

DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA UNA MEJORA DE UNA CONCEPCIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Esteban Mendoza Sandoval

Universidad Autónoma de Guerrero. emendoza@uagro.mx

Flor Monserrat Rodríguez Vásquez

Universidad Autónoma de Guerrero. emendoza@uagro.mx

Resumen

Este escrito es parte de una investigación en desarrollo, la cual tiene por objetivo realizar y validar diseños de actividades para el aprendizaje de algunos conceptos específicos del álgebra lineal con base en la teoría APOE (Acciones; Procesos; Objetos; Esquemas). Es decir, para realizar estos diseños de aprendizaje se considerarán descomposiciones genéticas, las cuales serán el sustento de las actividades para implementar el ciclo de enseñanza ACE (Actividades, Aula de debate, Ejercicios). En particular, se expondrán actividades referentes a la transformación lineal, las cuales buscan una mejora en la concepción de dicho concepto.

Palabras clave: Teoría APOE, álgebra lineal, ciclo de enseñanza ACE y transformación lineal.

1. INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal es una asignatura que, según los planes y programas de estudio afines a matemáticas o en licenciaturas de matemáticas, aparece en al menos un curso en ese nivel educativo. Algunos de sus conceptos tienen aplicación en diferentes áreas; por ejemplo, en física es muy común utilizar a los vectores para modelar fuerzas; en Química se pueden utilizar sistemas de ecuaciones para resolver una ecuación química balanceada; en Economía los mismos sistemas de ecuaciones lineales se pueden utilizar para la solución de modelos económicos.

Algunas investigaciones reportan que en la mayoría de las universidades, en los cursos de álgebra lineal no se alcanza el nivel de aprendizaje esperado (Harel, 1989a y 1989b; Sierpiska, Dreyfus y Hillel, 1999 y Sierpiska, 2000, citados en Trigueros, Maturana, Parraguez y Rodríguez, 2015). Otras reportan que los profesores y estudiantes consideran los temas de álgebra lineal difíciles (Sierpiska, 2000; Larson, Rasmussen, Zandieh, Smith y Nelipovich, 2007; Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010; Salgado y Trigueros, 2015).

En este sentido, dada su naturaleza abstracta, se le puede considerar una asignatura difícil de aprender para la mayoría de estudiantes de nivel superior en el área de matemáticas. Dorier, Robert,

Robinet y Rogalski (2000) mencionan que cuando se presentan por primera vez los conceptos de álgebra lineal a los estudiantes, ellos tienen la sensación de que aterrizan en un nuevo planeta en el cual no logran ubicarse. Es bastante claro que muchos estudiantes tienen la sensación de haber aterrizado en un nuevo planeta y no son capaces de encontrar su camino en este nuevo mundo. (Dorier *et al*, 2000, p. 86).

Al respecto de esta problemática, en el año 2012 se creó un grupo de discusión organizado por el Comité de Educación de la Sociedad Internacional de Álgebra Lineal (ILAS) en el evento ICME, con el fin de discutir temas relevantes acerca de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, incluyendo la motivación, problemas desafiantes, la visualización, la tecnología (Berman y Okubo, 2012). Entre las intervenciones, se menciona la importancia de motivar el aprendizaje del álgebra lineal por cuestiones de la vida real. Entre los ejemplos mencionados están: Page Rank de Google; métodos de detección de bordes; Redes neuronales; Los problemas en Teoría de grafos; Propiedades de la sucesión de Fibonacci (Berman y Okubo, 2012). Expertos en álgebra lineal están sugiriendo atender una parte del problema de aprendizaje a través de la motivación, por medio de las aplicaciones del álgebra lineal en la vida cotidiana de los estudiantes.

Así pues, buscamos hacer diseños de actividades que sean sutiles, atendiendo a las estrategias de enseñanza sugeridas por el ILAS. Esto con el fin de una mejora de aprendizaje por parte de los estudiantes en esta asignatura y en particular en conceptos específicos. En este escrito nos centraremos en el concepto de transformación lineal, con base en una descomposición genética haremos diseños para mejorar la concepción respecto a dicho concepto. Tomando como justificación lo expuesto por Roa-Fuentes respecto a la transformación lineal:

Sin embargo, consideramos que para obtener datos más significativos sobre las construcciones que los estudiantes realizan alrededor del concepto transformación lineal resultaría muy interesante diseñar un modelo de enseñanza que con base en nuestra descomposición genética refinada busque seguir el camino descrito para la construcción del concepto, teniendo en cuenta las consideraciones didácticas que hemos planteado. (Roa-Fuentes, 2008, p. 117).

Así, con diseños guiados por la descomposición genética que propone y considerando las sugerencias didácticas, pretendemos una mejora del aprendizaje de dicho concepto.

Una vez expuesta, a grandes rasgos, la problemática planteamos la siguiente pregunta de investigación.

2. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo estudiantes de nivel superior pueden mejorar su aprendizaje en algunos conceptos de álgebra lineal?

3. OBJETIVO GENERAL

Realizar y validar diseños de actividades para el aprendizaje de conceptos del álgebra lineal con base en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) y el ciclo de enseñanza ACE (Actividades, Discusión en clase, Ejercicios).

3.1. Objetivos particulares

- Hacer diseños de actividades con base en descomposiciones genéticas e implementarlos mediante el ciclo de enseñanza ACE.
- Realizar descomposiciones genéticas empíricas de conceptos necesarios para lograr el objetivo de enseñanza, muy particular en el álgebra lineal.

Hasta este momento nos conformaremos con realizar diseños de actividades con base en la descomposición genética de transformación lineal y de ser posible aplicar completo el ciclo de enseñanza ACE el cual explicamos en la siguiente sección.

4. MARCO TEÓRICO

La investigación se sustentará sobre la base de la teoría APOE, la cual tiene fundamentos en la abstracción reflexiva (Piaget, 1985, pp. 149-150), y es entendida, en el sentido de Dubinsky (1991), como el mecanismo para construir objetos mentales a partir de las acciones mentales sobre estos objetos, lo cual permite mediante la interiorización y coordinación de dichas acciones en nuevas acciones y finalmente nuevos objetos (Dubinsky, 1991, citado en Roa-Fuentes, 2008). En otras palabras, la teoría cognitiva APOE se basa en el supuesto del conocimiento matemático y su desarrollo en un individuo por medio de la abstracción reflexiva:

El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas. (Dubinsky, 1996, pp. 32-33).

Según dicha postura teórica sobre el conocimiento matemático enfatiza en la habilidad para reorganizar conocimiento y con ello construir o reconstruir concepciones, mediante las construcciones: acciones, procesos, objetos, esquemas que se reestructuran y se adaptan para dar solución a problemas matemáticos. Cuando se presenta una situación en la que está en juego el uso de conocimiento matemático, un individuo debe recurrir a los conceptos que están involucrados en dicha situación y, de ser posible, establecer las relaciones con otros conceptos que la situación requiera. Ante esta necesidad de organizar, construir o reconstruir y establecer conexiones entre lo aprendido y por aprender, Roa-Fuentes (2008) menciona que, a medida que los problemas motivan al establecimiento de conexiones entre los esquemas, estos evolucionan y en consecuencia el conocimiento del individuo es enriquecido.

Para Piaget (1983) y García (1989), citados en Arnon, Cottill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller (2014, p. 25), los conceptos matemáticos no se aprenden directamente y es necesario construir estructuras mentales para darles sentido. Es decir, ante un nuevo concepto que se le presente al individuo, la capacidad de adquirir y apropiarse del conocimiento matemático depende de las estructuras mentales previas apropiadas para comprenderlo (Dubinsky, 1991). Respecto a una estructura mental y un mecanismo mental diremos que:

Una estructura mental es cualquier estructura (es decir, alguna cosa construida en la mente) relativamente estable (aunque capaz de desarrollarse) que un individuo usa para dar sentido a una situación matemática. La fuente de una estructura mental es la descripción de la cual ella se origina. Un mecanismo mental es el medio por el cual una estructura puede desarrollarse en la mente de un individuo o un grupo de individuos. (Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky y Vidalovic, 2008, p. 98).

Dicho modelo teórico establece las conexiones entre los mecanismos mentales (clases de abstracción reflexiva: Interiorización, Coordinación, Encapsulación, Generalización y Reversión) y las construcciones mentales (Acción, Proceso, Objeto y Esquemas) o estructuras mentales, bajo el supuesto de que el conocimiento no se genera de la nada, el individuo tiene ciertas estructuras muy cercanas o no al concepto, las cuales deben llevarse a las estructuras apropiadas para comprender el concepto, y los mecanismos mentales le permitirán lograr dichas estructuras, así como establecer conexiones entre ellas (Mendoza-Sandoval, Roa-Fuentes y Rodríguez-Vasquez, 2015).

4.1. Clases de abstracción reflexiva

Dubinsky considera cinco tipos de mecanismos mentales, tomando cuatro de las ideas de Piaget y anexando uno a la teoría: Interiorización, Coordinación, Encapsulación, Generalización y

Según Mendoza-Sandoval, Roa-Fuentes y Rodríguez-Vasquez (2015), en una situación problema donde está en juego el conocimiento matemático de un concepto, lo primordial es que el individuo a partir de su concepción forme las estructuras adecuadas (previas) del concepto de interés y a partir de ahí conciba al concepto como una estructura más sofisticada.

4.3. La enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva teórica APOE

Desde este enfoque teórico, la enseñanza de un concepto específico comienza con la descripción de las estructuras mentales que un individuo podría hacer a la hora de entender un concepto y posterior a ello la implementación se lleva a cabo usando el Ciclo de Enseñanza ACE, instrucciones que apoyen el desarrollo de las construcciones mentales descritas en la descomposición genética (Arnon *et al.*, 2014).

4.4. ¿En qué consiste el ciclo ACE?

Arnon *et al.* (2014) mencionan que dicho ciclo suele incluir actividades donde los estudiantes trabajen en forma cooperativa, y con el uso de un lenguaje de programación matemática tal como ISETL.

La expresión de lenguaje de programación matemática se refiere a un programa que satisface tres propiedades:

1. La sintaxis está cerca de la notación matemática estándar.
2. Algunas funciones matemáticas son compatibles, con sus propiedades matemáticas habituales.
3. Tipos de datos importantes, tales como procedimientos y funciones, pueden ser operados o llamados y devueltos por procedimientos y funciones. (Arnon *et al.*, 2014, p. 57).

El ciclo de enseñanza ACE es una estrategia pedagógica que consiste en tres componentes: Actividades (A); Aula de debate (C); Ejercicios (E). Las Actividades son la primera parte del ciclo, los estudiantes trabajan cooperativamente en equipos con tareas diseñadas que ayudarán a las construcciones propuestas en la descomposición genética (Arnon *et al.*, 2014). Básicamente, estas tareas están enfocadas en promover una abstracción reflexiva en lugar de respuestas correctas. Usualmente, la teoría propone un lenguaje de programación, por ejemplo ISETL.

La Discusión en el Aula, la segunda parte de este ciclo, consiste en la organización de grupos pequeños en la cual la discusión es dirigida por el instructor de la clase. Dichas discusiones

en clase y trabajos en clase deben de dar a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre el trabajo realizado y particularmente lo realizado en el laboratorio. En esta fase como el instructor es quien guía la discusión, él o ella pueden proporcionar definiciones, explicaciones o presentar una conexión entre lo que los estudiantes están pensando y trabajando (Arnon *et al.*, 2014).

Los Ejercicios de Tarea, esta tercera parte del ciclo consiste en problemas diseñados para reforzar las actividades de la computadora y la discusión en el aula. Los ejercicios ayudan al desarrollo continuo de las construcciones mentales sugeridas en la descomposición genética. También ayuda a los estudiantes a aplicar lo que han aprendido y tener en cuenta ideas matemáticas relacionadas (Arnon *et al.*, 2014). En la Figura 2, se puede ver la relación entre la descomposición genética y el ciclo ACE.

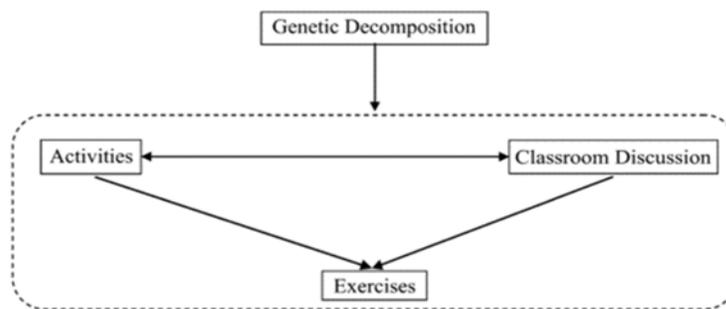


Figura 2. Relación entre el ciclo de enseñanza ACE y una descomposición genética (Arnon *et al.*, 2014)

La Figura 2 ilustra que la descomposición afecta a cada componente del ciclo de enseñanza ACE. La flecha de la bicondicional entre las actividades y la discusión en el aula, por una parte sugiere que las actividades son lo principal en la discusión en clase y, por otra que la discusión en clase es un medio de reflexión por lo realizado por los estudiantes en el aula de clases. Las flechas que van de las actividades y la discusión de clase, a los ejercicios reflejan el objetivo principal de los ejercicios, el cual consiste en reforzar las construcciones mentales que los estudiantes han evidenciado o empiezan a evidenciar (Arnon *et al.*, 2014).

5. MÉTODO

Para llevar a cabo la siguiente propuesta de investigación recurriremos en gran parte a la metodología que propone la teoría APOE y su ciclo de enseñanza (ACE), explicado en el apartado anterior. La investigación que proponemos está pensada en estudiantes de Nivel Superior de una Licenciatura en Matemáticas o una carrera a fin de la Universidad Autónoma de Guerrero. Los

instrumentos de investigación serán diseños de actividades con sustento en la descomposición genética de transformación lineal (Roa-Fuentes, 2008). Considerando que la investigación la haremos en tres momentos.

5.1. Primera fase

Se realizarán diseños de actividades sobre la base de la teoría APOE (actividades, ejercicios), a partir de descomposición genética transformación lineal. Estos instrumentos deben apoyar instrucciones que permitan desarrollo de las construcciones mentales descritas en la descomposición. Para la validación de los instrumentos utilizaremos la validación por expertos.

5.2. Segunda Fase

Una vez que tengamos nuestros diseños de enseñanza, implementaremos la segunda componente que propone la teoría APOE, es decir, la implementación de enseñanza del ciclo ACE, en el cual buscaremos promover las concepciones de los estudiantes a una estructura objeto de cada concepto de interés en esta investigación. En esta fase se implementarán las actividades y la discusión de clase y se le dará seguimiento a los ejercicios dados en clase.

5.3. Tercera Fase

Se recolectarán y analizarán los datos para rediseñar las actividades en función del éxito o no alcanzado por los estudiantes respecto al aprendizaje de los conceptos de interés en contraste con el desempeño de estudiantes de un curso tradicional de álgebra lineal en la misma institución educativa.

En este avance de investigación se mostrarán algunos diseños de actividades respecto a transformación lineal así como su análisis a priori de cómo creemos se lograría una concepción al menos de objeto de dicho concepto.

6. CONCLUSIONES

Una vez aplicados los diseños de actividades con base en la teoría APOE, se espera favorecer el aprendizaje de los estudiantes, referente a los conceptos clave que se han elegido en álgebra lineal. Se espera que los estudiantes adquieran a partir de dichos diseños al menos una concepción objeto de Transformación lineal.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands.
- Berman, A., & Okubo, K. (2012). The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. In S. Je Cho (Ed.), *Issues Surrounding Teaching Linear Algebra* (pp. 593–596). Seoul, Korea: Springer Open.
- Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* 23, pp. 1–81. Grenoble, Francia: Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (Volumen 23, pp. 85–124). Grenoble, Francia: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8 (3), 24–41.
- Mendoza-Sandoval, E., Roa-Fuentes, S., & Rodríguez-Vasquez, F. M. (2015). Construcción de la matriz cambio de base: un análisis cognitivo en términos de la Teoría APOE. In *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.
- Roa-Fuentes, S. (2008). *Construcciones y Mecanismos Mentales Asociados al concepto Transformación Lineal*. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models Apos Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100–120.
- Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., & Vidalovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set $P(\mathbb{N})$. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 11(1), 93–125.
- Trigueros, M., Maturana, I., Parraguez, M., y Rodríguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal. *Educación Matemática*, 27(2), 95–124.