

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA DE LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA EN TRIGONOMETRÍA

Olivia Alexandra Scholz Marbán

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.olivia.scholz@cinvestav.mx

Gisela Montiel Espinosa

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN. México; gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

En el marco de la investigación de doctorado para estudiar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en la transición de lo geométrico (razón trigonométrica) a lo variacional (función trigonométrica) en el nivel medio superior con estudiantes de entre 15 y 17 años de edad, se inició con la revisión bibliográfica de diversos autores que han estudiado las dificultades de los temas de trigonometría a nivel bachillerato, que han planteado estrategias de enseñanza para abordar los temas de Trigonometría o que han realizado un estudio histórico epistemológico acerca de la Trigonometría. Esta revisión se realizó con la finalidad de contar con el panorama de antecedentes que sean útiles para plantear una propuesta que nos oriente en la problematización del saber matemático puesto en juego durante el tránsito de lo geométrico a lo variacional en la Trigonometría escolar.

Palabras clave: Trigonometría, pensamiento geométrico, pensamiento variacional, bachillerato.

1. INTRODUCCIÓN

En los programas de estudio del nivel medio superior en México se plantea el estudio de la Trigonometría desde las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas, se contempla que los estudiantes de entre 15 y 17 años de edad adquieran conocimientos geométricos y variacionales a lo largo de su formación antes de abordar los temas de Trigonometría. Sin embargo, en el programa operativo no se contemplan actividades que involucren la Geometría con el estudio de la Trigonometría.

Se han realizado diversos estudios para detectar y reportar las dificultades que presentan tanto estudiantes como profesores respecto a los temas de Trigonometría que se estudian en el bachillerato, se han diseñado y propuesto estrategias para abordar el estudio de los temas trigonométricos en la escuela. Sin embargo, notamos que las investigaciones se enfocan en alguno de los dos grandes temas: o las razones trigonométricas o las funciones trigonométricas, pero no hay estudios de lo que ocurre en el tránsito de uno a otro. Es por esto que nuestro objetivo de investigación es caracterizar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en su transición de lo

geométrico a lo variacional, identificando las herramientas, los razonamientos y el lenguaje matemático puesto en uso en cada momento.

Planteamos de inicio dos preguntas de investigación: ¿Qué condiciones instruccionales, didácticas y de socialización en el aula, hacen emerger las herramientas, los razonamientos y el lenguaje trigonométrico, en situaciones de modelación? Y, considerando la transición de lo geométrico a lo variacional, ¿Cuáles y cómo permiten su evolución?

Nuestra investigación se realizará con estudiantes de nivel medio superior en México con el propósito de estudiar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en el tránsito de lo geométrico a lo variacional, para lo que se tomará como punto de partida el estudio de la Trigonometría desde el contexto del círculo para vincular lo trigonométrico con lo geométrico y, desde lo geométrico, avanzar hacia lo variacional dentro del mismo contexto del círculo.

La investigación se realizará bajo el enfoque de la metodología de la investigación basada en diseños propuesta por nuestro interés de estudiar el desarrollo del pensamiento matemático en condiciones escolares particulares. Esta metodología tiene un enfoque pragmático, retomado de la Ingeniería, y una orientación teórica, se centra en un tema en particular y desarrolla teorías locales mediante el estudio sistemático de las formas de aprendizaje y los medios que se relacionan con éstas (Cobb, Confrey, Lehrer y Schauble, 2003).

2. FUNDAMENTO TEÓRICO

Los estudios históricos epistemológicos realizados por Bressoud (2010) y por Montiel (2005) nos dan un panorama del surgimiento histórico de la Trigonometría, al señalar el escenario en el que ésta se desarrolla. En el caso de Bressoud (2010), menciona los trabajos de Hiparco, Ptolomeo y Euclides que se centran en el estudio del círculo y su necesidad de encontrar distancias dentro de modelos geométricos circulares que representaban la Tierra, la Luna y el Sol. Montiel (2005), por otra parte, caracteriza los principios para la construcción social del conocimiento trigonométrico y reconoce también la importancia del contexto geométrico en el desarrollo de lo trigonométrico. Montiel asocia la práctica social de la anticipación con la herramienta de la razón trigonométrica y hace mención de que surgen en un contexto estático-proporcional mediante el uso de un lenguaje Geométrico-numérico, mientras que las funciones trigonométricas las asocia con la práctica social de la predicción, cuyo contexto es dinámico-periódico y su lenguaje son las curvas-ecuaciones.

Estas investigaciones marcan la importancia de vincular lo geométrico con lo trigonométrico, lo cual ha sido retomado por diversos autores en sus propuestas didácticas y han obtenido resultados favorables en el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, para continuar con estas investigaciones falta estudiar lo que sucede en el tránsito de lo estático a lo dinámico en el estudio de la Trigonometría escolar y caracterizar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en ese tránsito de lo geométrico a lo variacional. Además de proponer, de ser posible, estrategias que permitan al estudiante transitar de la razón trigonométrica a la función trigonométrica sin que pase por la ruptura usual de la enseñanza actual, que inicia el estudio de las razones trigonométricas desde lo aritmético, desvinculando la Geometría de la Trigonometría y culmina con el estudio de las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico con el cambio de medida angular de grados a radianes.

Nuestro primer fundamento teórico será la construcción social del conocimiento trigonométrico, aunque durante el desarrollo del proyecto de investigación debemos fundamentar acerca del pensamiento geométrico y el pensamiento variacional para poder sustentar el diseño de intervención didáctica, así como para realizar el análisis de su puesta en escena. Estos fundamentos surgirán de la revisión bibliográfica cuando ésta se concluya.

3. METODOLOGÍA

En este momento de la investigación se está realizando la revisión bibliográfica que dará sustento al trabajo. Se recopilaron investigaciones tanto históricas, didácticas y teóricas que, aborden las dificultades de aprendizaje de estudiantes o profesores en temas de Trigonometría de nivel medio superior; las que proponen actividades didácticas para superar alguna dificultad de las ya reportadas, o que sugiera una estrategia distinta para iniciar el estudio de la Trigonometría con estudiantes de bachillerato; las investigaciones históricas del surgimiento de la Trigonometría, enfocadas principalmente a los temas de razones trigonométricas y funciones trigonométricas así como también el cambio de medida angular de grados a radianes.

La revisión bibliográfica se ha realizado mediante búsquedas en bases de datos de revistas de educación matemática, las estrategias de búsqueda han sido filtrar los artículos por medio de las palabras clave como son trigonometría, funciones trigonométricas, razones trigonométricas, seno, coseno, tangente, ángulos. Una vez localizados los documentos que tratan los temas que son de

interés para nuestra investigación, se realiza la lectura del resumen y la introducción para determinar si aporta elementos útiles a nuestra investigación.

Posteriormente, se clasificaron para distinguir si los documentos son reflexiones históricas, investigaciones teóricas o propuestas didácticas. Para hacer esta clasificación, se identificó en cada documento su objeto de estudio, las preguntas de investigación, su fundamento teórico, la metodología, los resultados y su aporte a la disciplina.

4. RESULTADOS

Dentro de las investigaciones que reportan dificultades en el aprendizaje de la Trigonometría, revisamos las siguientes: De Kee, Mura y Dionne (1996), quienes realizan un estudio acerca de la comprensión del seno y el coseno en estudiantes de nivel secundaria y encuentran algunas dificultades como son el que los estudiantes aplican las razones trigonométricas a triángulos que no son rectángulos o ángulos que no son agudos, que en el caso de las funciones trigonométricas todas las gráficas que resultan curvas las consideran funciones trigonométricas, que en el círculo trigonométrico no asocian el valor del seno y coseno al ángulo central sino a las coordenadas (x,y) del círculo.

Otro estudio que se realizó para observar la comprensión de las razones trigonométricas con estudiantes de Licenciatura fue el de Araya, Monge y Morales (2007), y reportan las dificultades encontradas al aplicar tareas trigonométricas a los estudiantes. Por ejemplo, la interpretación de los enunciados, es decir, al pasar del enunciado de un problema al esquema o dibujo ubican de manera errónea la incógnita o el ángulo dado; el empleo de las fórmulas, el uso de procedimientos algebraicos como por ejemplo el despeje de la incógnita cuando se encuentra en el denominador y no poder explicar cómo se definen las razones trigonométricas.

Kendal y Stacey (1998) reportan una investigación acerca de los dos métodos de enseñanza (método del triángulo rectángulo y método del círculo unitario) para introducir la Trigonometría escolar básica, con la finalidad de observar cuál es el que promueve mejor comprensión de los conceptos y dominio de habilidades en la resolución de triángulos rectángulos (cálculo de longitud de los lados y medida de sus ángulos).

Las autoras comentan que ellas prefieren abordar el aprendizaje de la Trigonometría usando el método del círculo unitario para definir las funciones trigonométricas y usarlo en todos los cuadrantes, pero conectando el círculo unitario con el triángulo rectángulo y las técnicas de solución

que se aplican en el método del triángulo rectángulo. Esto puede permitir a los estudiantes experimentar significados reales y concretos para las definiciones de Trigonometría y proporcionarles bases para temas más avanzados.

Si bien las investigaciones previas se centraron en concepciones y dificultades considerando el cómo se enseña Trigonometría, Grabovskij y kotel'nikov (1971) resaltan que: “una de las dificultades es que las funciones trigonométricas de argumentos numéricos no pueden ser estudiadas en este nivel por métodos analíticos, y se tiene que recurrir a las ideas geométricas para ayudar al alumno en su comprensión” (p. 147). A nivel de propuesta didáctica, presentan situaciones experimentales que combinan el estudio de la cinemática con el estudio de las matemáticas para extender los conceptos de ángulo y arco, con distintos métodos para medir estas cantidades.

El planteamiento de los autores es usar experimentos de forma similar a como se usan en las clases de Física, con el propósito de que los estudiantes vean la construcción de las funciones trigonométricas y puedan analizar sus propiedades. Los experimentos están diseñados partiendo de la base del círculo trigonométrico y el plano cartesiano para obtener las gráficas de las funciones trigonométricas con aparatos concretos, que al manipularlos a base de movimiento y luz proyectan sombras en una pantalla blanca y describen las curvas de las funciones trigonométricas.

Algunas investigaciones plantean propuestas didácticas para iniciar el estudio de la Trigonometría y rescatan la importancia de vincular la Geometría al estudio de la Trigonometría. Por ejemplo, Quinlan (2004), para iniciar el estudio de la Trigonometría con estudiantes (grado 9), propone medir la altura del salón de clase usando instrumentos de medición como escuadras, un metro y un popote, para trabajar con los ángulos de 45° , 60° y 30° usando las escuadras. En su propuesta sugiere iniciar el estudio de las razones trigonométricas partiendo de la razón tangente y después introducir el seno y coseno. El enfoque de su propuesta es ir de concreto a lo abstracto, evitar comenzar con las definiciones, ir de lo particular a lo general, empezar con los ángulos especiales antes de pasar a los ángulos agudos generales, sumergir a los estudiantes en el contexto de cualquier nuevo concepto antes de explicar tecnicismos, definiciones y usar lenguaje matemático.

Cavanagh (2008) concuerda con la postura de Quinlan (2004) de iniciar el estudio de las razones trigonométricas con actividades antes de introducir las definiciones y también sugiere

iniciar con la razón tangente antes del seno y el coseno, pero parte del conocimiento previo de los estudiantes, iniciando el estudio de la razón tangente asociándola a la pendiente de una recta.

Gutmann (2003) propone una forma de calcular el seno y coseno de la suma de dos ángulos, su aporte va encaminado al estudio de las identidades trigonométricas y relacionarlas con los segmentos dentro del círculo unitario. Esta propuesta está pensada para estudiantes que ya han estudiado las relaciones trigonométricas en el círculo unitario y son capaces de reconocer los segmentos que representan el coseno o seno de un ángulo y el radio.

Weber (2005) reporta resultados positivos en una investigación, sobre la comprensión de la función trigonométrica, con estudiantes de nivel universitario. El autor resalta que la Trigonometría es un tema que conjuga lo algebraico, lo geométrico y el razonamiento gráfico, y ello favorece la comprensión del precálculo y cálculo. Weber identifica que “las funciones trigonométricas son operaciones que no se pueden expresar como fórmulas algebraicas que involucren procedimientos aritméticos, y los estudiantes tienen problemas para razonar sobre tales operaciones y visualizar estas operaciones como funciones”. Su investigación se basa en la noción teórica de Procepto, propuesta por Gray y Tall (1994), que se define como “la amalgama de tres componentes: un proceso que produce un objeto matemático, y un símbolo que se utiliza para representar a cualquiera, proceso u objeto” (p. 92).

El autor menciona que para obtener el seno de un ángulo y razonar acerca de las propiedades de los valores numéricos de expresiones trigonométricas, ya sea por el método del triángulo rectángulo o del círculo unitario, se tiene que recurrir a procesos geométricos. Por las actividades que desarrollan los estudiantes se infiere que para él las construcciones geométricas son: el trazo de la circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano, el trazo del radio a un ángulo (medido con transportador) y la lectura de las coordenadas donde el radio corta a la circunferencia, esto último para obtener el seno y el coseno del ángulo.

Su investigación utiliza un diseño experimental para responder si los estudiantes universitarios comprenden las funciones trigonométricas a nivel de procepto, considerando un grupo de control. Weber trabajó con dos grupos, uno de 31 estudiantes que llevaron el curso de manera tradicional y otro de 40 estudiantes que recibieron la instrucción experimental que consistió de tres etapas:

- Procedimiento. Consistía en mostrar a los estudiantes el algoritmo de solución y mecanizarlo.

- Proceso. Reflexionar acerca del procedimiento una vez que se ha aplicado varias veces para darle significado al procedimiento.
- Precepto. Cuando el estudiante entiende el proceso es capaz de anticipar resultados y razonar acerca de las propiedades de salida del proceso. Cuando esto ocurre, el estudiante puede ver el símbolo de la operación como el propio proceso y el resultado de la operación.

El autor refiere que las limitaciones de los que reciben instrucción estándar, en cuanto a las funciones trigonométricas, son el papel que juegan las figuras geométricas en la comprensión de las funciones trigonométricas, porque deben relacionar las funciones trigonométricas con el modelo geométrico apropiado. Y el nivel de control que los estudiantes sienten que tienen cuando operan con la función seno, ya que los estudiantes no perciben la función seno como un proceso significativo o dirigido a un objetivo, sino como un algoritmo para encontrar una respuesta.

Si bien la “construcción geométrica” a la que hace referencia Weber (2005) no es de la misma naturaleza que aquella referida al triángulo rectángulo, en las investigaciones de De Kee *et al.* (1996) y Kendal y Stacey (1998) se reconoce en Weber un intento por articular las herramientas matemáticas, más que separarlas como métodos de enseñanza.

Una mirada alternativa es la de Moore, LaForest y Kim (2012), quienes diseñan actividades didácticas, en el contexto del círculo, que van desde la medición angular hasta la graficación de las funciones trigonométricas y que favorecen el razonamiento cuantitativo, el uso del radio del círculo como unidad de medida y el razonamiento covariacional. Es decir, no proponen un diseño didáctico para aprender el concepto de función trigonométrica, sino una serie de tareas que le dan coherencia al uso de múltiples nociones matemáticas relacionadas con ella.

En cuanto a las investigaciones histórico epistemológicas, Bressoud (2010) presenta una breve revisión histórica del desarrollo de la Trigonometría y en ella reporta cómo se introduce al ámbito escolar y va cambiando su presentación, desde su introducción a partir del círculo trigonométrico hasta nuestros días que se comienza en el contexto del triángulo rectángulo. Bressoud menciona que la Trigonometría surgió para entender y explicar fenómenos astronómicos, así como para apoyar la navegación. Explica cómo se desarrollaron las medidas de los ángulos en la circunferencia y el surgimiento del triángulo rectángulo para determinar longitudes, usando la proyección de la sombra de un objeto y el ángulo del sol. El autor destaca que la Trigonometría

tuvo su origen con la observación del cielo, en la Grecia antigua, y nace a partir de construcciones geométricas, de ahí que surja la Trigonometría en el círculo trigonométrico.

En Montiel (2005) encontramos una caracterización, de corte histórico-epistemológica, sobre la construcción social del conocimiento trigonométrico que permite explicar la distinción de las herramientas trigonométricas, en relación a su uso, y con ello entender los fenómenos didácticos más comunes en el aula y fundamentar innovaciones didácticas cuyo objetivo sea desarrollar el pensamiento matemático, más que el dominio de los objetos (razones, funciones o series) trigonométricos.

También en un escenario histórico, pero haciendo un estudio desde la Matemática Educativa, Montiel (2011) realiza un estudio de las prácticas sociales y de referencia que enmarcan la emergencia al conocimiento trigonométrico. La autora identifica tres prácticas de referencia que son la matematización de la astronomía, la matematización de la física y la matematización de la transferencia de calor, y a partir de ellas distingue tres momentos de construcción social del conocimiento trigonométrico: de anticipación, de predicción y de formalización.

El estudio de Montiel (2011) se fundamenta en la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, lo cual implica que problematiza el saber, cuestionando su estatus como lo que debe ser enseñado y aprendido, y que reconoce la emergencia de significados en la actividad del individuo, visto éste como sujeto social.

La revisión bibliográfica realizada hasta el momento nos da un panorama del surgimiento histórico epistemológico de la Trigonometría, de las dificultades de aprendizaje detectadas en estudiantes, los niveles de comprensión que presentan tanto estudiantes como profesores y de algunas propuestas didácticas para darle sentido al estudio de la Trigonometría en el aula.

5. CONCLUSIONES

Aún no se termina la revisión bibliográfica, pero hemos encontrado que algunos clasifican por niveles de comprensión a los estudiantes y plantean las dificultades que se presentan en el estudio de la Trigonometría, algunos autores proponen secuencias didácticas, aunque no todos reportan resultados porque no siempre las aplican con estudiantes sino que en algunos casos se quedan a nivel de propuesta. Hay autores que manifiestan una postura a favor de iniciar el estudio de la Trigonometría desde el contexto del círculo aunque algunos no presentan resultados sino sólo presentan reflexiones con base en el estudio realizado. Al momento no hemos encontrado una

investigación que aborde el pensamiento geométrico relacionado con el estudio de lo trigonométrico, a lo más resaltan la visualización y en cuanto al pensamiento variacional, la propuesta que aborda un poco el tema es la de Moore *et al.* (2012) que menciona el razonamiento covariacional.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Araya, A.M., Monge A., y Morales, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 7(2), 1-31.
- Bressoud, D. (2010). Historical reflections on teaching trigonometry. *Mathematics Teacher* 104(2), 106-112.
- Cavanagh, M. (2008). Trigonometry from a different angle. *Australian Mathematics Teacher* 64(1), 25-30.
- Cobb, P., Confrey, J., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher* 32(1), 9-13.
- De Kee, S., Mura, R., y Dionne, J. (1996). La compréhension des notions de sinus et cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics* 16(2), 19-22.
- Grabovskij, M., & Kotel’Nikov, P. (1971). The use of kinematic models in the study of trigonometric functions. *Educational Studies in Mathematics* 3(2), 147-160.
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(2), 114-141.
- Gutmann, T. (2003). A direct approach to computing the sine or cosine of the sum of two angles. *Mathematics Teacher* 96(5), 314-318.
- Kendal, M., & Stacey, K. (1998). Teaching Trigonometry. *Australian Mathematics Teacher* 54(1), 34-39.
- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. [Tesis doctoral no publicada]. México: CICATA - IPN.
- Montiel, G. (2011). Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Moore, K., LaForest, K., & Kim, H. (2012). The unit circle and unit conversions. *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 16-31). Portland, OR: Portland State University.
- Quinlan, C. (2004). Sparking interest in trigonometry. *The Australian Mathematics Teacher* 60(3), 17-20.
- Weber, K. (2005). Student’s understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal* 7(3), 91-112.