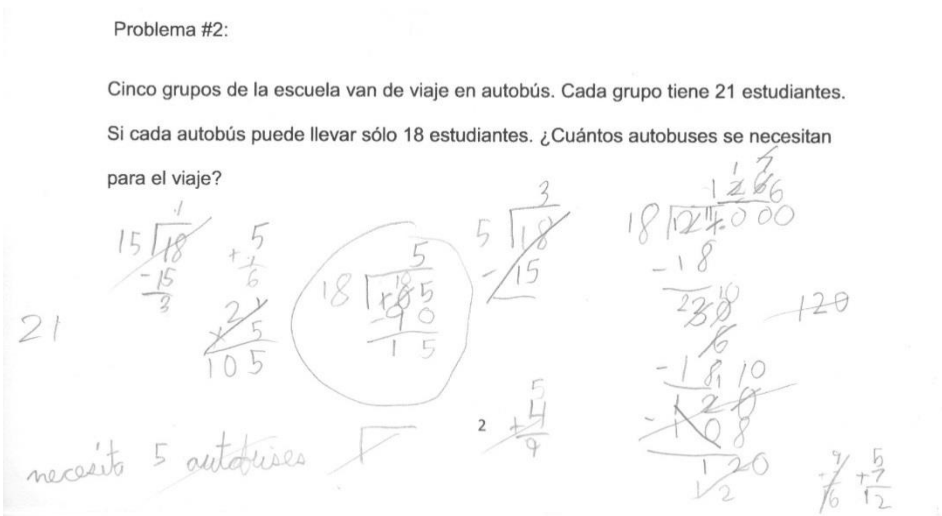
Problema # 2

El estudiante A resolvió el problema mediante el uso de operaciones matemáticas. Se observó una discrepancia entre el resultado que se desprende de la hoja de trabajo y lo que el alumno informó durante la entrevista. En la hoja de trabajo (Figura 3), el estudiante realizó varios cómputos a lápiz y papel. Sin embargo, de manera especial circuló la división de 105 entre 18. Además, redactó "necesitó 5 autobuses". Esta respuesta difiere de lo que el estudiante expresó durante la entrevista. En la misma, indicó que primero multiplicó la cantidad de estudiantes que había en cada grupo (21) por la cantidad de grupos (5). Este cómputo lo realizó con lápiz y papel y obtuvo como producto 105. Durante la entrevista, le expresó al investigador que 105 representaba la cantidad total de estudiantes que iban de viaje; por lo cual se desprende que este participante comprende el significado de la multiplicación y la contextualizó en el problema. Luego de hallar el producto, el estudiante lo dividió entre 18.

Él expresó que al dividir obtuvo "5 grupos y me di cuenta que si eran 5, sobraban 15 estudiantes". Finalmente indicó que para realizar el viaje se requerían 6 autobuses.

Se observó que como parte del proceso de identificar estrategias de solución, el estudiante A dividió 18 entre 15, 18 entre 5, y 21 entre 18. Estas acciones pueden interpretarse como que el alumno entendía que mediante el uso de división, podía resolver el problema, pero aparentaba no reconocer cuál era el dividendo y cuál era el divisor. Este argumento es cónsono con lo expresado por Hernández (2002), quien encontró que el proceso de solución de problemas matemáticos no es lineal. También es consistente con el hallazgo de Lesh y y Zawojewski (2007), quienes expresan que al resolver problemas el estudiante manifiesta una iteración de expresión, poner a prueba y revisión antes de llegar a una respuesta final.

*Figura 3.* Solución del estudiante A para el problema #2




Al realizar varios cómputos de división y luego descartarlos, se deduce que, similar al proceso que exhibió al resolver el problema #1, el estudiante A aparenta utilizar un proceso de exploración de las operaciones básicas para determinar cuál de ellas podría conducirlo a una respuesta que le pareciera adecuada. La diferencia es que en problema #1, él utilizó varias operaciones básicas, mientras que en el problema #2 utilizó una sola operación, división, pero estableciendo diferentes combinaciones para el dividendo y el divisor con los datos ofrecidos. Además, el estudiante A indicó que algunos de los cómputos los hizo de manera mental. En resumen, se observó que las dos estrategias de solución de problemas que utilizó el estudiante A para resolver el problema #2 fueron uso de operaciones matemáticas y cómputo mental.

La principal estrategia de solución de problema que utilizó el estudiante B en el problema #2 fue uso de operaciones matemáticas. Inicialmente, el estudiante B multiplicó con lápiz y papel 21 por 5. El producto le indicó que la cantidad total de estudiantes que irían al viaje de campo es 105. Luego, el estudiante le restó 18 a 105. Al obtener como diferencia 87, se percató que esa operación matemática no era la que debía realizar porque "era una cantidad muy alta". Es decir, el estudiante comprendió que no era viable utilizar 87 autobuses para transportar 105 estudiantes. Esta acción significa que luego de identificar y poner a prueba la estrategia de uso de operaciones básicas, el alumno interpretó su resultado. Durante el proceso de interpretación, se percató que su estrategia no le permite resolver el problema. Posteriormente, el estudiante procedió a realizar otra operación matemática (división). En este caso, dividió 105 entre 18 y reconoció que el cociente es 5. Luego multiplicó el 5 (cociente) por 18 (cantidad de estudiantes que caben en cada guagua). El producto que obtuvo de dicha multiplicación (90) se lo restó a 105 (cantidad total de estudiantes) y la diferencia (15) la interpretó como la respuesta a la pregunta del problema. De esta forma el estudiante B concluyó que harían falta 15 autobuses para transportar a los 105 estudiantes.

En resumen, se observó que el estudiante B logró identificar una estrategia que le permitió resolver el problema (uso de operaciones matemáticas), ya que mediante la combinación de multiplicación primero y división luego, es posible obtener la solución al problema. Sin embargo, y a pesar que identificó y efectuó las operaciones matemáticas necesarias para resolver el problema, no logró interpretar el resultado de la división a la luz del contexto del problema. Debido a los múltiples cómputos realizados se puede inferir que el estudiante entendía que el problema se podría resolver mediante el uso de operaciones básicas, pero no sabía cuál o cuáles de las operaciones era la que debía utilizar. La aceptación o rechazo de la operación matemática la determinaba al interpretar el significado numérico del resultado.

La estrategia inicial que utilizó el estudiante C fue también multiplicar 21 por 5. Luego de la multiplicación, el estudiante construyó una lista vertical con el número 21 e hizo uso de sumas repetidas con el 21 para confirmar que el resultado de la multiplicación que había realizado fuese el correcto. De esta forma encontró que el total de estudiantes que iban al viaje de campo era 105. Luego multiplicó 18 por 5 "para saber cuántos estudiantes ya iban montados en los autobuses y cuántos autobuses me faltaban por montar". Esto significa que el estudiante asoció un autobús con 18 de los 21 estudiantes que había en cada grupo. De esta forma dedujo que en cinco autobuses podría transportar 90 estudiantes y que con un autobús adicional podría transportar la totalidad de 105 estudiantes. De esta forma encontró que en total se necesitaban 6 autobuses para transportar los cinco grupos de 21 estudiantes. Este estudiante también construyó listas numéricas para efectuar sumas repetidas con el número 18. Expresó que las sumas repetidas las realizaba para verificar los resultados que obtuvo mediante operaciones básicas. Por consiguiente, este estudiante utilizó las siguientes estrategias para resolver el problema #2: operaciones matemáticas, asociación o equivalencia entre cantidades, representaciones visuales (listas numéricas) y sumas repetidas. Al final se observó que el estudiante expresó su respuesta mediante una oración completa. En resumen, se observó que las diferentes estrategias que utilizó el estudiante C para resolver el problema #2 fueron: combinación de operaciones básicas, sumas repetidas y asociación de conjunto (autobuses y grupos de estudiantes).

El participante D primero realizó sumas repetidas con el número 18. No obstante, se percató que este proceso se puede sustituir por uno de multiplicación. Inmediatamente, procedió a calcular el producto de 18 por 5, que es 90. No obstante, él estaba consciente que al realizar esta multiplicación estaba dejando fuera del cómputo a tres estudiantes de cada uno de los cinco grupos. Así que determinó que si se usan solamente 5 autobuses se quedan sin viajar 15 estudiantes, a razón de tres por cada grupo. Él argumentó que como el autobús tiene capacidad para 18 estudiantes, entonces en un solo autobús podría colocar los 15 estudiantes que se le quedaron fuera al realizar el primer cómputo. De esta forma el estudiante D concluyó que la cantidad de autobuses necesarios para transportar a los cinco grupos de 21 estudiantes es 6. Se observó que el estudiante contestó en palabras la pregunta del problema. También se observó que el estudiante utilizó dos operaciones matemáticas, suma y multiplicación. Debido a que la multiplicación se le define a los estudiantes en nivel elemental como un método rápido de sumar, el cómputo realizado por el estudiante podría interpretarse como un mecanismo de verificación de resultado. En resumen, se puede establecer que el estudiante D utilizó como estrategias para resolver el problema #2 combinaciones de operaciones matemáticas, sumas repetidas y razones.

Por otro lado, se observó que el estudiante E utilizó varias estrategias para resolver el problema #2. Inicialmente asoció el problema con uno estudiado en la clase de matemáticas.

Él expresó que la semejanza consistía en que ambos eran problemas verbales y que la estrategia que él utilizó para resolver el problema que le habían dado previamente fue el uso de operaciones básicas. De esa forma, él determinó que debía verificar si el problema #2 se podía resolver con sumas o restas. En primera instancia, él efectuó sumas repetidas con el 21 para determinar la cantidad total de estudiantes que iban de viaje. De esta forma supo que se necesitaba transportar 105 estudiantes. Luego, como el enunciado del problema establece que cada autobús tiene una capacidad para 18 estudiantes, él utilizó restas repetidas con el número 18. Este proceso lo efectuó hasta que le diera un resultado menor a 18. De esta forma supo que se requerían cinco autobuses llenos a capacidad y que aún le faltaban por transportar 15 estudiantes. Estos estudiantes restantes podrían viajar en un solo autobús, por lo cual la cantidad de autobuses necesarios son seis (6).

Se observó que el estudiante multiplicó correctamente 18 por 5 y que dividió 105 entre 18 lo cual se puede interpretar como un proceso de verificación de las sumas y restas repetidas que había realizado, pero que también es evidencia de una comprensión profunda de las operaciones de multiplicación y división.

Además de realizar las sumas y restas repetidas, así como operaciones básicas, se observó que otra estrategia que usó el estudiante E fue representaciones gráficas o visuales. Esto se evidencia mediante la construcción en la hoja de trabajo de un dibujo que muestra un vehículo de motor. En resumen, se observó que las estrategias utilizadas por el estudiante E para resolver el problema #2 fueron las siguientes: (a) asociación del problema con otros estudiados previamente, (b) sumas repetidas (sumó cinco veces 21), (c) resta repetida (restó el número 18 tantas veces como pudo), (d) uso de operaciones básicas de matemáticas, y (e) uso de representaciones visuales o diagramas.

El estudiante F también utilizó variedad de estrategias para resolver el problema #2. Inicialmente, el estudiante realizó sumas repetidas de 18 para determinar la cantidad de autobuses que se podrían llenar a capacidad. Mediante esta estrategia concluyó que la cantidad de autobuses necesarias son seis. Este estudiante expresó que asoció el problema con uno que ya había estudiado en la clase de matemática ya que se recordó que en su clase de matemáticas había resuelto un problema que tuvo que sumar y también conllevaba realizar algún tipo de distribución. Este recuerdo propició que el estudiante F empleara las estrategias de asociación de conjuntos para resolver el problema #2 ya que asoció un autobús con un conjunto de 18 estudiantes. De esa forma comprendió que como en total eran cinco grupos los que iban de viaje, entonces necesitaba al menos cinco autobuses. No obstante, por cada grupo se estaban quedando fuera tres estudiantes. Al sumar todos los estudiantes que quedaban fuera, la cantidad era menor a 18 por lo cual cabían todos en un mismo autobús. De esta forma, el estudiante concluyó que en total se necesitaban seis autobuses para transportar los cinco grupos de 21 estudiantes. El estudiante F también expresó que algunos cómputos, en particular las sumas, las realizó de manera mental ya que se les hace más fácil. Por tanto, las estrategias que utilizó el estudiante F para resolver el problema #2 fueron: (a) asociación con problemas previos, (b) suma repetida, (c) asociacion de conjuntos, y (d) cómputo mental.

## Conclusiones

La estrategia de solución de problemas que más utilizaron los participantes del estudio al resolver el problema #1 es el uso de operaciones matemáticas (suma, resta, multiplicación y división). Esto puede interpretarse como que las operaciones básicas ocupan la principal estrategia de solución de problemas y por consiguiente una vez el estudiante se enfrenta a un problema, lo primero que hace es examinar cuál de las operaciones básica le permite hallar la respuesta. Esta interpretación es consistente a lo expresado por Hernández Rodríguez (2002), quien encontró que la mayoría de los estudiantes utilizan operaciones aritméticas como estrategia de solución de problemas matemáticos.

La razón por la cual los estudiantes utilizaron con más frecuencia las operaciones básicas como estrategias de solución puede ser que en el nivel cuarto a sexto se estudian las operaciones con fracciones, números mixtos y números decimales. Debido a que estos temas son parte del contenido curricular correspondiente al nivel escolar que pertenecen los participantes del estudio (4 - 6), los estudiantes podrían estar asociando el problema con las herramientas cognitivas que poseen y que han aprendido recientemente. Este hallazgo es cónsono con lo expresado por Hernández Rodríguez (2002) quien encontró que la forma en que se resuelve un problema está fuertemente influenciada por el tema que los participantes están estudiando o que estudiaron recientemente.

Es necesario destacar que, a pesar de que utilizaron las operaciones básicas para resolver el problema, lo hicieron de manera diferente. Se evidencian así, por una parte una visualización diferente para la solución y la creatividad al aplicar los conocimientos que poseen con el objetivo de resolver el problema, sin el condicionamiento del uso de una estrategia anterior. De hecho, se observó el uso del tanteo y error, representaciones icónicas, patrones, uso de modelos concretos y uso de representaciones visuales. La gama amplia de estrategias indica que, aún cuando los estudiantes logran asociar el problema con otros estudiados previamente, esta asociación no siempre les ayuda a resolver el problema.

Los estudiantes lograban identificar, mediante asociación con problemas previos, que podían hacer uso de operaciones matemáticas como estrategia de solución, pero no sabían cuál de las operaciones era la que debían utilizar. Para identificar la operación matemática que utilizarían, consistentemente ponían a prueba las diferentes operaciones hasta que alguna de ellas les diera un resultado que consideraban aceptable como respuesta al problema. Evidenciando así el ciclo iterativo de encontrar una solución numérica y determinar su validez.

En conclusión, se observó que aunque la asociación con problemas previos es una de las estrategias que más identificaron, aunque la misma no les permitía desarrollar una solución al problema. Mientras que por un lado se observó que la utilización de esta estrategia amerita que se combine con otras para completar un proceso de solución; por otro lado, frecuentemente los estudiantes recordaban haber visto un problema parecido, pero no sabían la estrategia específica que les permitió resolverlos. Este hallazgo concuerda con lo expresado por Hernández Rodríguez (2002) quien expresó que los estudiantes sólo recuerdan características superficiales de los problemas y no aspectos estructurales. Esto podría significar que no poseen un esquema formado o si lo tienen no lo logran activar. También se puede considerar como evidencia de la dificultad de los estudiantes para avanzar en los niveles de matematización.

Al igual que en el primer problema, en el segundo la principal estrategia de solución que emplearon los estudiantes fue el uso de operaciones básicas. Se observó una alta frecuencia en el uso específico de sumas repetidas como estrategia de solución. Otras estrategias que utilizaron con menos frecuencia son: resta repetida, uso de modelos gráficos, asociación con problemas previos, razones y cómputo mental. Al igual que en el problema #1, los participantes "tanteaban" cuál de las operaciones básicas era la que les funcionaba en cada problema. Es decir, los estudiantes ponían a prueba una de las operaciones básicas con los datos del problema y luego verificaban si el resultado era razonable. Se pudo observar que los estudiantes tenían un conocimiento declarativo que les permitía asociar la suma y la multiplicación como estrategias de solución. Es decir, si el estudiante concluía que la multiplicación era una estrategia de solución, entonces establecía que la suma también lo era y viceversa. Similarmente, mostraron poseer el mismo conocimiento declarativo con la resta y la división.

En resumen las estrategias que más utilizaron los estudiantes al resolver los problemas de manera individual son: uso de operaciones básicas y asociación con problemas previos. Se observó que frecuentemente los estudiantes deben integrar ambas estrategias para desarrollar un proceso de solución que le permita obtener la respuesta. Entre las operaciones básicas, la estrategia que más utilizaron fue la de sumas repetidas. Se puede concluir que el estudiante posee una caja de herramientas de solución de problemas y al enfrentarse a una situación, examina cuál de esas estrategias le permite solucionar el problema. Si al identifica una estrategia, ponerla a prueba e interpretar el resultado considera que el mismo no es razonable, entonces procede a identificar y poner a prueba otra estrategia y así continúa hasta que encuentra un resultado adecuado a la luz de los parámetros del problema. Esta conclusión es consistente con lo encontrado por Hernández Rodríguez (2002) quien concluyó que los estudiantes no elaboran un plan para resolver el problema, sino que inmediatamente inician un conjunto de operaciones con los datos que provee el problema a manera de tanteo y error.

Se observó que el uso de algunas estrategias ocurre de forma entrelazadas o interconectadas y no de forma independiente unas de otras. Es decir, cuando los estudiantes resuelven problemas conectan varias estrategias al unísono de forma tal que la unión de varias estrategias son las que permiten resolver el problema. Los estudiante tienen la necesidad de verificar si la respuesta es correcta y lo hacen utilizando un procedimiento diferente, no simplemente verificando los pasos que ejecutaron o las respeustas intermedias que encontraron para llegar a la respuesta.

Por otra parte, se evidenció que los estudiantes tienen capacidad para analizar y sintetizar problemas de matemáticas, los cuales son características del nivel estratégico según la taxonomía de Webb (2002). En particular se puede llegar a esta conclusión ya que cuando resolvieron el problema #1, la mayoría de los estudiantes fragmentaron el problema y realizaron cómputos por separados para los horas y para los minutos. Posteriormente, unieron los resultados para expresar la respuesta a la pregunta del problema. Además, en las entrevistas se pudo evidenciar la fluidez en la explicación de las diferentes formas en que resolvieron los problemas. Este hallazgo sugiere que los niños poseen mayor plasticidad en cuanto a la representación, la selección de estrategias y la forma de verificar que los adolescentes y los adultos; coincidiendo con lo expresado con Shoenfeld (1992) quien concluye que mientras más edad poseen los estudiantes más persistente son al emplear la estrategia inicial.

También se observó que durante el proceso de entrevista varios estudiantes parecían alcanzar un grado mayor de comprensión de las estrategias que habían utilizado. Es decir, que las preguntas formuladas por el investigador inducían que los estudiantes comprendieran mejor los procesos de solución que ellos habían utilizado. Similarmente, en algunos casos los estudiantes manifestaban estrategias de solución que no habían expresado o utilizado cuando resolvieron el problema. Es decir, las preguntas realizadas por el investigador durante el proceso de la entrevista promovían en los estudiantes un grado mayor de conceptualización y comprensión del problema. Esto puede explicarse mediante el concepto de zona de desarrollo próximo de Vygotskii (1967) quien definió esta zona como la distancia o diferencia entre el nivel que identifica lo que el estudiante puede realizar por sí solo y el nivel de desarrollo potencial, cual es el que identifica aquello que el estudiante sería capaz de realizar con la ayuda de un adulto o un compañero.

## Implicaciones educativas

En la presente investigación se evidenció que estudiantes de quinto grado pueden resolver problemas no típicos, contrario a la creencia, desafortunadamente muy generalizada, de que los estudiantes no lo pueden hacer. También se evidenció que aunque en ocasiones los estudiantes no logran hallar la respuesta al problema, sí logran desarrollar diversas estrategias de solución que les permiten reflexionar sobre sus conocimientos matemáticos, aspecto que enfatiza en la importancia que le debe asignar el maestro al proceso disminuyendo el énfasis en las respuestas correctas.

Los hallazgos sugieren la conveniencia de invertir el proceso de enseñanza de forma que el maestro comience la clase con la presentación de un problema que contenga subyacente los conceptos o destrezas que se pretenden desarrollar (English & Gainsburg, 2016). En este escenario el maestro debe asumir un rol de facilitador o moderador, de forma que mediante preguntas conduzca al descubrimiento de diferentes estrategias de solución del problema. Esta implicación educativa es consistente con lo expresado por Chapman (2006), quien indica que a través de los problemas los estudiantes pueden estudiar situaciones problemáticas de la vida diaria, motivarse a entender la importancia de conceptos matemáticos y desarrollar habilidades creativas y críticas.

Los resultados obtenidos apoyan la recomendación de Lash & Zawojewski (2007) en cuanto a que la investigación sobre solución de problemas debe enfocarse más en la interpretación, descripción, explicación y modelaje de los procesos utilizados por los estudiantes que en la descripción de las estrategias utilizadas por los estudiantes. La reflexión sobre estos modelos permitirá al maestro tener una mayor comprensión del desarrollo cognitivo de sus estudiantes y podrá ayudarle a encontrar mejores vías para guiar a sus estudiantes.

Por otra parte, conocer los modelos que él o sus compañeros utilizan puede ser beneficioso para los estudiantes. Ellos pueden comprender que en la construcción de su entendimiento del problema se puede pasar por momentos en que la situación puede parecer confusas pero que posteriormente se van aclarando con la reflexión sobre las mismas (Stein, Boaler, and Silver 2003). Aunque los estudiantes pueden valerse de los procedimientos previamente aprendidos en actividades similares, los problemas cotidianos no son entendidos inmediatamente. Se requiere de procesos de reflexión y parafraseo hasta que finalmente es comprendido. De manera similar, las estrategias aprendidas previamente no son directamente aplicables. Los procesos de interpretación requieren de ciclos iterativos de lectura, interpretación, representación, operación, prueba de la solución encontrada y convencimiento de que la respuesta es correcta (Wing DiMatteo, 2010).

Al igual que otros investigadores, consideramos que la resolución de problemas es un tema que se mantiene vigente hoy día (Ayuso, 2007; Jitendra, 2002; Millard, Oaks, & Sanders, 2002; Wing DiMatteo, 2010). En adición queremos recalcar la importancia de su valor formativo en los estudiantes de nivel elemental. English & Gainsburg (2016) enfatizan que la solución de problemas cotidianos y de la vida del trabajo requiere de un dominio más profundo y flexible del conocimiento básico.

Exponer a los estudiantes a resolver problemas promueve el desarrollo de destrezas de altos niveles de pensamiento y les provee un ambiente en donde pueden analizar matemáticamente una situación cotidiana. Además, cuando el estudiante analiza un problema del diario vivir puede interconectar conceptos de diferentes áreas de las matemáticas y de otras materias dando sentido y pertinencia a los aprendizajes escolares.

**Referencias**


Ayuso, M. (2007). *Uso de una estrategia cognitiva para la solución de problemas verbales algebraicos con estudiantes de escuela superior de bajo aprovechamiento en matemática*. Disertación doctoral no publicada, Universidad de Puerto Rico, Río Piedras.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics* 62, 211-230.

Creswell, J. W. (1994). *Research design: Qualitative & quantitative approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.

English, L. & Gainsbur, J. (2016). Problem solving in a 21st-Century mathematics curriculum. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 313-335). New York, NY: Taylor & Francis.

English, L., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. Ponencia presentada en el 11th International Congress on Mathmematical Education. Disponible en http://tsg.icme11.org/document/get/458.

Fraenkel, J. R., & Wallen, N. E. (1996). *How to design and evaluate research in education* (3rd ed.). San Francisco, CA: Mac Graw Hill.

García, J. (1992). Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas. *Aula de Innovación Educativa, 6*, 14-21.

Hernández Rodríguez, O. (2002). *Procesos cognoscitivos y metacognoscitivos en estudiantes universitarios puertorriqueños en la solución de problemas matemáticos no típicos*. Disertación doctoral no publicada, Universidad de Puerto Rico, Río Piedras.

Jitendra, A. (2002). Teaching student math problem – solving through graphic representations. *Teaching Exceptional Children, 34* (4), 34-38.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In *Second Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763 – 803). NCTM, Reston, Virginia.

Lester, F. K., & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H. Doerr, (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 501-518). Mathwah, NJ: Erlbaum.

Lubienski, St. T. (2000). Problem solving as a means toward mathematics for all: An exploratory look through a class lens. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31* (4), 454-482.

Lucca, N., & Berríos, R. (2003). *Investigación cualitativa en educación y ciencias sociales*. San Juan, Puerto Rico, Publicaciones Puertorriqueñas.

Maxwell, J. A. (1996). *Qualitative research design: An interactive approach*. Thousands Oaks, CA: Sage.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case applications in education: Revised and expanded from case study research in education*. San Francisco, CA: Jossey Bass.

Millard, E., Oaks, T., & Sanders, T. (2002). *Improving student achievement through inclusion of problem solving in the math curriculum*. Tesis de maestría, Saint Xavier University and Skylight Professional Development Field-Based Master's Program, Chicago, Illinois.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's*. Reston, VA: Author.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 334 – 370). New York, NY: McMillan.

Stein, M. K., Boaler, J., & Silver, E. A. (2003). Teaching mathematics through problem solving: Research perspective. In H. L. Schoen & R. I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6-12* (pp. 245-256). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vygotskii, L. (1967). *Thought and language*. Cambridge, MA: The Massachusetts Institute of Technology.

Webb, N. (2002). Depth of knowledge levels for four content area. Unpublised paper. Disponible en http://ossucurr.pbworks.com/w/file/fetch/49691156/Norm%20web%20dok%20by%20subject%20area.pdf

Wing DiMatteo, R. (2010). A model approach to problem solving. *Mathematics Teacher in the Middle School, 16*, 3, 132-135.

**Autores:**

***Eric Figueroa González***
Escuela Elemental de la Universidad de Puerto Rico
Recinto de Río Piedras

***Omar Hernández Rodríguez***
Departamento de Estudios Graduados
Facultad de Educación
Universidad de Puerto Rico
Recinto de Río Piedras