RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: UN REDISEÑO DE SITUACIÓN DESDE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Gabriel Meza Pereira, Héctor Silva-Crocci
Universidad de Santiago de Chile

Resumen: En la construcción y difusión de la trigonometría escolar se presenta sólo al triángulo rectángulo como argumento de construcción, así lo evidencian diversas investigaciones. Mediante un estudio epistemológico reportamos un rediseño de situación cuyo propósito es habilitar otro argumento de construcción en la enseñanza de las razones trigonométricas. Su configuración se sustenta con base en argumentos epistemológicos que suministran las líneas de investigación de Montiel (2005), Maldonado (2005) y Scholz (2014). Se presenta el análisis preliminar, y el análisis a priori del rediseño.

Razones trigonométricas, rediseño de situación, socioepistemología

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de la trigonometría, y en particular de las razones trigonométricas, se destaca sólo al triángulo rectángulo como argumento en su construcción. Así lo evidencian diversas líneas de investigación (Montiel, 2005; Maldonado, 2005; Scholz, 2014). En este sentido, reportamos un rediseño de situación cuyo propósito es habilitar otro argumento de construcción en la enseñanza de las razones trigonométricas, incorporando elementos geométricos de la circunferencia y de semejanza de triángulos.

Lo epistemológico de la situación se sitúa en el paradigma del programa de investigación socioepistemológico, y lo metodológico del análisis en la ingeniería didáctica propuesta por Artigue (1995). Esta metodología suministra fases que, en este proyecto, nos permite denotar un análisis epistemológico en el proceso de configuración del rediseño. En particular, en este documento, nos referiremos al análisis preliminar y al análisis a priori del rediseño.

REDISEÑO DE SITUACIÓN sobre las razones trigonométricas

Análisis preliminar del rediseño de situación

Diversas líneas de trabajo (Scholz, 2014; Vhons, 2006; Montiel, 2005) reportan las dificultades que genera el discurso Matemático Escolar (dME) en la construcción y difusión de las razones trigonométricas en el sistema escolar. En este sentido, se reconoce una presentación que privilegia al triángulo rectángulo por sobre otros argumentos en la construcción de esta noción.

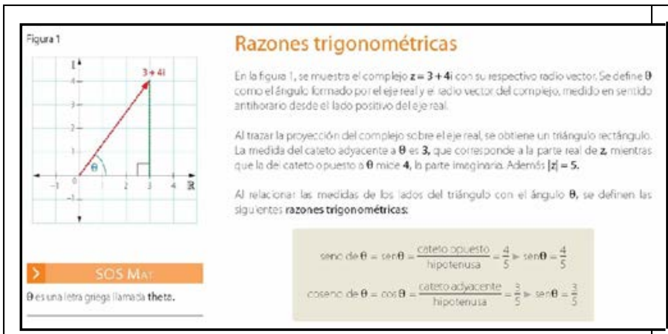
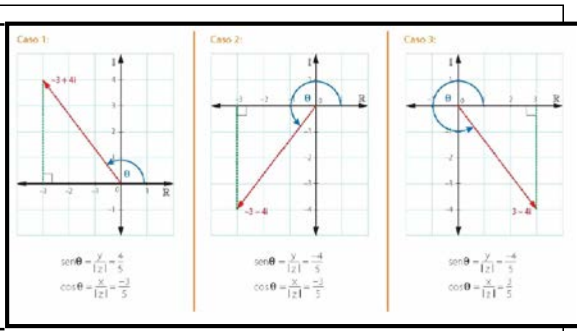
	

Figura 1: Las razones trigonométricas en un texto escolar (Blanco et al, 2009, p. 32)	Figura 2: Razones trigonométricas en ángulos mayores a 90° (Blanco et al, 2009, p. 34)

En la *figura 1* podemos constatar este hecho, la cual denota la presentación de las razones trigonométricas en un texto escolar chileno donde las definiciones se introducen a partir de un triángulo rectángulo en el marco de los números complejos. Entre los conflictos que podemos señalar, destacamos la confusión que se genera al definir las razones trigonométricas sólo para ángulos agudos. Luego se definen las razones de los demás ángulos (Figura 2) a pesar de que el ángulo de 360°-ϴ puede ser entendido como el ángulo -ϴ. Esta presentación genera, entre otros conflictos, el de la aritmetización de la trigonometría (Scholz, 2014). La aritmetización se entiende como la utilización de las razones trigonométricas para encontrar valores desconocidos en los lados de un triángulo rectángulo. En efecto, un estudiante podrá considerar a las razones trigonométricas como la división de los lados del triángulo, opacando otros argumentos de construcción para las razones trigonométricas, como la circunferencia y la semejanza de triángulos.

En la construcción del rediseño de situación se consideraron diferentes líneas de investigación. La primera de ellas (Montiel, 2006), nos brindó tres momentos asociados a la construcción social de lo trigonométrico. Cada momento tiene una práctica social, una práctica de referencia y un objeto matemático: la anticipación, la matematización de la astronomía, y las razones trigonométricas; la predicción, la matematización de la física, y las funciones trigonométricas; la formalización, la matematización de la transferencia del calor, y las series trigonométricas. Para el rediseño de situación consideramos el primer momento de la construcción social de lo trigonométrico.

La matematización de la astronomía es un contexto plausible para reconocer a la circunferencia como argumento de construcción de lo trigonométrico. En este sentido, una Realidad Macro No Manipulable (RMNM) da pie al uso de modelos micro en el contexto geométrico de la circunferencia y el uso de la semejanza de triángulos (Scholz, 2014; Vohns, 2006). En síntesis, los principales argumentos de construcción usados en el rediseño de la situación de aprendizaje son:

La circunferencia como lugar geométrico.

La semejanza de triángulos como justificación para el uso de modelos a escala en RMNM.

El uso del triángulo rectángulo para determinar los valores de las cuerdas en una circunferencia.

De este modo, podremos entender a las razones trigonométricas como un caso particular de la semejanza de triángulos en el contexto geométrico de la circunferencia.

Análisis a priori del rediseño de situación

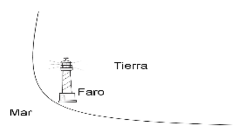
El rediseño de situación consta de tres fases que sintetizamos de la siguiente manera:

Fase 1: El objetivo de esta fase es reconocer cómo la circunferencia y la semejanza de triángulos permiten trabajar situaciones cuyo contexto no es manipulable. En la fase 1 se considera el uso de un modelo de RMNM, con la intención de generar la necesidad de construir un modelo micro que permita su manipulación. Esto hace emerger la noción de semejanza de triángulos para justificar el uso de razones y proporciones en la actividad. Es por ello que recreamos un modelo de RMNM. En este caso el problema trata de la distancia entre dos barcos, cuya única información conocida es la distancia de éstos con relación a un faro. Resulta relevante la situación macro puesto que para poder trabajar es necesario un modelo a escala, lo que lleva de manera inherente a la idea de semejanza de triángulos. Elemento fundamental para la construcción de las razones trigonométricas.

Fase 1: Un modelo micro de una situación macro

En el mar los capitanes de dos barcos que navegan en la niebla hablan por radio. No quieren estrellarse así que intercambian información. Ambos pueden ver el otro barco, pero no saben a qué distancia se encuentran. La única información con la que cuentan es que ambos están a la misma distancia de un faro, que es de 2kms.

Dibuja las posibles ubicaciones que pueden tener en el siguiente esquema:



¿Cuántas posibles posiciones existen?

Pensemos ahora que el faro está en una solitaria isla en medio del océano ¿Cómo pueden representarse las distintas posiciones que pueden tener los barcos? Dibuja tu respuesta.

¿Qué figuras geometricas puedes identificar?

¿Qué elemento de estas figuras debemos determinar para saber la distancia entre cada barco?

¿De qué depende esta distancia?

¿Cómo varía esta distancia?

Los barcos están lejanos uno del otro si:

Los barcos están cercanos uno del otro si

Establezcan una manera de encontrar la distancia entre los barcos. ¿Qué valores necesitan conocer?

Fase 2: En esta fase se pretende que usen la razón trigonométrica en un modelo de RMNM en el contexto geométrico de la circunferencia. El propósito es que se logre relacionar los distintos elementos del problema y determinen los datos necesarios para lograr inferir una posible respuesta. Hasta el momento no se ha dado un valor fijo para el ángulo del centro porque el argumento está en la semejanza, y como ésta logra transformar una RMNM en una realidad manipulable. En este sentido, las razones trigonométricas serán resignificadas como una herramienta de resolución cuando no se pueden hacer mediciones a grandes escalas.

Fase 2: La semejanza de triángulos como un método para resolver el problema

Sabemos que los barcos están a 2 km del faro y que el ángulo que forman con éste es de 50°.

Intentaremos determinar la distancia entre ellos. Para esta fase necesitar una regla graduada y un transportador.

Dibuja un esquema de la situación

Si tomamos el triángulo rectángulo que se forma con la mitad del triángulo isósceles, ¿qué elementos podemos identificar?

Para resolver usaremos la semejanza de triángulos. Construye un triángulo rectángulo pequeño con un ángulo de 25° para medir sus lados.

Ahora, mediante proporciones intenta calcular el valor del cateto que necesitamos para calcular la distancia. Con ello podrás encontrar la distancia que necesitamos.

¿Es posible realizar los cálculos más rápidamente si conociéramos anticipadamente el valor de la constante de proporción en un triángulo rectángulo con un ángulo de 25°?

Tomando como inicio el final de la actividad anterior, se comienza con la relación entre la cuerda y el ángulo. No obstante, es posible que algunos participantes utilicen las razones trigonométricas para encontrar lados desconocidos de triángulos. El trabajar con la RMNM no opaca lo geométrico como un argumento de construcción y hace más evidente la importancia de la semejanza.

Fase 3: En esta fase se enmarcan las razones trigonométricas en un contexto dinámico. Atendiendo a un paso necesario en la construcción social de lo trigonométrico, esto es el tránsito entre las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas, se construye una tabla trigonométrica. La importancia de esta fase radica en completar el primer momento de la construcción social apuntando hacia el segundo momento. Esta fase tiene por objetivo que los participantes usen las razones trigonométricas obtenidas por ellos mismos para resolver el problema.

Fase 3: Las razones trigonométricas para modelar una realidad no manipulable

Un grupo de campistas tiene un pequeño problema: se ha puesto a llover y sólo cuentan con una lona de 5 metros de largo para cubrirse. Además, esta lona debe estar enganchada al suelo en uno de sus extremos. Supondremos que en éste caso la lluvia cae sin intervención del viento, es decir lo hace en ángulo recto. Su dilema consiste en encontrar el ángulo adecuado para que la lona cubra la mayor distancia sin ser demasiado baja, como se muestra

Intentaremos ayudar a nuestros amigos campistas con algunos cálculos. Ellos piensan en ocho opciones, 25°, 30°, 35, 40°, 45°, 50°, 55° y 60° como ángulo de la lona.

¿Qué necesitaríamos saber para determinar la distancia que cubre dados estos ángulos?

Para ello construiremos nuestros triángulos rectos para luego usar la semejanza. Construye triángulos rectángulos con los ángulos anteriores.

Podemos realizar cálculos más rápidos utilizando la semejanza si conocemos anticipadamente el valor de la constante de proporción en cada triángulo. Para ello completa la siguiente tabla:

Ángulo	Cateto Adyacente dividido en la hipotenusa	Cateto opuesto dividido en la hipotenusa
30°		
45°		
50°		
60°		

El propósito es resignificar las razones trigonométricas como una herramienta que precisa de un contexto geométrico, el de la circunferencia y de la propiedad de semejanza de triángulos.

CONCLUSIONES

Reconocemos a este rediseño como el principal producto de nuestro proyecto de investigación (Meza, 2015). Pretendemos con esto rediseñar el dME de las razones trigonométricas incorporando los argumentos señalados, los cuales se encuentran opacados por el dME.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Blanco, M, Bozt, J, Calderón, F, Romero, L, Jiménez, L, Jammet, C, (2009). *Bicentenario, Educación Media 3° Matemática.* Santiago: Editorial Santillana.

Maldonado, E. (2005). Un análisis didáctico de la función trigonométrica. México: *Tesis de Maestría no publicada*, Cinvestav - IPN.

Meza, G. (2015). La resignificación de las razones trigonométricas: Un estudio desde la construcción social del conocimiento. Santiago: *Tesis de Magíster no publicada*, USACH.

Montiel, G. (2005). Análisis Socioepistemológico de la función trigonométrica. México: *Tesis Doctoral no publicada*. Cinvestav – IPN.

Scholz, O. (2014). Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo. México D.F.: *Tesis de Maestría no publicada*.I.P.N CICATA Legaria.

Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry - An empirical approach. *ZDM, Mathematics Education.* 38(6), 498 - 504.