ISSN: 2594-1046

MODELACIÓN Y TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A NIVEL BACHILLERATO: ALGUNOS EJEMPLOS DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE

José David Zaldívar Rojas
Universidad Autónoma de Coahuila, México
Gonzalo Medina Ramírez
Universidad Autónoma de Coahuila, México
Alibeit Kakes Cruz
Universidad Autónoma de Coahuila, México

Resumen

Paulatinamente, el uso de las nuevas tecnologías, como paquetes de geometría dinámica, *applets,* calculadoras o sensores, se ha convertido cada vez en algo más común dentro de las clases de matemáticas. Sin embargo, en la actualidad existen resistencias sobre las ventajas de la integración de tecnología a las clases. Posiblemente debido a un desconocimiento de la misma, el temor de los profesores a lo desconocido, o al poco control de grupo que generan estas tecnologías e inclusive el que se desconozcan qué ventajas y posibilidades ofrece a dichos ambientes educativos. Por esta razón, en este taller se presentan algunas *situaciones de aprendizaje* basadas en la modelación como ejemplos de cómo es posible integrar tecnología al aula de matemáticas, resaltando la funcionalidad del conocimiento y el desarrollo de significados alrededor de diversos conceptos matemáticos.

Palabras Clave: Modelación, Tecnología Escolar, Situaciones de aprendizaje, Bachillerato

1. PROPÓSITO Y ALCANCE

Investigaciones en Matemática Educativa cada vez enfrentan el surgimiento de nuevas tecnologías con potencialidades para su integración en el aula de matemáticas, proporcionando sin duda transformaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Actualmente, una de tales transformaciones tiene que ver con la creación de ambientes de aprendizaje donde la matemática sea funcional y sea percibida también como una ciencia experimental, pero, además, se promuevan diferentes representaciones de los conceptos matemáticos. El propósito que se persigue con el presente taller es que, a través de situaciones de aprendizaje diseñadas con base en la Modelación, es decir, en el *uso del conocimiento matemático* como una herramienta que permita tomar decisiones, integrando además recursos tecnológicos como calculadoras, los estudiantes tengan una ventana a elementos funcionales del conocimiento matemático que en ambientes de lápiz y papel difícilmente pudiesen vivenciar (Cordero, 2006; Villarreal, 2012).

ISSN: 2594-1046

Los participantes del taller discutirán una serie de situaciones de aprendizaje donde la tecnología tiene un rol protagónico, y a través de su uso, se discuten elementos didácticos que pueden potenciarse con la integración de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas. Nuestra finalidad es la de proveer a los profesores de estrategias y de ejemplos plausibles para el salón de clases y afectar de manera benéfica su práctica docente. Así mismo, se pretende discutir tecnologías novedosas como calculadoras graficadoras y su instrumentalización.

Por otro lado, se pretende dejar ver entre los participantes del taller la importancia de las diferentes representaciones y la conexión que puede existir entre ellas y maneras en las cuales se pueden aprovechar para el desarrollo de diversos tópicos en el nivel bachillerato.

2. MARCO CONCEPTUAL

La *Modelación Matemática y las Aplicaciones* son, en general, temas centrales que en los últimos años se convirtieron en tendencias dentro de la investigación en Matemática Educativa. Esta importancia relacionada a dichos tópicos se debe principalmente a la evidencia brindada en diversas investigaciones que hacían ver la poca vinculación que existe entre la escuela y su entorno (Lave, 1988), y a la imposibilidad de la transferencia del conocimiento aprendido en la escuela a la vida cotidiana de los estudiantes (Arrieta & Díaz, 2015). Inclusive en diversos libros de texto de diferentes niveles se aprecia una tendencia a integrar un “mundo extra-matemático” que enriquezca a las actividades y al currículo con la finalidad de hacer que las matemáticas sean útiles fuera del ámbito escolar (Niss, et al., 2007).

Sin embargo, se reconoce que estas categorías, aunque juegan un rol importante en las aulas de clases de muchos países y es considerada dentro de los planes curriculares como una manera de enseñar y aprender matemáticas, aún existe una brecha importante entre los ideales expresados en las reformas curriculares innovadoras y las prácticas escolares que sustancialmente se desarrollan día a día. Se afirma que es muy complejo encontrar actividades de modelación *genuinas* dentro del salón de clases de matemáticas (Niss, et al., 2007).

Dentro de la presente propuesta, se asume como postura de modelación como aquel *proceso* por medio del cual se pretende entablar una relación, a través de *modelos matemáticos,* entre un mundo extra-matemático y las matemáticas (Niss, Blum y Galbraith, 2007) (Figura 1).

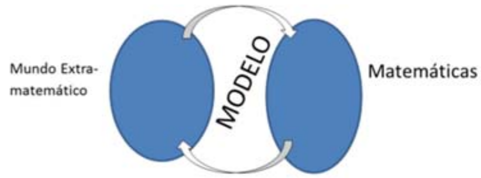


Figura 1. Matemáticas y el mundo extra-matemático (Tomado de Niss et al, 2007, p.4).

Lo anterior implica que la modelación se considere como un proceso mediante el cual se pueden desarrollar competencias matemáticas para la aplicación de las mismas con propósitos extra-matemáticos (Niss, et al., 2007; García, Gascón, Higueras, Bosch, 2006).

Por otro lado, la integración de la tecnología a la clase de matemáticas conlleva –o debería conllevar- una transformación de las prácticas educativas, de los contenidos y de las formas de conocer (Villarreal, 2012). Considerando que la tecnología por sí sola no será el vehículo de la mejora, sino se acompaña de cambios en la práctica docente. De esta manera, la tecnología escolar, como las calculadoras graficadoras, se convierten en herramientas útiles que permiten el desarrollo del pensamiento matemático, puesto que estimulan la reflexión y hacen más activos a los estudiantes, propiciando el diálogo entre estudiantes y profesor, de manera que se construyan significados de manera conjunta (Ursini, 2006).

2.1. Método

El proceso de modelación matemática se inicia con la *conceptualización* de alguna Situación-Problema. Posteriormente, a través de simplificar, estructurar, precisar los datos y relaciones, así como establecer suposiciones de entrada en el dominio extra-matemático, se traduce la situación al lenguaje matemático, es decir, se *matematiza*. En esta *matematización* se utilizan métodos, teoremas y relaciones matemáticas conocidas, se resuelven las ecuaciones derivadas y se dan datos como resultados matemáticos. Estos resultados son traducidos posteriormente al mundo extra-matemático con la finalidad de interpretar resultados, validar el modelo y evaluarlo con base en la matemática y la plausibilidad de los datos para dar solución al problema real. Este ciclo se repite con la intención de validarlo (Niss, et al., 2007; Biembengut & Hein, 1997; Zaldívar, en prensa) (ver figura 2).

Las anteriores relaciones dentro del proceso de modelación es lo que sustenta el diseño de las situaciones de aprendizaje que se propondrán en el laboratorio. Cabe mencionar que la integración de la tecnología será crucial y transversal a todo el proceso, y claramente permitirá el uso del conocimiento matemático a través de la resolución de una situación-problema vivencial que permita a los participantes hacer consideraciones sobre la realidad y evidenciar así la funcionalidad del conocimiento.

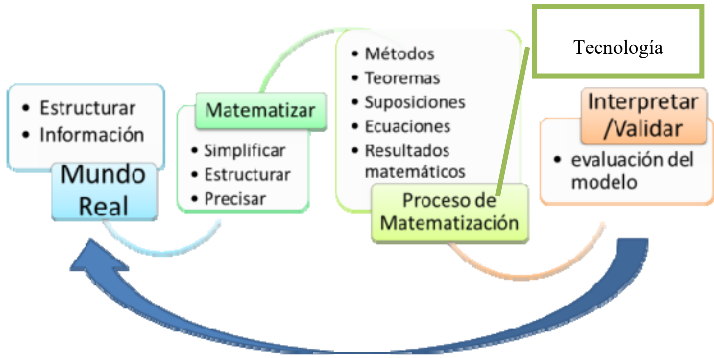


Figura 3. Proceso de modelación matemática (Tomado de Zaldívar, en prensa)

La forma en la cual se implementará el taller será el siguiente:

- Momento 1: Discusión de las situaciones de aprendizaje en equipos de trabajo. Se proponen actividades que hacen alusión a situaciones cotidianas con ayuda de la tecnología escolar como serán calculadoras. Se obtendrán diferentes representaciones semióticas que indican el comportamiento de los fenómenos.
- Momento 2: Producciones y discusión de los participantes. Se harán evidentes los procedimientos y resultados. Se realizarán consensos y discusiones grupales.
- Momento 3: Reflexiones sobre los conocimientos abordados durante la situación y sobre el uso de la tecnología. Se discutirá la fundamentación de las situaciones de modelación y su posible implementación en el aula de matemáticas.

3. SITUACIONES DE APRENDIZAJE

Las Situaciones de aprendizaje que se decidieron incluir en el taller responden al anterior proceso de modelación, donde se integra una componente tecnológica que permita también construir significados y que propicie el tránsito y la articulación entre diversas representaciones semióticas (Hitt, 1998), a través del uso de tablas de datos, gráficas y ecuaciones.

El diseño de estas situaciones de aprendizaje, que estuvo bajo la coordinación de nuestro grupo de investigación, pretende hace emerger justificaciones funcionales por medio de los usos del conocimiento matemático. En las situaciones, no se privilegian los conceptos matemáticos, sino sus usos y las argumentaciones en torno a la modelación y su desarrollo.

Algunos ejemplos de situaciones de aprendizaje que se discutirán con los asistentes son las siguientes:

3.1. Situación de Aprendizaje 1: ¿Qué tiene que ver un hueso con mi altura?

Objetivo: Determinar la relación que existe entre la longitud del fémur y la altura de una persona por medio del uso de gráficas y tablas de ajuste.

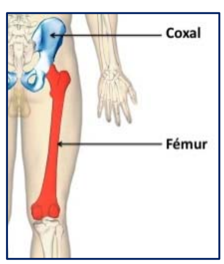
Para esta actividad es necesario contar con los siguientes materiales:

- Cinta métrica
- Al menos 14 personas, 7 varones y 7 mujeres. Se harán mediciones para las mujeres y para los hombres ya que difieren las relaciones.

Discusión de la situación

¿Se han preguntado alguna vez cómo es que los paleontólogos son capaces de decir cuánto media un dinosaurio? Pues bien, para ello, utilizan la toma de datos y a las matemáticas.

Para estimar la altura de un individuo, los forenses y antropólogos suelen utilizar huesos largos de la pierna. Los datos son fiables siempre que se utilicen huesos adultos, y primero hay que determinar si el hueso utilizado es de un hombre o de una mujer.



En esta actividad estimaremos la altura de hombres y mujeres en función de las medidas del fémur. Veremos que las fórmulas se pueden estimar por medio de rectas.

ISSN: 2594-1046

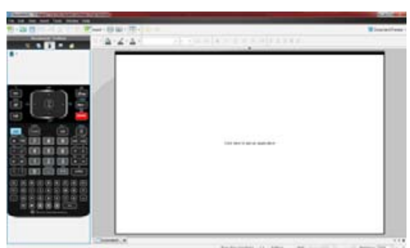
El fémur es el hueso más largo y resistente del cuerpo humano. Se localiza en el muslo. Asegura la unión entre los huesos de la pelvis y la articulación de la rodilla. Juega un papel muy importante en el movimiento de la pierna. Caminar, correr, saltar: es esencial en todas estas actividades.

Desarrollo de la Situación

Usando la cinta métrica cada equipo va a completar la siguiente tabla de longitud del fémur y la altura de la persona.

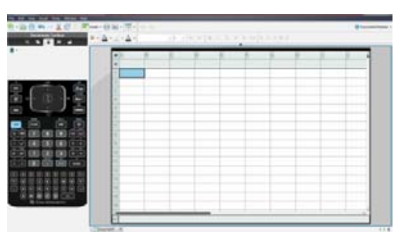
	P-1	P-2	P-3	P-4	P-5	P-6	P-7
Longitud del fémur (cm)							
Altura de la persona (cm)							

Una vez que tengas los datos registrados, usaremos el programa TI-NSpire (o similar) para analizarlos gráficamente y tratar de encontrar relaciones entre los datos.



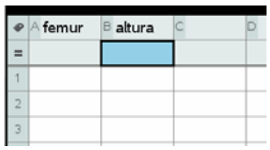
1. Abre el programa y realiza lo que se te pide. Debes de visualizar una pantalla similar a la siguiente figura:

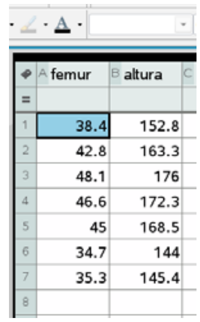
2. Da *clic* derecho en cualquier parte de la pantalla en blanco y selecciona la opción “Listas y hoja de cálculo” del menú que aparece. Debes visualizar algo como:



3. Introduce los datos en la hoja de cálculo que aparece tal y como los recopilaste. En la parte de arriba de la tabla (marcada con A, B, C, etc.) puedes poner el nombre de la variable que

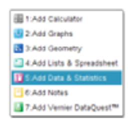
escribas en la columna. Nosotros marcamos la columna A como “fémur” para indicar la longitud del fémur recopilado, y “altura” para poner la altura de la persona.



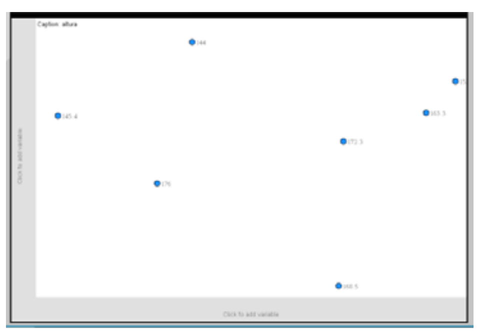


	A femur	B altura
1	38.4	152.8
2	42.8	163.3
3	48.1	176
4	46.6	172.3
5	45	168.5
6	34.7	144
7	35.3	145.4

4. Posteriormente, agrega una nueva hoja de trabajo. Para ello, en la calculadora teclea “ctrl”+ “+page” (tecla “doc”). En esta hoja al dar clic en cualquier parte aparecerá nuevamente el menú y escogeremos la opción “Add data & Staticstis”.



Al dar clic en esta opción, automáticamente aparecerán nuestros puntos que acabamos de registrar en la tabla.



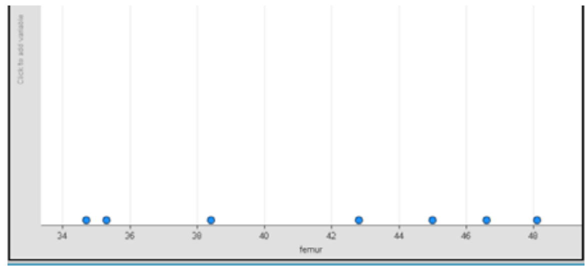
Notemos que, en esta pantalla, en el eje horizontal y vertical se puede apreciar la leyenda “Clic para insertar variable”:

5. En esos recuadros vamos a declarar nuestras variables que escribimos en la tabla. En el eje horizontal agregaremos la variable “fémur” y en el eje vertical, la “altura”. De esta manera tendremos que la altura dependerá de la variable “fémur”.

ISSN: 2594-1046

Para agregar la variable, solo demos clic en "clic para agregar variable" y seleccionemos cada una de las variables. Veamos el efecto:

Podrán observar cómo los datos automáticamente se ajustan a lo que solicitamos. Ahora agreguen en la variable dependiente la variable "altura".



Responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué observan al definir en los ejes a las variables?

2. ¿Qué les dice esa relación?

3. ¿Cuánto medirá una persona cuyo fémur mide 51 cm de longitud? (acá es posible que ustedes encuentren por medio de "regresión" la curva que mejor se acomoda a los datos, en este caso, la longitud del fémur y la altura están en una relación lineal).

4. ¿Cuánto medirá aproximadamente una persona cuyo fémur mide 38 cm?

5. ¿Cómo queda la relación entre la altura con respecto a la longitud del fémur?

6. Comparen las gráficas que se obtienen de "hombres" y mujeres", ¿qué observan?, ¿existen diferencias?

3.2. Situación de Aprendizaje 2: ¿Debo preocuparme?

Propósito: Utilizar la calculadora científica como un recurso didáctico para abordar temas de Física. Tales como conversión de unidad en la calculadora y posibilidad de ofrecer una alternativa para justificar el porqué de las fórmulas que permiten realizar conversiones.

Situación planteada a los estudiantes:

Desde hace un par de horas, Mauricio, un estudiante de intercambio en Estados Unidos, se ha empezado a sentir mal. Él recuerda que su madre le ha dicho que cuando la temperatura del cuerpo está por encima de los 39.5º C es momento de tomar medidas y acudir al médico de inmediato, ya que podría haber problemas derivadas de la fiebre.

Un amigo suyo le ayuda a tomarse la temperatura. Al hacerlo, su amigo le comenta que tiene en ese momento 101.5º F.

Mauricio sólo sabe que 0 grados centígrados equivale a 32 grados Fahrenheit y que 212 grados Fahrenheit son 100 grados centígrados. ¿Debería preocuparse Mauricio?

Desarrollo de la situación:

Caso 1.

Esta actividad se puede resolver de al menos dos maneras. Nuestro interés en la visualización nos obliga a llevar el argumento de la respuesta más allá de un desarrollo algebraico y centrarnos en el uso de la gráfica como un elemento integrador que permite argumentar sobre la situación planteada.

En este problema se puede pedir al estudiante que llene tablas con las conversiones de centígrados a Fahrenheit, sin embargo, es posible que el estudiante realice "reglas de tres directas" para resolver el problema. Esta estrategia no funcionará porque la relación entre grados centígrados y Fahrenheit no es directamente proporcional, ¿cómo le haría ver a su estudiante que la regla de tres no funciona?

Al no encontrar en la "regla de tres" un elemento que permita resolver el problema, los estudiantes están en *situación de aprendizaje.* Esto significa que deben construir otras herramientas matemáticas para resolver la situación. La pregunta que podría ayudarles a reflexionar sobre una estrategia distinta es cuestionarles sobre *cuánto cambia la temperatura por grado.* Es decir, si se eleva la temperatura un grado centígrado, cuánto varió la temperatura en Fahrenheit. Esto significa reflexionar sobre la variación por grado.

Con esta estrategia los estudiantes pueden obtener lo siguiente:

$$\frac{\Delta°\mathrm{F}}{\Delta°\mathrm{C}} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = 1.8$$

Esto significa que por cada grado centígrado que se eleve la temperatura, se eleva 1.8 grados Fahrenheit: 1.8º F/º C.

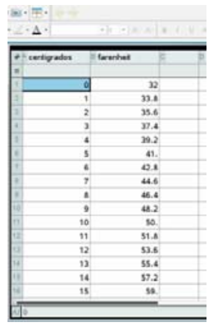
De esta manera es posible solicitarles a los estudiantes que completen una tabla en la Ti-Nspire (o similar) y encuentren relaciones entre cada grado centígrado y los Fahrenheit.:

1.Abrir el programa de CAS Ti-Nspire y agregar una hoja de "listas y hoja de cálculo".

2. Se pueden agregar los nombres de las columnas, podrían ser "centígrados" y "Fahrenheit".

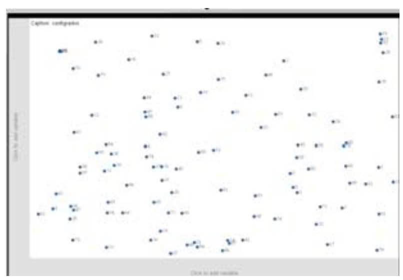
ISSN: 2594-1046

3. Se recomienda hacer 100 datos, dadas la facilidad de rellenar las tablas conviene tener más datos, además de que permite analizar cómo cambian los grados Fahrenheit. Recuerde que por cada grado que aumentan los centígrados hay un cambio de 1.8 en los Fahrenheit. Se podría visualizar algo como lo siguiente:



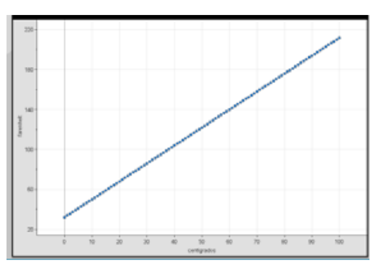
centigrados	farenheit
0	32
1	33.8
2	35.6
3	37.4
4	39.2
5	41.
6	42.8
7	44.6
8	46.4
9	48.2
10	50.
11	51.8
12	53.6
13	55.4
14	57.2
15	59.

4. Agregar otra hoja de trabajo y en ella abriremos “Add data & Statistics”. Automáticamente veremos repartidos nuestra nube de puntos.



5. Insertar como se mostró anteriormente las variables “centígrados” y “Fahrenheit” en las casillas de “agregar variable”. La variable independiente es “centígrados” y “Fahrenheit” es la dependiente. ¿Qué pasaría si invertimos la relación? ¿Qué puedes concluir al respecto?

6. ¿Qué relación puedes encontrar entre grados centígrados y Fahrenheit? Con ayuda de la “regresión” podemos solicitar la ecuación del comportamiento de nuestras variables, la cual corresponde con la fórmula para “pasar de” centígrados a Fahrenheit.



7. ¿Qué puedes concluir con respecto a la situación de Mauricio?

Caso 2.

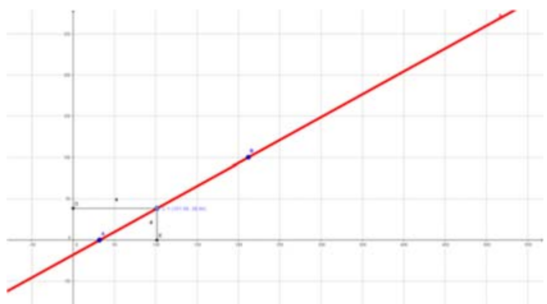
Es posible trabajar con los estudiantes de una manera enteramente gráfica la relación entre Centígrados y Fahrenheit. Para ello, utilizaremos el Geogebra.

1. Abrir el programa de Geogebra y ubicar dos puntos: el (32, 0) y el (212, 100). ¿Por qué este par de puntos?, ¿Qué estaríamos graficando?, ¿cuáles son las variables dependiente e independiente, respectivamente?

2. Construir una "recta que pasa por dos puntos" y hacer que dicha recta pase por los puntos anteriormente construidos.

3. Ubicar un punto en dicha recta. ¿Qué representaría este punto?

4. ¿Es posible con este dato dar una respuesta a la condición de Mauricio? ¿Por qué?



3.3. Otras situaciones

A continuación, mencionaremos sin detalle, otras situaciones de aprendizaje que se pretenden discutir y sus propósitos.

Situación de Aprendizaje 3: ¡Gotas de Sangre por donde quiera! (basado en Medina, s.f.)

Propósito: Modelar la relación que existe entre el diámetro que adquiere una gota de sangre al caer al piso y la relación con la altura de una persona. Tomando como apoyo la versatilidad de la calculadora Class Pad 400 para realizar diferentes representaciones de funciones y el ajuste de una curva.

Situación de Aprendizaje 4: Leyes de Mendel y binomio al cuadro

Propósito: La importancia de buscar la transversalidad de temas de matemáticas con otras ciencias en específico con Biología, abren la posibilidad de modelar la segunda ley de Mendel apoyada en las herramientas de la calculadora Fx-991 ES Plus o Fx -82 Plus ES.

Situación de Aprendizaje 5: La Carrera de caballos y calculadoras científicas.

Propósito: simular el lanzamiento de un par de dados para abordar el tema de probabilidad de que ocurra un evento apoyado en las funciones de las calculadoras.

Situación de Aprendizaje 6: Representación gráfica de desigualdades

Propósito: Mostrar el potencial de la calculadora Class Pad 400 para representar sistemas de desigualdades lineales.

Situación de Aprendizaje 7: Raíces de un polinomio

Propósito: mostrar el apoyo que puede ofrecer una calculadora Fx-991 ES Plus o Fx -82 Plus ES, para determinar las raíces de un polinomio. Ofreciendo reducir el tiempo cálculo al a tratar de encontrar las raíces a partir del ensayo y error.

4. COMENTARIOS FINALES

La intención del taller es la de dar a conocer cómo la modelación podría integrarse a las clases de matemáticas de nivel bachillerato a través del diseño e implementación de situaciones de aprendizaje donde se integre una componente tecnológica para generar significados y el tránsito entre diferentes registros de representación. Lo anterior responde a que la investigación ha dejado ver que los profesores tienen dificultades al momento de orquestar ambientes y actividades de aprendizaje donde se involucre a la modelación, aun cuando dichos profesores hayan tenido un entrenamiento en matemáticas o formados como profesores de matemáticas donde se hayan enfatizado únicamente el desarrollo de contenidos matemáticos.

El uso de la tecnología propicia además una reflexión sobre el rol que tienen la noción de función y otros conceptos matemáticos dentro de la escuela y que es posible, con ayuda de esos dispositivos tecnológicos, el uso de diferentes representaciones y de manera más importante, la articulación entre dichas representaciones. Lo anterior no significa que sin los dispositivos tecnológicos los profesores no tendrían posibilidades de llevar a cabo estas actividades en el aula. Es posible rediseñar nuestras actividades utilizando por ejemplo otros materiales como calculadoras más sencillas, de tal forma que la toma de datos en la experimentación sea un elemento importante para la reflexión sobre la matemática.

Por último, es importante resaltar el crear las oportunidades para que los profesores desarrollen esta capacidad o competencias de modelación de manera que posteriormente puedan integrarla en su práctica docente de manera efectiva. Consideramos que este taller aporta a dicho desarrollo profesional del profesor de matemáticas. Esperamos que el contenido del taller sirva para reflexionar sobre la importancia de su práctica docente y reformule las actividades que desarrolla en el salón de clases.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), p. 19-48.

Biembengut, M. y Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza aprendizaje de matemáticas. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 38, 209-222.

Bosch, M.; García, F.; Gascón, J. y Ruiz-Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), p. 37-74.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20(1), 59-79.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática,* 10(2), 23-45.

Lave, J. (1988). *La cognición en la práctica*. España: Paidós.

Medina, G. (s.f.). Implementación de Competencias en el Aula a través de un Caso de C.S.I. Apoyado en TI-Nspire™ CX CAS. Recuperado el 25 de agosto de: https://education.ti.com/sites/LATINOAMERICA/downloads/pdf/Caso_de_CSI_apoyado_en_la_TI-Nspire_CX_CAS.pdf

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Part 1. Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer. 3-32.

Ursini, S. (2006). Enseñanza de las matemáticas con tecnología (EMAT). En Rojano, T. (Ed.), Enseñanza de la física y matemáticas con tecnología: modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula. Secretaría de Educación Básica: México, D.F.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. Virtualidad, Educación y Ciencia, 3(5), 73-94.

Zaldívar, J. (en prensa). Una reflexión sobre la modelación desde la construcción social del conocimiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* volumen 29.