Universidad de los Andes
Facultad de Educación

una empresa docente

7 de marzo de 2020

INVESTIGANDO SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

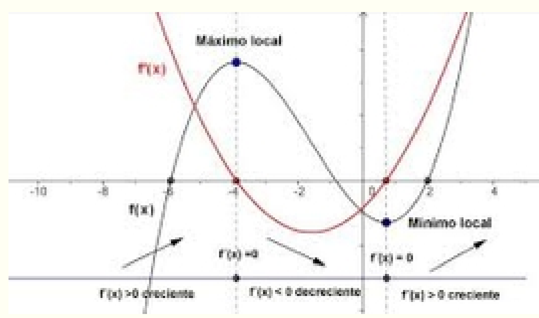
VNIVERSIDAD D SALAMANCA 800 AÑOS 1218 - 2018

Mª Teresa González Astudillo

1

INDICE

- ¿La optimización?
- Antecedentes
- Líneas de investigación
  - Línea histórico-curricular
  - Línea histórico-epistemológica
  - Enfoque ontosemiótico
  - Propuestas de enseñanza
- Reflexiones finales
- Cuestiones abiertas/líneas futuras



9/3/20 2

2

¿Qué es la optimización?

- Definición:

Optimizar es encontrar el mejor elemento respecto de un conjunto de posibles

- Jean Bernoulli (1667-1748)

  Sean A y B dos puntos en un plano vertical. Encontrar la curva que debe trazar un punto M partiendo de A hasta alcanzar B en el menor tiempo posible y bajo su propia gravedad. (Acta Eroditorum, 1696)

- Nuevos campos
  - Cálculo de variaciones
  - Control óptimo
  - Programación lineal
  - Programación no lineal (...)

¿Por qué la optimización? (Malaspina, 2012)

- Buscamos el mejor camino para ir de un lugar a otro; tratamos de hacer la mejor elección al hacer una compra; buscamos la mejor ubicación cuando vamos a un cine o a un teatro; tratamos de enseñar lo mejor posible; escogemos al mejor candidato en una elección; buscamos un equilibrio entre el menor riesgo y la mayor rentabilidad si hacemos una inversión monetaria; etc.
- En la naturaleza encontramos soluciones optimas de los animales. El caso mas conocido es el de las abejas.
- Buscamos el mejor ordenador, el mejor móvil, el mejor video juego, el mejor televisor,...

Preguntas

- ¿Qué investigaciones se han realizado?
- ¿Cuáles han sido las líneas de investigación principales?
- ¿Qué campos han abarcado?
- ¿A qué resultados se ha llegado?

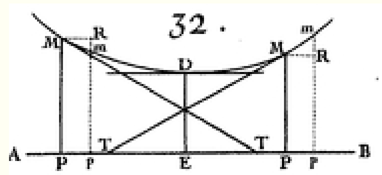
Antecedentes

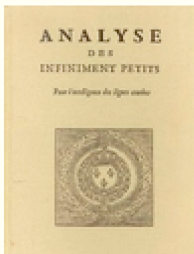
- Tesis doctoral (2002): *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis Matemático: Perspectiva histórica*.
  - Martín Kindt (1995): los métodos utilizados en la educación secundaria para el cálculo de máximos y mínimos eran puramente mecánicos y por lo tanto carentes de interés
  - Visión geométrica del cálculo de los antiguos matemáticos
  - "los puntos críticos aparece en todos los libros de texto, además fue uno de los motores que dio pie al nacimiento del cálculo diferencial, una de las aplicaciones más características de éste y una fuente de problemas y fenómenos que podrían caracterizar las situaciones didácticas planteadas en los libros de texto" (González, 2002).

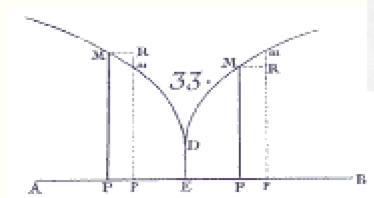
- CAMACHO, M. y GONZÁLEZ, A. (2001) Una aproximación a los problemas de optimización en los libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92. *Aula,* 10, pp. 137-152.
- COURTOIS, S. y DENIS, F. (1996) Functions, extremums et CABRI II. *Mathématique et Pédagogie.* 108, pp. 55-69.
- KINDT. M. (1995) Problemas antiguos y la calculadora gráfica. *Uno,* 4, pp. 41-52.
- TIKHOMIROV, V. (1986) *Stories about maxima and minima.* Rhode Island: American Mathematical Society.

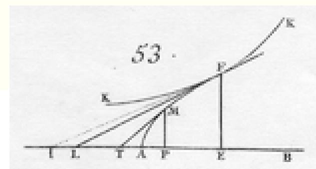
Línea histórico-curricular (el libro de L'Hôpital)

- González, M.T (2007) Clasificación de los puntos críticos según L'Hôpital. VII *Seminário Nacional de Historia da Matemática*. Guarapuava (Brasil).
- González, M.T. (2011) Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hôpital. *Epsilon: Revista de Educación Matemática*, 28(1), 83-97.









9/3/20 7

7

Línea histórico-curricular (libros de texto)

- González, M.T. (2011) La enseñanza del análisis matemático: de los libros de texto a las nuevas tecnologías. *Anais da XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)* Universidad Federal de Pernambuco, Recife (Brasil)
- González, M.T. (2011) Historia de la enseñanza del cálculo a través de los libros. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 13(3), pp. 415-137.
  - El primer libro de Análisis
    - lHOPITAL, G (1696) *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des* royale.
  - La época de las enciclopedias
    - BEZOUT, E. (1764) *Cours de mathématique*. Avignon : Imp. H. Offray.
  - Los primeros autores locales
    - VALLEJO, M (1819) *Compendio de Matemáticas Puras y Mixtas. Tomo I.*
  - Libros de autor
    - RÍOS, S. Y RODRÍGUEZ SAN JUAN, A. (1950) *Matemáticas. 6º curso de* 1950.
  - Libros de editorial
    - CÓLERA, J. y OLIVERA, M. J. (2009). *Matemáticas II.* Madrid: Grupo Anaya

9/3/20 8

8

Línea histórico-curricular (currículo)

- González, M.T (2004) Los problemas de optimización en la enseñanza secundaria en España. Un paseo a través de reformas, orientaciones y libros de texto *XIII Encontro de Investigaçao en educaçao Matemática*. Historia do Ensino de Matemática en Portugal. Sociedade Portuguesa de Ciencias da Educação pp. 33-58 Beja (Portugal).
  - **Los inicios en la enseñanza del Análisis Matemático: 1934-1967**. En este periodo se incluyen los planes correspondientes a los años 1934, 1938 y 1953.
  - **Introducción de la matemática moderna: 1967-1975**. Este periodo abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (B.U.P.) en 1975.
  - **Desarrollo del plan de estudios de B.U.P.:1975-1995**. Este periodo comprende desde la implantación del B.U.P. hasta el inicio de los nuevos Bachilleratos derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (L.O.G.S.E.).
  - **Una nueva orientación de la enseñanza de las matemáticas bajo las orientaciones de la L.O.G.S.E.: 1995-2004**. Corresponde al plan de estudios de 1992.

Línea histórico-curricular (método)

- González, M.T y Sierra, M. (2003) El método de investigación histórico en la enseñanza del Análisis Matemático *Actas del VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. pp. 109-130 Granada.
- González, M.T. y Sierra, M. (2004) Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (3), pp. 389-408.

Categorías, dimensiones y perfiles.

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema	Clásica	Aplicación	Explicación
	2	Descripciones teóricas	Formales	Formales-intuitivas	Intuitivas
	3	Símbolos utilizados en las tablas	Sin tablas	Con símbolos matemáticos	Con iconos
	4	Símbolos utilizados en las gráficas	Literal	Utilización de números	Elementos explicativos
	5	Tipos de expresiones simbólicas	Familias	Específicas	Variadas
Semántica	6	Fenomenología	Matemáticas	Realistas	Reales
	7	Tipos de descripciones	De conceptos	De reglas	De relaciones
	8	Tipos de tablas	Sin tablas	Descripción local	Cuadros de variación
	9	Tipos de gráficas	Ideogramas	Ábacos	Mensajes topológicos
	10	Significado de las expresiones simbólicas	Objeto	Regla	Proceso
Pragmático-didáctica	11	Función de los ejercicios	Rutinarios	Aplicación	Deducción
	12	Papel de las definiciones	Estructurales-teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
	13	Actividades relacionadas con las tablas	Sin tablas	Construcción	Interpretación/Construcción
	14	Actividades gráficas	Visualización	Construcción	Interpretación/Construcción
	15	Papel de las expresiones simbólicas	Ejemplificación	Escolar	Social
Socio-cultural	16	Influencia social y adaptación al currículo	No hay	Contexto intemporal	Contexto actual
	17	Influencias didácticas	Clásica	Adaptada al currículo	Novedosa
	18	Aplicación de las tablas	Sin tablas	Elemento auxiliar	Categoría de objeto
	19	Presentación de las gráficas (estática/dinámica)	Descontextualizada	Impresa	Nuevas tecnologías
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas	Clásicas	Sencillas	Complejas

Línea histórico-curricular (problemas)

- González, M.T. (2008) Los problemas de máximos y mínimos a lo largo de la historia. XIX *Encuentro de geometría y sus aplicaciones y VII Encuentro de Aritmética.* Bogotá (Colombia).
  - De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramos semejantes y situadas de manera semejante al construido a partir de la mitad de una recta, el (paralelogramo) mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto. (p. 98)
  - Dada una esfera con centro en A, y consideremos una de las cinco figuras de la que hablamos con superficie total equivalente a la de la esfera; digo que la esfera es la que encierra mayor volumen.
  - Dados dos puntos A y B que están del mismo lado de una línea l. Encuentra un punto D en l tal que la suma de las distancias de A a D y de D a B sea mínima.
  - En el plano de un triángulo, encuentra un punto tal que la suma de las distancias a los vértices del triángulo sea mínima.
  - Dividir el número 8 en dos partes, tales que el resultado de multiplicar el producto de las partes por la diferencia entre ellas, sea máximo.
  - Dividir el segmento AC por el punto E, de forma que el rectángulo AEC se haga máximo.
  - Se supone que un plano está descompuesto por una recta en dos semiplano, que son dos medios homogéneos, en los que las velocidades respectivas de la luz son v_1 y v_2. Encontrar el camino que debe seguir un rayo luminoso para ir en el menor tiempo posible (camino óptico) desde un punto A, situado en uno de los medios, a un punto B situado en el otro medio.
  - De todos los cilindros con la misma diagonal, el de mayor capacidad es aquel en el que la razón entre el radio de la base y la altura es raíz de 2.
  - Deseamos saber cuál es el mayor rectángulo que tiene 20 metros de perímetro.

11

Línea histórico-curricular (currículo Portugal)

- Ana Elisa Esteves Santiago (2008) Evoluçao historica dos problemas de optimizaçao e o seu tratamento no ensino secundário português nos séculos XX e XXI. Universidad de Salamanca.
  - 1º Período: Introdução das aplicações da derivada nos programas oficiais (1947-1962)
  - 2º Período: Introdução das Matemáticas Modernas em Portugal (1963-1985)
  - 3º Período: A Lei de Bases do Sistema Educativo (1986-1996)
  - 4º Período: Introdução da calculadora gráfica nos programas oficiais (1997-2001)
- Esteves, A. Sierra, M. **y** González, M.T (2007) *Os problemas de optimização no ensino secundário ao longo do século XX e XXI: análise dos programas oficiais*. En Ponte, J. Serrazina, L. Guerreiro, A. Ribeiro, A. Veia, C. *Currículo e Desenvolvimento Curricular. Desafios para a Educação Matemática*. Algarve (Portugal).

12

Línea histórico curricular (Análisis de los problemas)

- Esteves, A.; Sierra, M. y González, M.T (2008) Modelo para análise dos problemas de optimização nos manuais escolares do ensino secundário ao longo do século XX e XXI. En Menezes, L. Santos, L. Gomes, H. Y Rodrigues, C. Avaliação em matemática, problemas e desafios. Secção de Educação Matemática da Sociedades Portuguesa de Ciências da Educação, pp. 181-193.
- Tipo de problema: el tipo de problema, el contexto al que hacía referencia, el tipo de función a optimizar, si además del enunciado se incluían o no esquemas o dibujos auxiliares, el tipo de datos que se proporcionaban y el tipo del enunciado.

Características dos problemas de optimização

Variáveis \ Problemas		SP 1	PF 5	SP 3	PF 1	SP 6	PF 4	PF 6	PF 7	PF 8	PF 9	SP 4	SP 5	PF 2	PF 3	SP 2	SP 7	SP 8	SP 9
Tipo Problema	TEP	X	X													X			
	TER				X														
	TE			X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X
	TD																		
Contexto do problema	COM	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X								
	CGA																		
	CAR											X	X	X	X				
	CRM															X	X	X	X
	CRF																		
	CRE																		
Função a optimizar	OD																		
	OA	X	X	X	X	X		X	X		X					X	X		X
	OPE						X												
	OV									X								X	
	OPR											X			X				
	OS												X	X					
	OT																		
Esquemas auxiliares	FSE	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	FPS																		
	FFD																		
Tipo de dados	DN	X	X	X	X		X	X	X	X				X	X			X	
	DG					X					X	X	X			X	X		X
Tipo de enunciado	ENS	X	X		X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X
	ENE			X		X											X	X	
Função auxiliar	AE			X			X	X	X		X	X	X	X	X	X	X		X
	AI	X	X		X	X				X								X	
Noções	NTP	X	X			X				X									

Línea histórico-curricular (un problema)

- Esteves, A. y González, M.T. (2009) Um problema de optimização: de Euclides a actualidade. *XIII SEIEM* Santander.
- Santiago, A.E y González, M.T. (2013) Entre Euclides e a actualidade: um problema de optimizaçao. I*nvestigaçao em Educação Matemática. Raciocinío matemático. EIEM2013*. Sociedade Portuguesa de Investigaçao em Educaçao Matemática. Covilha, Portugal, pp. 457-474.
  - *De todos os paralelogramos aplicados a uma mesma recta e com os defeitos1 de figuras paralelogramas semelhantes à figura descrita sobre a metade da dita recta, e semelhantemente postas, o máximo é aquele que é aplicado à metade da mesma recta, e é semelhante à figura paralelograma que falta* (Heath, 1956, Vol. II, p. 257).

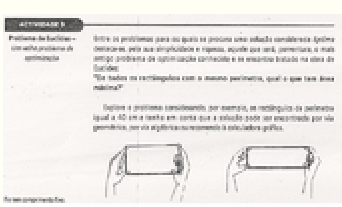


Fig. 1 – Enunciado (Jorge e outros, 1997, vol. 2, p. 232)

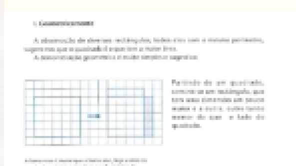


Fig. 2 – Resolução geométrica (Jorge e outros, 1997, vol. 2, p. 233)

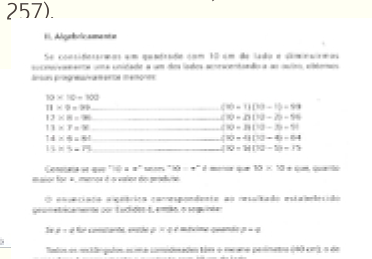


Fig. 3 – Resolução algébrica (Jorge e outros, 1997, vol. 2, p. 233)

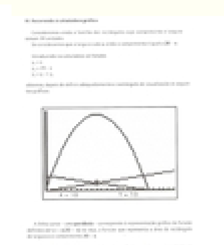


Fig. 4 – Resolução recorrendo à calculadora gráfica (Jorge e outros, 1997, vol. 2, p. 234)

Línea histórico-curricular (libros de texto portugueses)

- Santiago, A. y González, M.T. (2015) Maximum and minimum: Approaches to these concepts in Portuguese textbooks. In Bjarnadóttir, K., Furinghetti, F., Prytz, J. & Schubring, G. (Eds.) (2015). "Dig where you *stand" 3. Proceedings of the third International Conference on the History of Mathematics Education, pp. 377-387.*
- Augusto Lópes "Compendio de Álgebra" 1955 y 1958

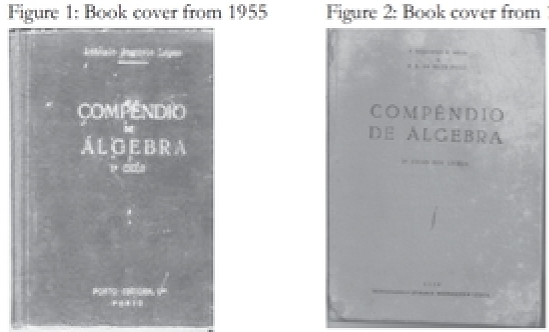
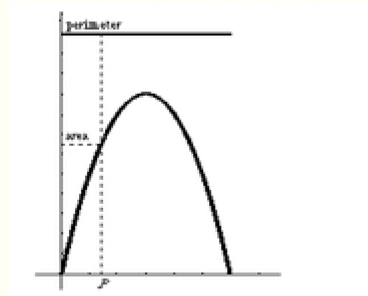


Figure 1: Book cover from 1955 Figure 2: Book cover from 1958

Línea histórico epistemológica (aplicación al aula)

- Furinghetti, F. (2004) History and mathematics education: A look around de world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 1-19.
- Paola, D., (2004) Software di geometria dinamica per un sensato approccio alla dimostrazione in geometria: un esempio di Laboratorio di Matematica. *Progetto Alice 5*(13), 103-121.
  - ¿Cómo varía el área de un rectángulo, cuando el perímetro es constante? Toma, por ejemplo, 12 como valor del perímetro (p. 13).
  - Problema de Fermat: Dividir un segmento AC en dos partes de forma que el producto de sus longitudes sea máximo:
- Furinghetti propone este problema, entre otros como ejemplo de embodied cognition, es decir, en lugar de una observación pasiva, la realidad es construida por el observador, en este caso, el alumno utilizando para ello formas culturales no arbitrarias y que fundamentan una experiencia corporal.

Primero construyeron un segmento HK de longitud 6, el semiperímetro del rectángulo, Luego tomaron un punto P en ese segmento (HP y PK representan las longitudes de los lados del rectángulo de perímetro 12). Después cogieron un segmento AP congruente con el segmento HP en una recta y el segmento PB congruente con el segmento PK en una recta perpendicular a la anterior. Se completó la figura para obtener un rectángulo de perímetro 12. En esta fase el alumno se da cuenta que si mueve el punto P en el segmento HK, el rectángulo se modifica. Después se dieron cuenta de que el área dependía de la longitud AP. Esta dependencia se puede ver mejor mediante una hoja de cálculo. Algunos alumnos fueron capaces de establecer conjeturas en cuanto a la tendencia de la variación. Al final la regla se pudo ver utilizando el comando traza de CABRI.



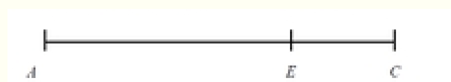
Por ello los alumnos concluyeron que el área es máxima cuando los dos lados son iguales, es decir, el rectángulo es un cuadrado. Para ellos fue difícil dar una explicación de este hecho, pero un grupo de alumnos lo intentó con la siguiente explicación: "Mire, profesor, si apunto a la mitad y luego muevo un poco a la derecha el área disminuye".

Esto en realidad no es una explicación, pero le dio pie al profesor para pasar de la fase exclusivamente perceptiva a la siguiente fase en la que se usaban símbolos para resolver el problema. Y dijo: "¿Cómo trasladamos a símbolos mover hacia la izquierda un poquito o mover hacia la derecha un poquito desde el punto medio? La respuesta es 3-x y 3+x. Entonces el área del rectángulo es (3-x)(3+x)=9-x^2." Por tanto el área máxima se alcanza cuando x es cero.

9/3/20 17

17

1. Sea A un término relacionado con el problema
2. La cantidad máxima o mínima está expresada en términos que contienen sólo potencias de A.
3. Se sustituye A por A+E, y el máximo o mínimo queda entonces expresado en términos de potencias de A y E.
4. Las dos expresiones del máximo o mínimo se hacen "adiguales", lo que significa algo así como tan aproximadamente iguales como sea posible.
5. Los términos comunes se eliminan.
6. Se dividen todos los términos por una misma potencia de E, de manera que el menor de los términos resultantes no contenga a E.
7. Se ignoran los términos que aún contienen a E
8. Los restos se hacen iguales. Dividir el segmento AC por el punto E, de forma que el rectángulo AEC se haga máximo.



Designemos al segmento AC con B y llamemos A, a una parte de B, luego la parte sobrante (de B) será B-A y el rectángulo formado a partir de las dos secciones será BA-A^2, de aquí debe hallarse el valor máximo. Si ahora ponemos para una nueva parte de B, A+E, entonces la sobrante será B-A-E y el rectángulo formado a partir de ambos valdrá

$$B\cdot A-A^2+B\cdot E-2A\cdot E-E^2,$$

Que comparamos con el rectángulo anterior

$$B\cdot A-A^2.$$

Suprimiendo los términos comunes se obtiene

$$B\cdot E\approx 2A\cdot E+E^2$$

Y dividiendo por E queda

$$B\approx 2A+E$$

Suprimimos E y resulta

$$B\approx 2A$$

Luego la solución del problema consiste en dividir B en dos mitades.

9/3/20 18

18

Línea histórico-epistemológica (socioepistemología)

- Castañeda, A. (2002) Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. RELIME, 5(1), 27,44.
- Castañeda, A. (2006) Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. *RELIME, 9*(2), pp. 253-265.
- L'Hopital plantea el concepto de punto máximo desde tres puntos de vista.
  - En el primero lo caracteriza en función del tamaño de la ordenada, siendo el punto máximo aquel en el que la ordenada es mayor.
  - La segunda se basa en el cambio de signo de las diferencias en un entorno cercano al punto.
  - El tercero se basa en la posición de la tangente a la curva en ese punto que debe ser horizontal, en cualquiera de los dos casos se recurre a un argumento geométrico.
- En el libro de Agnesi se encuentran cuatro caracterizaciones de estos puntos.
  - La primera de ellas es una caracterización dinámica de una curva como un reconocimiento variacional de los puntos de una curva en los que el máximo se alcanza cuando la sucesión de ordenadas llega al valor mayor.
  - En la segunda se considera la posición de la tangente de la misma forma que hizo L'Hopital, es decir, cuando la tangente es cero o la subtangente infinito.
  - Por otro lado comparando el triángulo característico a medida que el punto se acerca al máximo se observa que sus magnitudes cada vez van disminuyendo más hasta que se hacen cero lo que constituye una propiedad de las diferencias.
  - En la cuarta caracterización se observa que las diferencias en el punto han de ser cero por lo que se definen por medio de una propiedad analítica.

9/3/20 19

19

El enfoque ontosemiótico (configuración epistémica y cognitiva)

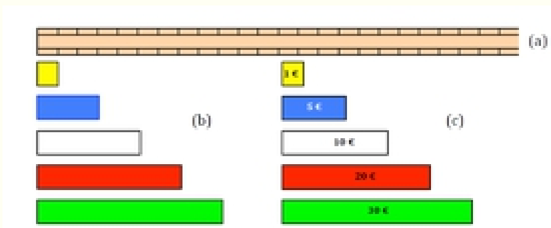
- Malaspina, U. (2008) "Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática" Tesis doctoral
- Malaspina, U. (2007) Intuición, rigor y problemas de optimización. *RELIME, 10*(3), pp. 365-339.
  - Problema de optimización: "aquel cuyo objetivo fundamental es la obtención de un valor máximo o mínimo de una determinada variable teniendo en cuenta las restricciones del caso" (p. 370)
  - *¿En qué medida la formalización y el rigor que se inducen en las clases de matemáticas en los primeros ciclos universitarios, particularmente en un curso de cálculo diferencial, potencian la intuición de los estudiantes al resolver problemas de optimización? (p. 386)*
- Hallar en el plano cartesiano cuatro puntos de coordenadas cartesianas enteras, de modo que sean los vértices de un paralelogramo cuyo perímetro sea 28 y cuya área sea máxima
- Llamamos paso aplicado a un número, cuando se le multiplica por dos o se le disminuye en 3 unidades. Halla el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11. (Malaspina, 2007, p. 375)

9/3/20 20

20

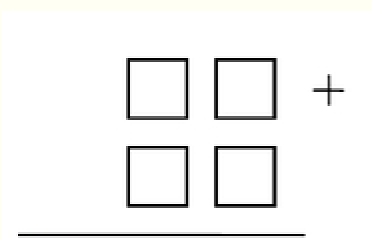
Enfoque ontosemiótico (idoneidad didáctica)

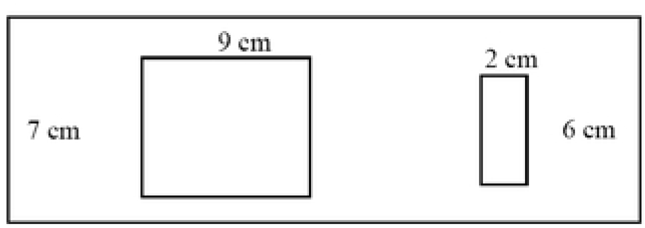
- Lacasta, E., Malaspina, U., Pascual, J.R. y Wilhelmi, M.R. (2009) Análisis a priori de una situación de optimización en segundo de educación primaria. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (eds.) *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 259-271). Santander: SEIEM.
- "Se ha colocado para una boda una alfombra estrecha que está representada por esta cartulina. Para que no se manche la alfombra, hay que cubrirla hasta el momento de la celebración. Para ello se dispone de lonas de la misma anchura que la alfombra, de distintos tamaños: como éstas (se muestran los rectángulos de colores y se cuelgan en un lugar visible de la clase). Estas lonas no se pueden cortar" (p. 264).



Enfoque ontosemiótico (aplicación a la educación primaria)

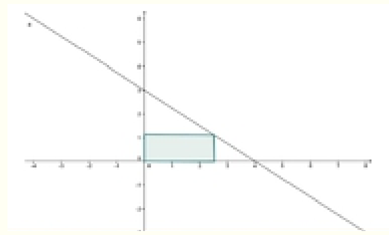
- Malaspina, U. (2012) Resolución de problemas y estímulo de pensamiento optimizador en la educación básica. *Tópicos educacionais*, Recife 2, pp. 176-200.
- Se plantean situaciones en las que hay que buscar dos números de dos cifras de tal manera que su suma sea máxima, buscar números de movimientos mínimos para cambiar de posición ciertos objetos (el caso de las torres de Hanoi), combinar trozos de papel para que la superficie sea máxima,...





Enfoque ontosemiótico (enseñanza universitaria)

- Baccelli, S.G. Anchorena, S., Moler, E.G. y Aznar, M.A.G. (2013) Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *Números*, 84, pp. 99-113.
  - P1: Determinar la mayor área que puede encerrar un rombo cuyo lado mide 1 metro. (Recordar que un rombo tiene todos sus lados congruentes y su área es la mitad del producto de sus diagonales).
  - P2: Determinar las dimensiones que debe tener un rectángulo con dos de sus lados sobre los ejes X e Y, y el vértice opuesto al origen de coordenadas sobre la recta que pasa por (0,3) y (4,0), como el que se muestra en la figura, para que su área sea máxima.



23

Propuesta de enseñanza (tipos de representación)

- Villegas, J.L., Castro, E. y Gutiérrez, J. (2009) Representaciones en resolución de problemas: un estudio de caso con problemas de optimización. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 279-308.
  - P1: A un lado de un río recto de 1 km de anchura hay una central eléctrica, y al otro lado, 5 km corriente arriba una factoría; su dueño desea tender un cable desde la central eléctrica hasta la factoría, el sabe que tender el cable por tierra cuesta 3 euros por metro y tenderlo por agua cuesta 5 euros por metro. ¿Cuál será la trayectoria del tendido que le resulta más económica? Si el cable por tierra tiene el mismo precio que el cable por agua ¿cuál será la trayectoria?
  - P2: Se desea construir una ventana rectangular coronada por un semicírculo (el ancho del rectángulo ha de ser igual al diámetro del semicírculo). Cuál es la ventana que admitirá la mayor cantidad de luz posible, si su perímetro ha de ser fijo?
  - P3: Un espejo rectangular de dimensiones 80 y 90 cm. Se rompe por una esquina en línea recta. De los dos trozos que quedan, el menor tiene una forma de triángulo rectángulo de catetos 10 y 12 cm. Correspondientes, respectivamente, a las dimensiones menor y mayor del espejo ¿Cuál es el espejo rectangular más grande que se puede obtener del trozo mayor?

24

Propuestas de enseñanza (transición de la secundaria a la universidad)

- Fonseca, C. (2011) Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática, 23*(1), 97-121.
- *Tenéis que diseñar* un acueducto para obtener el mayor caudal posible a partir de una lámina rectangular metálica (p. 113)
- Un ingeniero está diseñando un acueducto y tiene que usar láminas rectangulares de metal de 20 m de ancho por 15 m de largo. Quiere doblar las láminas a lo largo para formar dos ángulos rectos. ¿Cómo se debe efectuar este doblaje de modo que el caudal sea máximo? (p. 114).

9/3/20 25

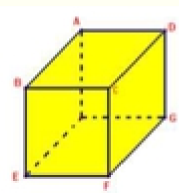
25

Uso de las nuevas tecnologías (i-Actividad)

- Codina, A., Cañadas, M.C. y Castro, E. (2010). Diseño de una e-actividad orientada a la resolución de problemas. En *I Encontro Internacional Tic e EducaÇão. InovaÇão curricular com TIC.* Lisboa: Instituto de EducaÇão da Universidade de Lisboa
- Codina, A., Cañadas, M.C. y Castro, E. (2015) La resolución de problemas matemáticos a través del análisis secuencial de procesos. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 13*(1), 73-110.

Artz y Armour-Thomas (1990, 1992): lectura, análisis, exploración, planificación, implementación, verificación, observación y conversación.

Los puntos A y F son los vértices de una habitación con las siguientes dimensiones. $AB=4m$. $BC=3m$ y $BE=2m$. Una mosca "sin alas" está sobre el punto A situado en el lado BA. ¿Qué camino debe seguir la mosca para recorrer la menor distancia si desea llegar al punto F?

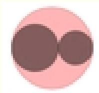


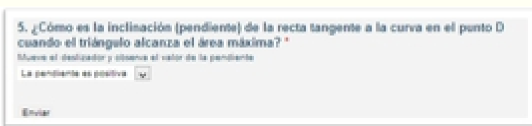
9/3/20 26

26

Uso de las nuevas tecnologías (secuencia didáctica)

- García, G.A. y Rojas, A. H. (2012) *Relación entre la solución de problemas de optimización y la variación en la pendiente de la recta tangente a una función a partir de la visualización en geometría dinámica*. Trabajo de fin de grado. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
  - Maximizar el área de un triángulo isósceles de perímetro dado
  - *Dada una circunferencia de radio 2.5cm se divide el diámetro en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias inscritas. Hallar el área máxima de la superficie clara (p. 17).*




5. ¿Cómo es la inclinación (pendiente) de la recta tangente a la curva en el punto D cuando el triángulo alcanza el área máxima? *

Mueve el deslizador y observe el valor de la pendiente

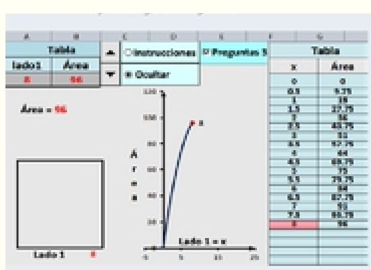
La pendiente es positiva

Enviar

El software permite que el alumno manipulen las variables de los problemas y conjeturar los posibles resultados
El dinamismo del software ayuda a que los alumnos entiendan el concepto de cambio
Los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de los enunciados
Fueron capaces de establecer la relación entre los puntos y las pendientes de las rectas tangentes
Los alumnos tienden a dar por finalizada la resolución de los problemas cuando encuentran la solución.

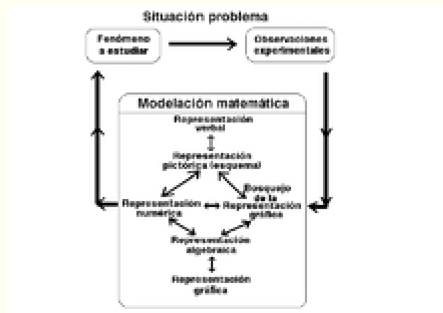
Uso de las nuevas tecnologías (Excel)

- Díaz, J. L. (2014) Simulación y modelación de problemas de optimización del cálculo diferencial con la hoja de cálculo. *UNISON/Epistemus*, 16, 48-54.
  - Un granjero desea construir un gallinero rectangular para la crianza de gallinas. Tiene 40 metros de malla para gallinero y desea utilizar todo el material disponible. ¿Cuáles deben de ser las dimensiones del gallinero de mayor área posible que se puede construir?
  - Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en un cono circular recto de altura 12 m y radio de la base de 3 m.
  - Determinar los cuadrados de las esquinas que se deben de cortar, de una lámina cuadrada de 13 cm de lado para construir una caja de base cuadrada, sin tapa que tenga volumen máximo.



Uso de las nuevas tecnologías

- Hitt, F. (2014) Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo: la derivada en ambientes TICE. Departamento de matemáticas. Universidad de Quebec.
  - Dificultades para entender el enunciado de los problemas.
  - El concepto de función y la evaluación de elementos del dominio de la función. Por ejemplo, qué significa evaluar f(x+h),
  - Problemas entre la equivalencia de notaciones $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ y $\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$
  - Problemas entre la equivalencia de notaciones $\lim_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ y $\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$
  - Problemas para entender que $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ representa una función, la función derivada.

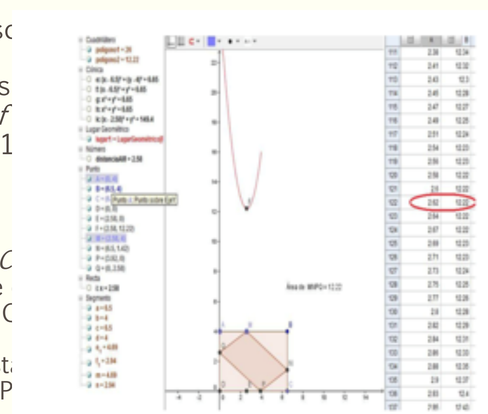


29

Uso de las nuevas tecnologías (formación de profesores)

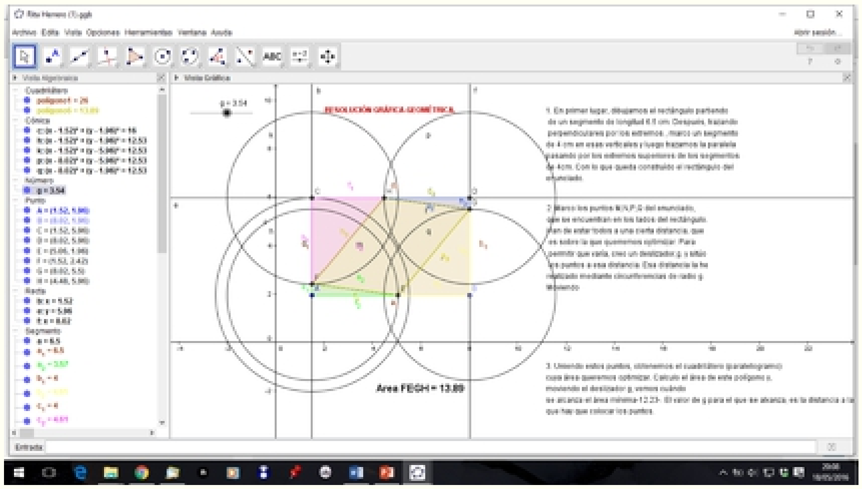
Camacho, M. Moreno, M.M. González, M.T. y Alfonso C. (2016) Problem solving with digital tools for pre-service secondary school teachers: what type of tas should be used? *ICME 13 (International Congress of Mathematics Education).* Hamburg. Germany. 24-31 julio

- TAREA 1. En un libro de texto se encuentra el siguiente problema: "Sea ABCD un rectángulo. El segmento *AB* tiene una longitud de 6,5 cm, y el *BC* tiene una longitud de 4 cm. Sea M un punto sobre segmento *AB*, N un punto sobre *BC*, P sobre *CD* y Q es un punto sobre el segmento *DA*. Se cumple además que *AM=BN=CP= DQ*. ¿Dónde debería est localizado el punto M para que el cuadrilátero MNP tenga área mínima? ¿Podrías buscar diferentes formas de resolver la tarea que te ayudaran a presentar a tus futuros alumnos de Secundaria?



30

Nuevas producciones …



Reflexiones finales

- Gran parte de la investigación realizada está escrita en castellano.
- Lo enfoques ontonsemiótico, histórico y el uso de las nuevas tecnologías en el aula han sido fundamentalmente los centros de interés.
- Se ha producido un intento de recuperación de los problemas históricos relativos a la optimización, pero también se han diseñado ad hoc problemas para las diferentes etapas educativas como educación primaria o las enseñanza técnicas (ingeniería).
- La disponibilidad del software de geometría dinámica ha permitido ligar cuestiones de índole analítico-algebraicas con aspectos geométricos
- Un centro de interés bastante recurrente ha sido el relativo a los diferentes sistemas de representación y a la traducción entre ellos.

Reflexiones finales

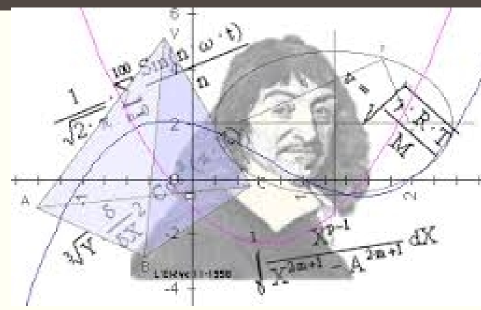
- En cuanto a la enseñanza se han planteado tanto tareas muy dirigidas como algunas muy abiertas.
- Se busca la aplicabilidad de los contenidos, por ejemplo recurriendo a situaciones reales o bien recogida de datos reales.
- También se ha procurado abordar la resolución de estos problemas desde diferentes puntos de vista.
- Se han clasificado los problemas de optimización según diferentes aspectos.
- Se han abordado cuestiones relativas tanto a la enseñanza como la aprendizaje y a la formación de profesores.
- Se ha realizado una amplia investigación acerca de libros de texto pero quizás precisa ser actualizada y profundizada incluyendo los libros de texto más actuales.

33

Algunas cuestiones abiertas/Posibles líneas futuras

- El conocimiento del profesor sobre optimización.
- Análisis de la construcción del conocimiento cuando los alumnos abordan situaciones de optimización. Se ha dado una visión estática pero falta la visión más dinámica.
- Cuestiones relativas a los procesos de visualización geométrica.
- Dinámica del aula cuando se introducen las nuevas tecnologías. Interrelación entre los diferentes agentes e instrumentos.
- Cuestiones relativas a la práctica docente.
- Falta una caracterización de los problemas de optimización de forma estructural, al estilo de las clasificaciones que se han hecho sobre los problemas de adición y sustracción, o los problemas de probabilidad condicional.
- (...)

34



MUCHAS GRACIAS

maite@usal.es

35