

MARCO BIBLIOGRÁFICO PARA UN ESTUDIO SOBRE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

María Antonieta Rodríguez Ibarra
CINVESTAV-IPN. México. maria.rodriguez@cinvestav.mx

Gisela Montiel Espinosa
CINVESTAV-IPN. México. gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

Como parte inicial de la investigación doctoral para estudiar el desarrollo del pensamiento geométrico de profesores de secundaria, se realiza una revisión bibliográfica de aquellos autores que hayan abordado estudios con profesores de matemáticas o que hayan investigado acerca de la problemática sobre el aprendizaje y/o enseñanza de la geometría escolar. En el siguiente documento se muestra el avance de las revisiones alrededor del desarrollo del pensamiento geométrico. El objetivo de esta revisión es contar con un marco bibliográfico alrededor de nuestro tema de interés.

Palabras clave: Revisión bibliográfica, Desarrollo profesional docente, pensamiento geométrico, escuela secundaria.

1. INTRODUCCIÓN

Qué enseñar, para qué enseñar y cómo enseñar han sido cuestionamientos y preocupaciones constantes de la institución llamada escuela. Estas preguntas también toman sentido cuando son expresadas para el caso del conocimiento matemático y de la misma manera continúan siendo válidas si son reformuladas para el caso del conocimiento geométrico: ¿Cuáles deben ser las prácticas de los profesores y qué es lo que deben enseñar para lograr el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes?

Las respuestas que se dan a estas preguntas dependen de muchos factores: en ocasiones de la necesidad de acoplarse a los enfoques de alguna reforma, en otras, el diseño de los currículos escolares se ve influenciado por factores sociales, por el conocimiento que los diseñadores tengan de la disciplina, por los materiales de apoyo con los que se cuenten, con la propia preparación de los profesores, etc.

En este contexto de incesantes y profundos cambios, es natural cuestionarse, ¿Cómo incorporar dichos elementos de forma tal que resulten efectivos y eficaces para el aprendizaje de los estudiantes?, ¿Cuál es la mejor manera de enseñar?, ¿Cuál es el rol que se le debe asignar al

profesor y cuál a los estudiantes? A la luz de esos cambios, ¿Se ha modificado lo que significa aprender geometría?

Dentro del currículo escolar mexicano, el estudio de la geometría se presenta desde edades tempranas. Principia en el primer tramo de la educación básica, que abarca desde preescolar a secundaria, iniciando sus estudios a los 4 años y culminándolos a los 15 años, aproximadamente. Al ser una parte de las Matemáticas presente en gran parte del currículo escolar, se esperaría que estudiantes que han cursado el nivel básico y medio superior, hayan desarrollado un pensamiento geométrico apropiado para resolver problemas acordes a su nivel.

Identificamos que, dada la diversidad de factores que afectan su práctica profesional, el docente no ha logrado modificar el enfoque de enseñanza basado en el dominio de contenidos, principalmente referido a definiciones y algoritmos. Nuestra hipótesis apunta hacia la falta de experiencias que le permitan a él mismo contrastar este enfoque con uno que promueva el desarrollo del pensamiento geométrico, empezando por comprender a qué se refiere la investigación por desarrollar el pensamiento matemático, en general, y geométrico en particular; y cómo éste resulta fundamental en la formación matemática del estudiante.

A diferencia de lo que sucede con perspectivas como *pensamiento algebraico*, *pensamiento variacional* o *pensamiento trigonométrico*, para los cuales es posible encontrar algunas caracterizaciones y/o acercamientos en la literatura de la especialidad, para el pensamiento geométrico aparecen una serie de nociones en las que concurren acercamientos realizados desde la investigación sobre el aprendizaje, la enseñanza, los procesos cognitivos, aquellos que intentan generar modelos teóricos, etc., sin que sea posible encontrar (al menos en la revisión bibliográfica efectuada) una caracterización de lo que es el pensamiento geométrico.

A pesar de la abundante investigación que existe en la disciplina, identificamos que todavía no se ha llegado a caracterizar con precisión cómo se desarrolla el pensamiento geométrico. En este sentido, nos interesa iniciar la búsqueda de elementos para configurar una postura argumentada que lo caracterice y nos permita diseñar escenarios de interacción con profesores.

Nos hemos planteado dos preguntas orientadoras de la revisión bibliográfica:

Considerando los resultados de investigación, clásicos y relacionados con el uso de la tecnología, ¿Cómo se caracteriza hoy al pensamiento geométrico?

¿Qué se estudia y qué resultados se tienen sobre el desarrollo profesional docente, en particular el relacionado con los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Geometría?

2. ESTRATEGIA DE BÚSQUEDA Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Actualmente se realiza la revisión bibliográfica que servirá para refinar nuestro planteamiento de investigación, enmarcarlo en alguna tendencia y situar su aportación a la disciplina. Se recabaron distintas investigaciones que abordan estudios con profesores e investigaciones sobre el pensamiento geométrico. Se tomaron éstas dos como las categorías principales para la búsqueda; cada una tiene a su vez subcategorías, las cuales se muestran en la Figura 1.

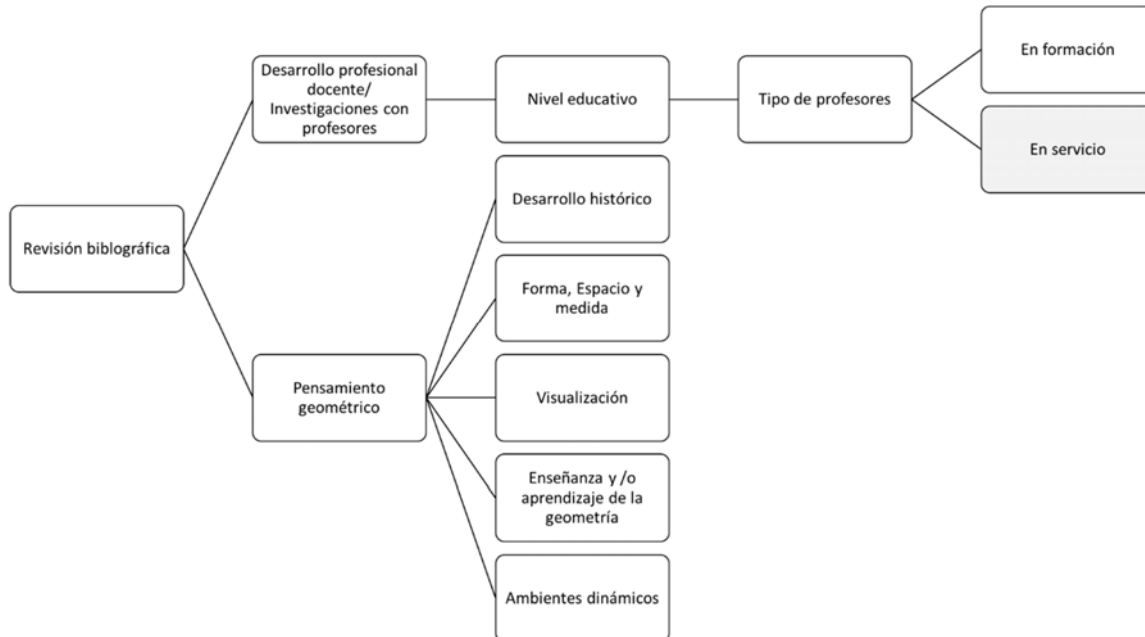


Figura 1: Esquema de las categorías de clasificación de la revisión bibliográfica

Las categorías mostradas a continuación no son excluyentes, es decir, dada nuestra segunda pregunta orientadora en la revisión, es de principal interés aquellas investigaciones que contemplen intersecciones entre las categorías.

Dentro de las investigaciones o estudios del pensamiento geométrico nos interesan particularmente aquellos relacionados con los contenidos matemáticos presentes en el currículo de la escuela secundaria mexicana, sobre todo los que tengan que ver con geometría, es por eso que se incluyó la subcategoría de *Forma, Espacio y Medida*, que es uno de los tres ejes temáticos en los que está organizado dicho currículo. La intención de dividir la matemática de la educación básica

en ejes temáticos es trabajar de manera integradora y no segmentada en donde se asigne el mayor peso a los contenidos matemáticos. En particular en esta categoría clasificaremos aquellos estudios que estén relacionados con habilidad e imaginación espacial, razonamiento deductivo.

3. AVANCES EN LA REVISIÓN

A continuación, mostramos los avances de la revisión bibliográfica atendiendo por el momento únicamente a la categoría del pensamiento geométrico haciendo explícitas las subcategorías que se consideraron.

3.1. Investigaciones acerca del Pensamiento Geométrico.

Un referente clásico en nuestra disciplina, tanto para hacer investigación como para el diseño didáctico, es la teoría que desarrollaron los profesores holandeses Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele sobre el *razonamiento geométrico*. En ella se incluye un apartado instructivo, el cual sugiere al profesor una manera en que los alumnos pueden desarrollar su razonamiento geométrico a partir de un método descriptivo que se conoce como *los niveles de Van Hiele*.

En esta teoría se establece un primer nivel donde los alumnos perciben a las figuras geométricas por su forma y no por sus propiedades. En el segundo, los alumnos son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y que poseen propiedades matemáticas. En el tercer nivel, los alumnos empiezan a desarrollar su capacidad de razonar matemáticamente, por ejemplo, hacen razonamientos deductivos y comprenden el significado de una definición. En el cuarto nivel, los alumnos pueden realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones de varios pasos ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación. En el quinto y último nivel, los alumnos son capaces de trabajar en distintos sistemas axiomáticos prescindiendo de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad matemática.

Afonso (2003) reporta en su tesis doctoral el tipo de estudios que se han realizado alrededor de los niveles de razonamiento de Van Hiele y las agrupa de la siguiente manera: investigaciones dirigidas a confirmar si los niveles de Van Hiele describen exactamente el pensamiento geométrico de los alumnos; aquellas que estudian la continuidad o discretitud del modelo; investigaciones acerca de la globalidad de todos los niveles en todos los conceptos geométricos: otras que tratan de la jerarquía y secuencialidad de los niveles; estudios dedicados a determinar en qué niveles se ha venido realizando habitualmente la enseñanza-aprendizaje de la geometría, así como la presentación

de la misma en diferentes libros de texto y, por último, investigaciones sobre la existencia única de los cinco niveles.

La mayoría de las investigaciones que reporta Afonso (2003) se realizaron en la década de los ochenta. La autora comenta que el modelo se publicó a mitad de la década de los 50 y fue tal su impacto que a partir de los años 60 la unión soviética lo tomó como base para el diseño del nuevo currículo de matemáticas, pero fue hasta los 70's que comenzó su difusión y uso en el mundo occidental.

La geometría ha formado parte siempre de la matemática escolar, sin embargo, al igual que otros contenidos curriculares, ha sufrido modificaciones a lo largo del tiempo. En este sentido se señala que se ha priorizado la enseñanza de la geometría analítica, haciendo uso de herramientas algebraicas y dejando de lado la visualización de objetos geométricos y sus propiedades y es este aporte visual lo que añade a la geometría un factor que no se debe descuidar sobre todo en la resolución de problemas (Mammana y Villani, 1998).

Estos autores también mencionan que la enseñanza de la geometría de hoy oscila entre el aspecto visual, computacional, algebraico y sus aplicaciones, son estas maneras de ver a la geometría las que debieran tener un impacto en el aula en los distintos niveles escolares. Han existido momentos de gran aprecio por la enseñanza de la geometría, pero en contraparte también han existido momentos de gran rechazo. En aquellos países donde el currículo escolar mantiene contenidos geométricos formales, este hecho parece obedecer más al deseo de conservar una tradición que al reconocimiento de la importancia de su estudio como fuente del desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Otro enfoque de investigación son los Paradigmas geométricos y los Espacios de Trabajo Geométrico (ETG), acercamientos encabezados principalmente por Houdement y Kuzniak (2004). Los autores plantean de tres tipos de geometrías o paradigmas geométricos:

- La Geometría natural (GI) en donde los objetos son materiales, se recurre a la intuición como argumento y la validación es empírica por confrontación de la realidad, por ejemplo, el ángulo ABC es recto porque lo veo o porque usé el transportador para medirlo;
- La Geometría axiomática natural (GII) donde se trabaja con objetos ideales y es aquí donde surge la necesidad de contar con definiciones, teoremas, etc. Se apoya fuertemente en la GI y considera como base la geometría euclidiana, en GII la manera

de producir conocimiento es por medio de un sistema deductivo que se basa esencialmente en la demostración; y

- La Geometría axiomática formalista (GIII), al igual que en la GII sus objetos son ideales, este paradigma emerge con el nacimiento de las geometrías no euclidianas.

A diferencia de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, estos paradigmas no son jerarquizables, es decir, dependiendo del tipo de actividad que la persona realice puede pasar de GI a GII o de GII a GI, por ejemplo.

Los ETG se definen como el ambiente en el cual se concibe la reflexión, fruto de la interacción entre un individuo y los problemas geométricos, es un ambiente organizado por y para el geómetra (persona que se enfrenta a una tarea de geometría). En esta postura se consideran diferentes espacios de trabajo geométrico: de referencia, idóneo y personal. El de referencia está definido de manera ideal en función de criterios matemáticos. El idóneo son los espacios definidos en términos didácticos, de ahí que el usuario de este espacio es el profesor. Y el personal está definido por un geómetra, producto de la reflexión de los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica, de acuerdo a sus conocimientos matemáticos.

De la Torre (2008) se plantea analizar cuatro libros de texto de la Escuela Obligatoria Secundaria en España (12 a 16 años) utilizando los paradigmas geométricos y los ETG. El objetivo de su análisis era ver el peso que se le asigna a geometría dentro del currículo para averiguar qué tipo de tratamiento le asignan; ver cómo se organizan los contenidos y ver si están articulados para ser comprendidos por los estudiantes. En los resultados de la investigación, el autor reporta que en los libros analizados se promueve utilizar los instrumentos de dibujo como una manera de hacer geometría, pero enseguida pide que se utilicen los teoremas para conseguir otros resultados (GII). El espacio de trabajo geométrico que se utiliza primero es casi siempre el ETG personal, con el dibujo correspondiente a los instrumentos de dibujo y el referente dado en GI. El referente teórico casi siempre es la GII, aunque parece que para iniciar el estudio de la geometría se hace utilizando la GI pero en ningún momento se trabaja con GIII.

Lundsgaard (1998) reporta la evolución que ha tenido la enseñanza de la Geometría, menciona, por ejemplo, que hace 75 años no se tenían los problemas que se tienen actualmente. Identifica que conforme las sociedades del conocimiento han ido progresando se cuenta con más contenidos que se pueden incorporar a las aulas, diferentes enfoques didácticos, nuevas maneras de enseñar, se advierte sobre los distintos tipos de aprendizajes, la incursión de las tecnologías tales

como los softwares de geometría dinámica y diferentes aspectos que antes no se consideraban en una enseñanza tradicional.

En este sentido, en las primeras etapas escolares, Lundsgard (1998) sugiere enfrentar a los niños a problemas que involucren figuras geométricas básicas y sus propiedades. Al inicio, el estudio de la geometría euclidiana debería de ser informal y exploratoria, dejando la parte formal para grados más avanzados.

4. AMBIENTES DINÁMICOS

Un autor que ha desarrollado investigación acerca del aprendizaje, sobre todo en geometría, es Abraham Arcavi, quien menciona que hay ciertas características al trabajar en ambientes dinámicos que los profesores deben promover (Arcavi y Hadas, 2000), a continuación, las enunciamos.

La visualización: generalmente se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual (Hershkowitz, 1989, p. 75). Tal es así que es un componente crucial en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Por otra parte, una imagen visual, en virtud de su concreción, es un factor esencial para crear la sensación de auto evidencia e inmediatez (Fischbein, 1987, p. 101).

La experimentación: además de la visualización, el desempeño con los ambientes dinámicos permite a los estudiantes aprender a experimentar, y “a apreciar la facilidad de obtener muchos ejemplos..., para buscar casos extremos, ejemplos adversos y de carácter no estereotipados” (Yerushalmy, 1993, p. 82).

El efecto sorpresa: es poco probable que los estudiantes encaucen fructíferamente su experimentación. Las actividades curriculares, tales como las situaciones problema, deben ser diseñadas de tal manera que los tipos de preguntas formuladas a los alumnos puedan jugar papeles significativos al plantearse en la profundidad e intensidad de un aprendizaje experimental. Un requerimiento significativo a los estudiantes, que puede acompañar a la experimentación, podría ser exigirles que hagan predicciones explícitas e inteligentes sobre un resultado de un cierto fenómeno o acción que estén a punto de abordar. Al realizar tales predicciones, haciéndolas explícitas, se alerta a los estudiantes para que sean más claros acerca de cómo prevén la situación en la que van a trabajar; orienta a los estudiantes a la posición de crear sus “propias predicciones” y así es probable que tengan más cuidado en lo que piensan sobre esto, y como consecuencia, se comprometan más

con la situación, y crea expectativas y motivaciones para la experimentación real. El reto es encontrar situaciones en las cuales el resultado de la actividad sea inesperado o contraintuitivo, de tal forma que la sorpresa (o el desconcierto) generada cree una clara diferencia con las predicciones explícitamente enunciadas. Éste puede ser el detonador para nutrir la propia necesidad de los estudiantes para reanalizar su conocimiento y predicciones, estableciendo oportunidades para lograr un aprendizaje significativo.

La retroalimentación: las sorpresas descritas anteriormente originan diferencias entre una expectativa explícita de una cierta acción y del resultado de esa acción.

Necesidad de pruebas y demostraciones: Dreyfus y Hadas (1996) discuten y ejemplifican cómo es posible usar en beneficio propio una acción en cada sorpresa del estudiante, a fin de que infunda y alimente la necesidad para la justificación y la prueba. Siguiendo una sorpresa, muchos estudiantes pueden requerir una prueba, o quizás no explícitamente, pero exige de otros o de ellos una respuesta a su “por qué” (o el “por qué no”).

5. VISUALIZACIÓN

En este apartado nos centraremos en la subcategoría de visualización mencionada por diversos autores, por considerar que ésta es fundamental para el desarrollo del pensamiento geométrico.

Duval (1998) menciona que “Enseñar geometría es más complejo y comúnmente menos exitoso que enseñar operaciones numéricas o álgebra elemental; entonces, ¿por qué enseñar geometría a todos los estudiantes? O más aún, ¿por qué enseñar geometría?” (p. 37).

Para dar respuesta a este tipo de cuestionamientos, Duval explica que se debe considerar la complejidad cognitiva de la actividad geométrica y que ésta considera tres procesos cognitivos que cumplen funciones epistemológicas específicas:

- Visualización: proceso de considerar las representaciones espaciales, las exploraciones heurísticas de una situación compleja y para ilustrar una proposición o enunciado.
- Construcción mediante herramientas: la construcción de configuraciones puede servir como modelo en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que los representan

- *Razonamiento*: en su relación con los procesos discursivos para la extensión del conocimiento, para la demostración y explicación.

Los tres procesos se pueden trabajar de manera separada. De tal forma que la visualización no dependa de una construcción: hay acceso a las figuras, de cualquier manera que hayan sido construidas. Y aún si la construcción guía a la visualización, los procesos de construcción dependen sólo de las conexiones entre propiedades matemáticas y las restricciones técnicas de las herramientas usadas.

“La visualización generalmente se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual” (Hershkowitz, 1989, p. 75). Tal es así que es un componente crucial en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Por otra parte, una imagen visual, en virtud de su concreción, es un factor esencial para crear la sensación de auto evidencia e inmediatez” (Fischbein, 1987, p. 101).

Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996) describen a la visualización como “el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos” (p. 441). Mientras que Cantoral y Montiel (2002) mencionan que “la visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podemos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta” (p. 2).

Durante los últimos años, en el campo de la Didáctica de las Matemáticas han aparecido teorías cognitivas cuyos conceptos básicos no tienen el mismo significado, a pesar de que utilizan terminología parecida; esto sucede con nociones como visualización, capacidad espacial, razonamiento geométrico, pensamiento espacial o visión espacial. Torregrosa (2007).

6. CONCLUSIONES

La revisión bibliográfica realizada nos permitió dar cuenta de que, si bien existe la necesidad de profundizar más, hay evidencia acerca de una problemática relacionada con la enseñanza y aprendizaje de la geometría en distintos niveles. Y aunque socialmente se acepta que es difícil aprender y enseñar matemáticas, asumimos que solamente la investigación en el campo de la Matemática Educativa podrá darnos los elementos para poder tomar acciones y decisiones con sustento en ese terreno.

Otro aspecto por señalar de la revisión es que se ha podido detectar cómo los diferentes enfoques teóricos se han planteado el problema de estudiar el razonamiento geométrico, estableciendo ya sea niveles, procesos o etapas que den indicios del razonamiento geométrico de las personas. Además, podemos detectar que a pesar de que los enfoques que se incluyeron en esta revisión centran su atención en el razonamiento o pensamiento geométrico, cada uno lo hace analizando diferentes aspectos; sin embargo, identificamos en común el importante papel que se le asigna a la interacción con la representación de los objetos geométricos.

Cabe señalar que el proceso de concreción de un marco bibliográfico sigue en proceso y se continuará con una revisión más especializada que contemple todas las categorías que nos proporcionen elementos necesarios que nos ayuden a dar respuesta las preguntas orientadoras de esta investigación.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Afonso, M. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio*. [Tesis Doctoral no publicada]. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna. España.
- Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of computers for Mathematical learning*, 5(1), 25-45.
- Cantoral, R., y Montiel, G. (2002). Visualización y pensamiento matemático. Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana y V. Villani (Eds.). *Perspectives on the Teaching Geometry for the 21th Century*. Dordrecht/ Boston: Kluwer Academic Publishers. Pp. 37-52.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. New York / Boston / Dordrecht / London / Moscow: Kluwer Academic Publisher.
- Houdement, C, & Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1). 89-116. Grenoble: Ed. La Pensée Sauvage.
- Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. (Note pour l'habilitation à diriger des recherches). Paris, France: Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques Paris VII.
- Mammana, C., & Villani, V. (1998). Geometry and Geometry-Teaching through the ages. In C. Mammana y V. Villani (Eds.). *Perspectives on the Teaching Geometry for the 21th Century*. Dordrecht/ Boston: Kluwer Academic Publishers. Pp. 1-4.
- Torregrosa, G. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.

- Yerushalmy, M. (1993). Generalization in geometry. In J. Schwartz, M. Yerushalmy & B. Wilson (Eds.), *The geometric supposer: What is it a case of?* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Pp. 57-84.
- Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4). 435-457.