ESTUDIO DE CASO DE UN PROFESOR UNIVERSITARIO EN LA UNIDAD DE SUCESIONES

Paula Verdugo
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: Se presenta un estudio de casos sobre el ETM idóneo de la enseñanza universitaria enfocados en la unidad de sucesiones. Dichos casos se han extraído de 13 grabaciones de clases. Los principales resultados evidencian la ausencia del teorema del enlace (caracterización del límite mediante sucesiones), y el constante uso de herramientas provenientes de las funciones de una variable real para trabajar problemas discretos.

ETM idóneo, sucesiones, discreto-continuo

INTRODUCCIÓN

En el marco de nuestra tesis doctoral sobre la transición enseñanza secundaria universitaria, en el ámbito del análisis, hemos decidido estudiar las sucesiones debido a que es un objeto de estudio tanto de enseñanza secundaria como de enseñanza universitaria, teniendo presencia en textos escolares, programas de estudios escolares y universitarios, lo cual nos permite realizar un estudio en ambos niveles educativos. En este trabajo nos enfocamos en mostrar los resultados que hemos obtenido de la enseñanza universitaria, nos centramos en analizar la enseñanza del profesor en la educación universitaria, con el propósito de identificar el uso de ciertos contenidos relacionados al ámbito de las sucesiones, los cuales detallamos más adelante.

METODOLOGÍA

El trabajo que se presenta es de carácter cualitativo, en donde se muestra y analiza el estudio del caso (Stake, 1999) de la enseñanza de un profesor universitario, bajo la mirada del ETM idóneo. Para ello, se ha extraído una muestra de 13 grabaciones de clases, y el material que documentamos aquí fue recogido de una de esas grabaciones de clases. El docente filmado posee Grado de Doctor en Matemática, con 11 años de experiencia en docencia. A dicho profesor lo denominaremos como profesor universitario 1 "PU1". El curso grabado corresponde a un curso de cálculo II de tercer semestre de universidad para la carrera de ingeniería civil informática. Se ha escogido la clase de PU1 debido a la flexibilidad que hemos observado en este docente para realizar, sin mayores cuestionamientos, explicaciones de lo discreto por medio de lo continuo en la unidad de sucesiones. Para analizar el material escogido nos focalizamos en las explicaciones dadas por el docente, relativas a las herramientas provenientes del análisis de objetos continuos, y analizaremos cuáles son las posibles causas que llevan a PU1 a utilizar y/o cambiar hacia estas explicaciones para abordar problemas de sucesiones.

Espacio de Trabajo Matemático

El marco teórico considera la noción del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2011), el cual tiene por objetivo principal favorecer el funcionamiento del trabajo matemático en un contexto educativo (Kuzniak, 2014). Para definir el ETM se introducen dos planos. El plano epistemológico y el plano cognitivo estructuran el ETM apoyando la comprensión tanto del modelo del trabajo matemático que se genera en éste, como también la articulación entre sus planos mediante distintas génesis (Kuzniak, & Richard, 2014). El plano epistemológico permite estructurar la organización matemática del ETM a través del dominio matemático en estudio. Consiste en tres componentes características de la actividad matemática, las cuales están en interacción en un contexto determinado. Estas componentes son: "representamen", "herramienta" (materiales o intelectuales) y un "referencial teórico" basado en definiciones y propiedades (Kuzniak, 2011). Mientras que el plano cognitivo estructura el ETM desde el punto de vista de la puesta en práctica del individuo. En este sentido, la visualización, la construcción y la prueba juegan un rol clave.

Además, el Espacio de Trabajo Matemático es profundizado en los siguientes tres ETM (Kuzniak, 2011), de las cuales consideraremos en este escrito: ETM de Referencia. La organización esperada de este espacio de trabajo es definido de manera ideal solamente sobre la base de criterios matemáticos. ETM Idóneo. El ETM de referencia debe ser acondicionado y organizado para volverse un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución dada con una función definida". ETM Personal. El ETM idóneo debe ser utilizado por los estudiantes y también por sus profesores. Cada uno se apropia y lo ocupa con sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas. Este ETM es lo que llamamos un ETM personal.

ESTUDIO ETM IDÓNEO DE PU1

A continuación mostramos el estudio del ETM idóneo de PU1. Para ello, tal como se explicó en la metodología, el material fue extraído de la grabación de una clase que el profesor PU1 hizo sobre los criterios de convergencia de series. Escogimos esta clase debido a que PU1 analiza la convergencia de algunas sucesiones, y particularmente porque para ello, bifurca hacia un *referencial continuo*, tal como mencionado antes.

En este contexto, durante la clase, PU1 analizando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ por el criterio del cociente, luego de algunas operaciones, las cuales consisten en aplicar este criterio, llega a que $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$, y señala que sería bueno ver su gráfica. Para este efecto, PU1 dice que "se podría pensar $\frac{2}{n+1}$ como una función continua, la cual podemos graficar". Dibuja entonces el gráfico y a partir de éste afirma que "claramente los valores de esta función van decreciendo", "se hacen cada vez más pequeños", de lo cual se desprende el valor del límite antes mencionado.

Se puede observar que PU1, estando en un *referencial de sucesiones* (discreto), bifurca su procedimiento hacia un *referencial de funciones* (continuo), verificando que esta sucesión es una "función decreciente". En términos del ETM se puede apreciar que se activa el polo del referencial discreto para bifurcar hacia uno continuo, y devolverse así hacia el primero.

En lo anterior, se puede observar que el docente trabaja dentro de dos paradigmas del análisis (Montoya Delgadillo & Vivier, 2016) que cohabitan: el AC (análisis calculatorio), dado que utiliza reglas del cálculo explícitas como el criterio del cociente, y en menor grado el paradigma AG (análisis geométrico), dado que explica gráficamente que la sucesión obtenida por este criterio es decreciente y convergente a cero.

Durante la misma clase, más adelante, PU1 analiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, utilizando el criterio de la raíz n-ésima, lo cual lleva a calcular el límite $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n!}}$. El docente destaca que este criterio no sería tan adecuado como el criterio del cociente para analizar la convergencia de esta serie, dado que el límite anterior es difícil de calcular. Sin embargo, igualmente PU1 pregunta a los estudiantes cuánto vale ese límite, y dice que para calcularlo es mejor calcular primero uno más fácil, a saber $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$. A continuación verifica que el límite anterior vale 1 evaluando numéricamente para n=1, 2, 3, 10, 100, 1000, viendo que la raíz n-ésima de *n* se acerca a 1. Más adelante, un estudiante pregunta cómo se demuestra que el límite vale 1. Observemos:

1. PU1: […] Lo que voy a hacer son bajo muchos supuestos ah, voy a hacer algunos cálculos, olvidándome momentáneamente de que es lo que yo necesito para hacer esos cálculos, y después me preocupo de eso […]

PU1 supone varias cosas, entre ellas, que el límite existe, que es un número real, que si el límite existe debiera ser no negativo, mayor o igual a cero.

2. PU1 : […] si este límite existe debiera ser no negativo, debiera ser un número mayor o igual que cero, porque esta función estoy suponiendo que x es, se va a más infinito, o sea x va a llegar un momento en que siempre es positivo, y por lo tanto esto no va a ser, no puede ser negativo el resultado, punto 1. Punto 2, […] como esto es positivo […] Entonces como este número es no negativo, positivo de hecho estrictamente, puedo tomar logaritmo natural. […] Si puedo sacarlo afuera, puedo hacerlo porque la función logaritmo natural es continua, ok?

Lo que en definitiva el profesor pretende asegurar es: primero, que el límite es estrictamente positivo para poder aplicar logaritmo natural; segundo, que el logaritmo y el límite se pueden intercambiar, debido a la continuidad de esta función (ver Figura 1).

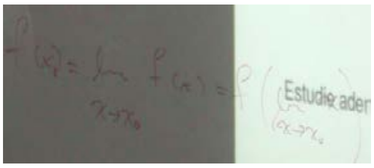	Transcripción $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$

Figura 1: Propuesta de PU2

3. PU1: Entonces ese límite lo puedo tirar pa' fuera. […] Y ahora uso las propiedades del logaritmo natural. Y ahora fijate que mágicamente, esto que está ahí tiene la forma de L'Hôpital, infinito sobre infinito, vale? Usando L'Hôpital aquí […], esto es el límite de las derivadas, uno sobre x y uno, […], y este límite es?, cero. O sea, conclusión, a qué has llegado? A que el logaritmo natural de L es cero, ¿cuánto vale L entonces? L vale uno, y ahora si puedo justificar todo lo que hice […]. O sea, el límite L es uno. Ahora date cuenta, esto lo hice para variables continuas, o sea x se mueve en todos los números reales. Pero si vale para x moviéndose en todos los números reales, va a valer también para la sucesión, o sea, cuando x sólo se mueve en los valores 1, 2, 3, 4, […]. Entonces ese límite es uno.

Además, como tercer punto, una vez dentro del límite, el logaritmo permite realizar una serie de operatorias, las cuales producen una forma indeterminada dentro del contexto de la Regla de L'hôpital; cuarto, por medio de la mencionada regla se calcula el límite; y quinto, del límite de una función de una variable real se devuelve al límite de la sucesión, para lo cual implícitamente el docente hace uso del teorema de la caracterización del límite mediante sucesiones.

CONCLUSIONES

PU1 en su discurso constantemente recurre a elementos continuos para trabajar con sucesiones (funciones de variable discreta), lo que hace notar la ausencia de varias herramientas (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016), en este sentido nosotros nos preguntamos ¿ por qué a la hora de trabajar en un referencial de sucesiones se están obviando algunos axiomas y herramientas, tales como el axioma del supremo, la propiedad Arquimedeana, las desigualdades de Bernoulli, los cuales parecieran ser reemplazados por el uso de herramientas provenientes de funciones de una variable real, tal como la Regla de L'hôpital?

En esta misma línea, en relación al trabajo realizado en lo discreto, cabe cuestionarse ¿qué consecuencias tiene para el estudiante de este curso el hecho que PU1 recurra a herramientas de funciones de una variable real, sin ver explícitamente el teorema de la caracterización del límite mediante sucesiones? Ó quizá, efectivamente, sería más adecuado estudiar sucesiones, abarcando las herramientas utilizadas en ese referencial?

Además, se ha observado que PU1 realiza una propuesta (ETM idóneo) dentro de los paradigmas Análisis Geométrico apoyada en la visualización de un gráfico, y del Análisis Calculatorio, ya que sus procedimientos están basados estrictamente en la resolución de cálculos.

Es importante notar que PU1 no hace mención explícita del teorema de la caracterización del límite mediante sucesiones, pero implícitamente lo utiliza cuando dice, en el punto 3, que "si vale para x moviéndose en todos los números reales [el límite], va a valer también para la sucesión, o sea, cuando x sólo se mueve en los valores 1, 2, 3, 4,…".

A priori, no podemos señalar que este ETM idóneo sea inadecuado, pero sí podemos constatar que PU1 enfrenta el fenómeno discreto continuo, sin ser consciente ni cuestionarse de las consecuencias que posiblemente éste pueda traer a sus estudiantes.

Finalmente, cabe señalar que se ha observado que, a pesar de las diferencias entre los distintos ETM idóneos analizados, uno de los paradigmas predominantes es el análisis calculatorio y en mucho menor grado el análisis geométrico. Sería deseable comparar estos ETM idóneos con otros que incorporen el paradigma del análisis real.

Reconocimiento: Beca de Doctorado año 2015-2016 Conicyt (21151243), Beca Gastos Operacionales año 2015-2016 Conicyt (R.E.: 5359/2015)

Referencias

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*,**11**, 175–193.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, ZDM, Issue 2016 – 5. (à paraître)

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24. Recuperado el 12 de junio de 2014 de: Laboratoire de Didactique André Revuz (EA 1547), http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Annales_16.pdf

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J-P. (2016). *Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom*. ZDM Mathematics Education. DOI 10.1007/s11858-016-0773-0.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, *17*(1), 1-16.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.